Aula

15

ÁLGEBRA BÁSICA

META

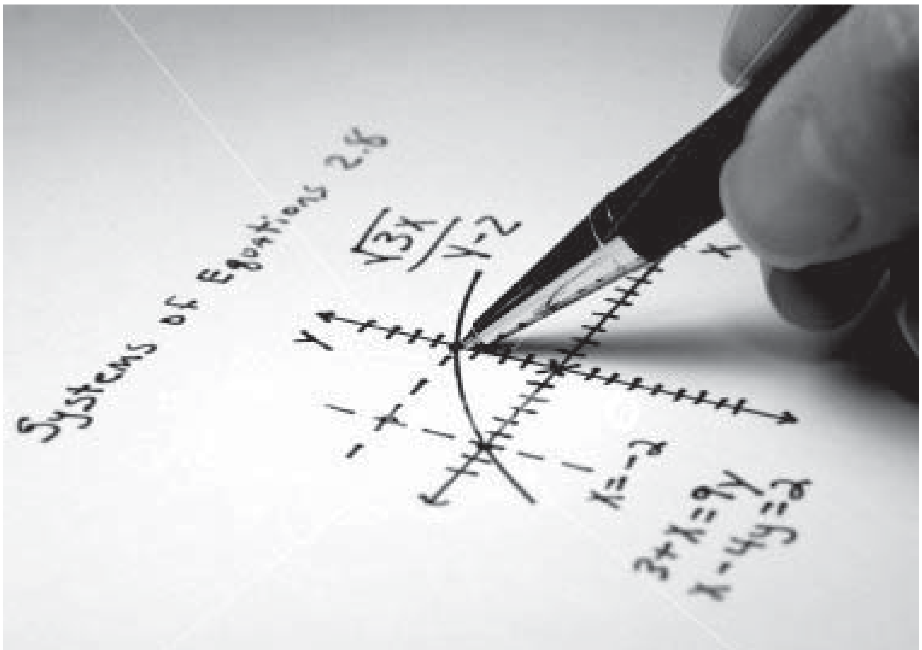
Suprir algumas deficiências sobre álgebra ensinada em matemática no nível médio

OBJETIVOS

Ao final desta aula, o aluno deverá:
definir conceitos matemáticos de álgebra básica;
interpretar os coeficientes a e b em uma reta de um gráfico y=ax +b; e
realizar operações com matrizes.

PRÉ-REQUISITOS

O aluno deverá ter em mãos seus livros ou cadernos de matemática do ensino médio e uma calculadora.



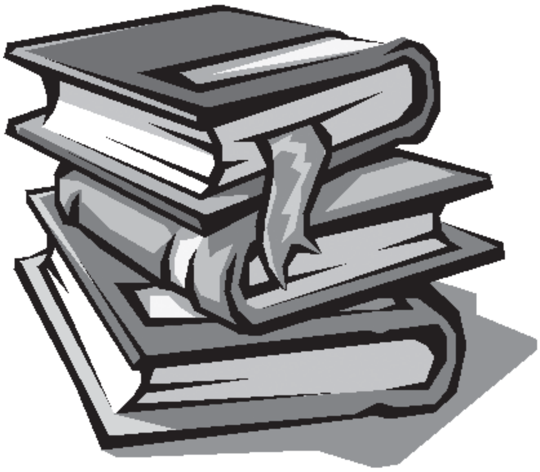
Álgebra (Fonte: http://cms.dt.uh.edu).

INTRODUÇÃO

A física faz uso de equações e fórmulas para compreender o mundo que nos cerca. Vamos mergulhar juntos nelas?

Por que essa hesitação? Você tem medo de fórmulas? A matemática é muito difícil? Nem tanto, tudo o que você precisa é um pouco de perseverança e uma dose regular de estudo para transformar qualquer dificuldade em uma arma em seu benefício.

Nessa e na nossa próxima aula, faremos uma revisão de alguns resultados básicos de operações e métodos matemáticos a fim de assegurar que você se lembre bem deles. É recomendado que você esteja totalmente familiarizado com técnicas algébricas, geometria analítica e trigonometria logo no início do curso. Caso você tenha dificuldades ou encontre resultados desconhecidos é conveniente estudá-los mais cuidadosamente em livros e anotações de nível médio.



Livros (Fonte: http://penta2.ufrgs.br).

REGRAS BÁSICAS

Uma equação é uma expressão matemática; uma fór-mula é uma equação usada com a proposta de encontrar certo valor ou resolver um problema prático.

Equações e fórmulas podem conter certos coeficientes (números específicos), constantes (quantidades especificas representadas por letras do alfabeto), e/ou variáveis (expressões que significam números, mas não os especificam).

Cuidado, pois constantes podem ser confundidas com variáveis, a menos que sejam declaradas no texto indicando o que seu símbolo significa e especificando a unidade envolvida. Um exemplo comum é utilizarmos a letra c para representar a velocidade da luz (cerca de 299.792.000 m/s).

Outro exemplo é a letra e, que representa a constante exponencial, cujo valor é aproximadamente 2,71828.

Qualquer operação aritmética comum é possível em uma equação ou fórmula. Isso inclui adição, subtração, multiplicação, divisão. Algumas funções também são usadas, tais como funções logarítmicas, funções exponenciais, funções trigonométricas, ou algumas funções mais sofisticadas.

Quando uma operação algébrica é realizada, as leis da aritmética são aplicadas. Símbolos tais como x, y e z são comumente usados para representar quantidades que não são especificadas, que denominamos variáveis. Quando você escrever uma fórmula, tenha o cuidado de definir cada uma das constantes e variáveis para que um leitor saiba para que a fórmula está sendo usada e o que todas as suas quantidades representam.

POR EXEMPLO, CONSIDERE A EQUAÇÃO:

$$8x=32$$

Se nós queremos saber quem é o x, podemos dividir (ou multiplicar) cada lado da equação pelo mesmo fator sem destruir a igualdade. Nesse caso, se dividimos ambos os lados por 8 teremos:

$$\frac{8x}{8}=\frac{32}{8}$$

$$x=4$$

Agora considere essa outra equação:

$$x+2=8$$

Nesse tipo de expressão nós podemos adicionar ou subtrair a mesma quantidade em cada lado:

$$x+2-2=8-2$$
$$x=6$$

Generalizando, se $x+a=b$ então :

$$x+a-a=b-a$$
$$x=b-a$$

Em todos os casos, qualquer que seja a operação realizada em um dos lados da igualdade, ela também deve ser realizada no outro lado.

POTENCIAÇÃO

Quando potências de certa quantidade (mesma base) são multiplicadas, as seguintes regras se aplicam:

$$x^n x^m = x^{n+m}$$

Exemplo:

$$x^2 x^4$$

$$x^2 x^4 = x^{2+4} = x^6$$

Quando dividimos as potências de certa quantidade a regra é:

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

Por exemplo,

$$\frac{x^8}{x^2} = x^{8-2} = x^6$$

Se uma potência é uma fração, tal como $\frac{1}{3}$, corresponde então a uma raiz como segue:

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

Por exemplo, $27^{1/3} = \sqrt[3]{27} = 3$

Finalmente, uma quantidade x^n elevado à m-ésima potência é:

$$\left(x^n\right)^m = x^{nm}$$

ATIVIDADES

1. Calcule $9^2 \cdot 3^5 \cdot 2 + 2^3 \cdot 2 - 9^{\frac{1}{2}}$

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

Isso é bem fácil. Veja que só podemos somar os expoentes se tivermos a mesma base e quando elas estiverem sendo multiplicadas. Podemos transformar o 9 em 3^2 e $9^{1/2}$ em $\sqrt{9}$, então:

$$(3^2)^2 \cdot 3^3 \cdot 2^2 + 2^3 \cdot 2 + \sqrt{9} =$$

$$3^4 \cdot 3^3 \cdot 2^2 + 2^3 \cdot 2 = 3^{4+3}.2^2 + 2^{3+1} + 3 =$$

$$3^7 \cdot 2^2 + 2^4 + 3 = 2187.4 + 16 + 3 = 8767$$

Portanto $9^2 \cdot 3^5 \cdot 2 + 2^3 \cdot 2 + 9^{\frac{1}{2}} = 8767$

LOGARITMOS

Suponha que a quantidade x é expressa como uma potência de alguma quantidade a:

$x = a^y$

O número a é chamado de *base*. O logaritmo de x com respeito à base a é igual ao expoente para o qual a base deve ser elevada de forma a satisfazer a expressão .

Revertendo, o antilogaritmo de y é o número x:

Na prática, as duas bases mais usadas são a base 10, denominada logaritmo de base comum, e a base , chamada de constante de Euler ou logaritmo de base natural.

Quando logaritmos comuns são usados:

y=**log**$_{10}x$ (ou x=**10**^{y})

Quando o logaritmo natural é suado:

y=**ln**^{x} (ou x=e^y)

ATIVIDADES

Calcule o $\log_{10}52$ e o ln52

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

Podemos usar uma calculadora para obter o resultado:

log$_{10}$52 = **1,716**

Por outro lado **ln 52 = 3,951**

*anti*lo**g101,716=10^{1,716}=52**

*anti***ln 3,951 = e 3,951 =52**

Veja que os dois valores são diferentes, mas só mudamos a base.

Em geral, você pode converter a base 10 para a base e e vice-versa, através da igualdade:

$\ln x = (2{,}302585)\log_{10} x$

Aqui estão algumas propriedades úteis sobre os logaritmos:

$$\left.\begin{array}{l} \log(ab) = \log a + \log b \\ \log(a/b) = \log a - \log b \\ \log(a^n) = n \log a \end{array}\right\} \text{Qualquer base}$$

$\ln e = 1$

$\ln e^a = a$

FATORAÇÃO

Em matemática, *fatoração* de um número é o problema de se encontrar todos os divisores de um número inteiro. Lembrou?

A fatoração de um polinômio consiste em transformá-lo em um produto de polinômios de graus menores, ou mais simples. Essa fatoração é indispensável na resolução de equações do segundo grau ou maior.

Algumas regras úteis de fatoração são:

$ax + ay + az = a(x + y + z)$	fator comum em evidência
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$	trinômio quadrado perfeito
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$	diferença de dois quadrados
$a^3 + b^3 = (a + b)(a2 - ab + b^2)$	soma de dois cubos
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$	diferença de dois cubos

EQUAÇÕES E POTÊNCIAS

Em álgebra, é costume classificar as equações de acordo com o maior expoente (potência) das variáveis. Uma equação de pri meira ordem com uma variável pode ser escrita da seguinte forma:

$ax + b = 0$

Na qual a e b são constantes e x é a variável. Equações desse tipo têm sempre um *número real* como solução.

Já uma equação de segunda ordem (ou quadrática) com uma variável pode ser escrita da seguinte forma:

$ax^2 + bx + c = 0$

em que a, b e c são constantes (c não é a velocidade da luz) e referidos como os coeficientes da equação e x é a variável. Equações desse tipo podem ter um ou dois números reais como solução, ou não ter um número real como solução. Esta equação tem raízes dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se $b^2 \geq 4ac$ as raízes são reais.

Quando o expoente em uma equação com uma única variável cresce a solução torna-se cada vez mais complicada. Por exemplo, uma equação de ordem n pode ser escrita da seguinte forma:

$$a_1x^n + a_2x^{n-1} + a_3x^{n-2}... + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0$$

em que a^1, a^2,…, n^a são constantes e x é a variável. Parece bem difícil resolver essas equações. Porém atualmente os cientistas têm a ajuda de computadores para solucioná-las. Mas isso não significa que você não deva saber como proceder para solucioná-las, mesmo que isso demore. Pelo menos deve saber qual o procedimento para equações mais simples, como de ordem 3 ou 4. Como você saberia que o computador está trabalhando corretamente se não souber resolver um só cálculo? E ainda, os programas computacionais são feitos por seres humanos que sabem como resolver essas contas; você pode se transformar em um deles!

ATIVIDADES

A equação $(x - 4)(x + 5)(x - 1)$ é um exemplo de uma equação de:

a) primeira ordem.
b) segunda ordem.
c) terceira ordem.
d) quarta ordem.
e) nenhuma das alternativas anteriores.

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

O maior expoente de x será encontrado quando multiplicarmos todos os x na equação. Como cada um dos três x está elevado à primeira potência, temos x.x.x= x^{1+1+1}=x3. Portanto essa é uma equação de terceira ordem, resposta c.

EQUAÇÕES LINEARES

Uma equação linear tem a seguinte forma $y = mx = b$ na qual m e b são constantes. Essa equação é dita linear por que o gráfico de y versus x é uma linha reta, como mostrada na figura 1.

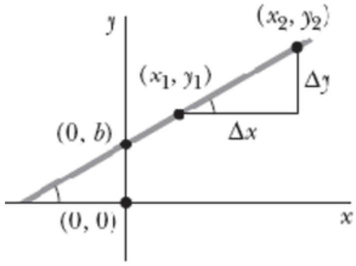
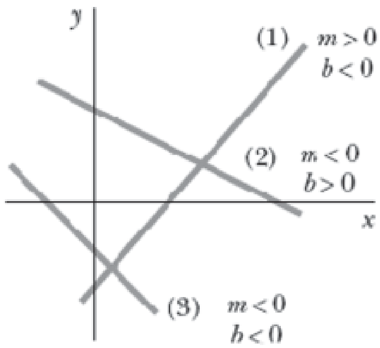


Figura 1 - A constante b representa o valor de y quando a linha intercepta o eixo y. A constante m corresponde à inclinação da reta.

Se quaisquer dois pontos na linha forem especificados pelas coordenadas (x_1,y_1) e (x_2,y_2), como mostrado na figura, então a inclinação da reta pode ser obtida pela expressão:

$$inclinação = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Note que tanto m quanto b podem ter valores positivos ou negativos. Se $m>0$, a linha tem uma inclinação positiva. Se $m<0$, a linha tem inclinação negativa.



RESOLVENDO UM CONJUNTO DE EQUAÇÕES LINEARES

Considere a equação $3x + 5y = 15$, a qual tem duas incógnitas, x e y. Tal equação não tem apenas uma solução. Por exemplo, ($x = 0$ e $y = 5$) ou ($x = 5$ e $y = 0$) são soluções dessa equação.

Se o problema tem duas incógnitas, para uma única solução possível são necessárias duas equações. Para resolver o sistema de equações envolvendo duas incógnitas, primeiro encontramos x em função de y em uma equação e substituímos essa expressão na segunda equação, que assim poderá ser solucionada, pois conterá apenas uma incógnita *y*. O valor encontrado pode então ser substituído na primeira equação com o objetivo de encontrar a solução para *x*.

Se um problema tiver *n* incógnitas, então deverá haver um conjunto com *n* equações para encontrar uma solução única para cada incógnita.

Um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas também pode ser resolvido por um método gráfico. Se as linhas correspondentes às duas equações forem desenhadas em um sistema de coordenadas convencional, a interseção das duas linhas representa a solução.

ATIVIDADES

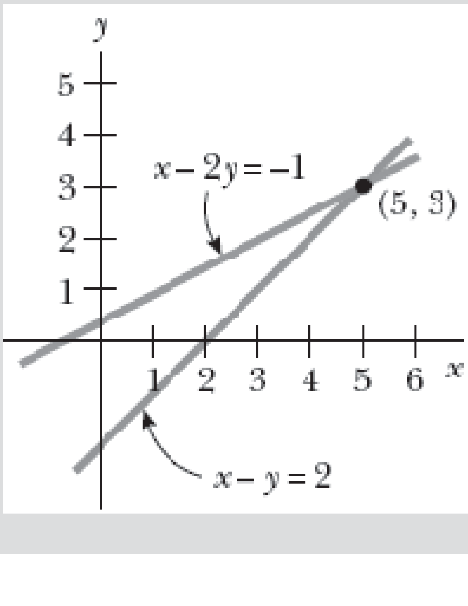
Considere as equações:

$$x - y = 2$$
$$x - 2y = -1$$

Desenhe ambas em um gráfico cartesiano e encontre a solução para o sistema.

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

Para desenhá-las devemos atribuir, na primeira equação, dois valores aleatórios a y e encontrar o x correspondente ou vice-versa. Colocamos os pontos (x1,y1) e (x2,y2) encontrados no gráfico xy. A linha reta que passa pelos dois pontos representa a equação dada. Repetimos o procedimento para a outra equação. O ponto onde elas se cruzam corresponde a solução do sistema.
As equações foram desenhadas em um gráfico, e sua interseção tem as coordenadas x = 5 e y = 3, que é a solução para as equações. Você também pode checar esta solução pela técnica analítica discutida anteriormente.



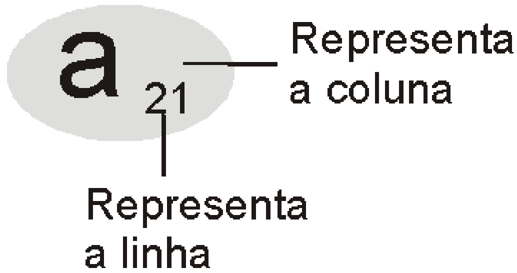
MATRIZES

Você sabe definir o que é uma matriz. Podemos dizer que uma matriz é uma tabela com *colunas* e *linhas*. Uma matriz com *m* linhas e *n* colunas é chamada de matriz *m* por *n* (escreve-se $m \times n$), e m e n são chamadas de *dimensões*, *tipo* ou *ordem* da matriz.

Para representar uma matriz devemos colocar as linhas e colunas entre parênteses, chaves ou entre duas barras duplas. A matriz a seguir é uma matriz de ordem 2×3, ou seja, com 2 linhas e três colunas, com elementos naturais:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -2 \\ 6 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Um elemento de uma matriz *A* que esteja na *i*-ésima linha e na *j*-ésima coluna é chamado de elemento *i,j* ou (*i,j*)-ésimo elemento de *A*. Ele é escrito como $a_{i,j}$ ou a[*i,j*].



Na matriz M do exemplo anterior, o elemento m_{21} é 6, ou seja, o número que aparece na segunda linha e na primeira coluna do quadro.

A transposta de uma matriz $A_{m \times n}$ é a matriz $A^t_{n \times m}$ em que $a^t_{ij} = a_{ji}$, ou seja, todos os *elementos* da primeira linha da matriz A, tornar-se-ão *elementos* da primeira coluna da matriz A^t, todos os elementos da segunda linha de A, tornar-se-ão *elementos* da segunda coluna de A^t, etc. Generalizando, todos os *elementos* da linha n de A, tornar-se-ão *elementos* da coluna *n* de A^t.

ATIVIDADES

Encontre a matriz transposta de B, sendo:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

Trocando linhas por colunas de B obtemos

$$B^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Uma matriz A é dita *simétrica* se A = A^t.

Uma matriz *quadrada* tem o mesmo número de linhas e colunas, isto é, é uma matriz nxn.

A matriz identidade In é a matriz $n \times n$ que tem todos os membros da diagonal principal iguais a 1 e todos os outros fora da diagonal igual a 0. Exemplo:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A única matriz identidade que não contém zero é a matriz identidade de ordem 1:

$$I_1 = [1]$$

DETERMINANTE

Matrizes e determinantes não são encontrados apenas no estudo da matemática, mas também na engenharia, informática, tabelas financeiras, dentre outras. O *determinante* é uma função que associa um número (um escalar) a uma matriz quadrada. Ele é um importante conceito matemático, usado, por exemplo, na solução de sistemas de equações lineares.

Representamos o determinante de uma matriz A através de:

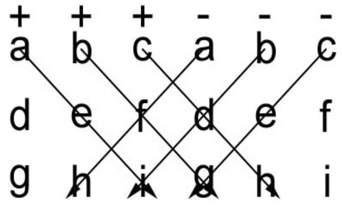
det (*A*) ou $|A|$

O determinante de uma matriz de segunda ordem é a diferença entre o produto dos termos da diagonal principal e o produto dos termos da diagonal secundária. Assim:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Para uma matriz de ordem 3, $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

o determinante pode ser encontrado repetindo-se as colunas após a terceira coluna. Marcamos 3 diagonais que descem. Os produtos obtidos nas diagonais que descem devem ter o sinal positivo. Marcamos 3 diagonais que sobem. Os produtos obtidos nas diagonais que sobem devem ter o sinal negativo. O determinante da matriz A é a soma dos seis produtos, conservados os sinais.



aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg

ATIVIDADES

Encontre o determinante da matriz A.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 10 \\ -1 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

O determinante de A é:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 10 \\ -1 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 10 \end{vmatrix} = (1.1.10)+(3.10.0)+(10.(-1).2)-(0.1.10)-(2.10.1)-(10.(-1).3)=0$$

Ou seja, *det* (A) = 0

OPERAÇÕES COM MATRIZES

Adição

Dadas as matrizes A e B do tipo m por n, sua soma A + B é a matriz mxn computada adicionando os elementos correspondentes: $(A + B)[i,j] = A[i, j] + B[i,j]$.

ATIVIDADES

Dadas duas matrizes A e B, com

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -2 \\ 6 & 9 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Calcule a soma de A+B

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

Então, a soma de A+B é feita da seguinte forma:

$$A + B = \begin{pmatrix} 5+0 & -5+3 & -2+1 \\ 6+2 & 9+0 & 0+7 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

MULTIPLICAÇÃO POR UM NÚMERO

Para multiplicar um número k qualquer por uma matriz $n \times m$ A, basta multiplicar cada valor a_{ij} de A por k. Assim, a matriz resultante B será também uma matriz $n \times m$, com bij = k.a_{ij}.

ATIVIDADES

Calcule 2B, sendo B a matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

$$2B = 2\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 & 2.3 & 2.1 \\ 2.2 & 2.0 & 2.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

Com isso, você pode concluir sobre a divisão de uma matriz por um número *k*: basta multiplicá-la pelo inverso desse número (1/*k*). Mas cuidado: enquanto a multiplicação entre um número e uma matriz pode ser dita "comutativa", o mesmo não vale para a divisão, pois não se pode dividir um número por uma matriz.

MULTIPLICAÇÃO DE DUAS MATRIZES

A multiplicação de duas matrizes é bem definida apenas se o número de colunas da matriz da esquerda é o mesmo número de linhas da matriz da direita. Se A é uma matriz mxn e B é uma matriz nxp, então seu produto AB é a matriz m por p (m linhas e p colunas) dada por:

$(AB)[i,j] = A[i,1]B[1,j] + A[i,2]B[2,j] + ... + A[i,n]B[n,j]$ para cada par i e j.

ATIVIDADES

Calcule AxB sendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

$$A \text{ x } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ x } \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \text{x } 3 + 0 \text{ x } 2 + 2 \text{ x } 1 & 1 \text{ x } 1 + 0 \text{ x } 1 + 2 \text{ x } 0 \\ -1 \text{ x } 3 + 3 \text{ x } 2 + 1 \text{ x } 1 & -1 \text{ x } 1 + 3 \text{ x } 1 + 1 \text{ x } 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

É importante notar que a comutatividade não é geralmente garantida; isto é, dadas duas matrizes *A* e *B*, geralmente $AB \neq BA$.

CONCLUSÃO

Mesmo que você já soubesse todas essas relações ma-temáticas, essa aula serviu para relembrá-lo de alguns detalhes que serão muito úteis para o decorrer de seu curso. Logaritmos, matrizes, equações, tudo isso forma a base ferramental da física e você deve estar completamente familiarizado com ela para dar prosseguimento ao seu curso sem dificuldades.

RESUMO

Equações - equação é uma expressão matemática; uma fórmula é uma equação usada com a proposta de encontrar certo valor ou resolver um problema prático. Qualquer que seja a operação realizada em um dos lados da igualdade, ela também deve ser realizada no outro lado.

Uma equação de ordem n com uma única variável pode ser escrita da seguinte forma:

$$a_1x^n + a_2x^{n-1} + a_3x^{n-2} ... + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0$$

em que a^1, a^2,…, n^a são constantes e x é a variável.

Regras de Potenciação -

$$x^n x^m = x^{n+m}$$

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

$$\left(x^n\right)^m = x^{nm}$$

Logaritmo - Se $x = a^y \quad y = \log_a x$ e $x = anti\log_a y$

$\ln x = (2{,}302585)\log_{10} x$

Fatoração - Algumas regras úteis:

$ax + ay + az = a(x + y + z)$ fator comum em evidência

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ trinômio quadrado perfeito

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ diferença de dois quadrados

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ soma de dois cubos

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ diferença de dois cubos

Forma de uma equação linear: $y = mx + b$ em que m e b são constantes. Em um gráfico cartesiano b representa o valor de y quando a linha intercepta o eixo y, e m corresponde à inclinação da reta.

Sejam dois pontos na reto especificados pelas coordenadas (x^1y^2) e ($x2y2$)

$$inclinação = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Sistema de duas equações lineares: se um problema tiver n incógnitas, então deverá haver um conjunto com *n* equações para encontrar uma solução única para cada incógnita. Em um sistema de coordenadas convencional com duas retas, sua interseção representa a solução.

Uma matriz é uma tabela com *colunas e linhas*. Se tiver m linhas e n colunas será chamada matriz $m \times n$.

Um elemento de uma matriz A que esteja na i-ésima linha e na j-ésima coluna é o elemento ai,j ou a[i,j].

A transposta de uma matriz $A_{m \times n}$ é a matriz Atn × m em que .

Uma matriz A é dita *simétrica* se A = At.

Uma matriz *quadrada* tem o mesmo número de linhas e colunas, isto é, é uma matriz nxn.

$a^t_{ij} = a_{ji}$

A matriz identidade I_n é a matriz $n \times n$ que tem todos os membros da diagonal principal iguais a 1 e todos os outros fora da diagonal igual a 0.

O determinante é uma função que associa um número (um escalar) a uma matriz quadrada.

Adição de matrizes A e B do tipo m por n:

$(A + B)[i,j] = A[i, j] + B[i,j]$.

Multiplicação de um número k por uma matriz $n \times m$ A: kA=B com $b_{ij} = k._{aij}$.

Multiplicação de duas matrizes: Seja A uma matriz mxn e B uma matriz nxp, AB é uma matriz mxp.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, faremos uma revisão de trigonometria e de números complexos para refrescar sua memória. Tchau.

REFERÊNCIAS

ALONSO, M. S. e Finn, E. J. **Física**. São Paulo: Ed. Edgard Blücher Editora, 1999.

GIBILISCO, S. **Physics Demystified.** New York: Mcgraw-Hill, 2002

<http://pt.wikipedia.org/> Consultado em 22/03/2008.

Portal de ensino de Física da USP, disponível em <http://efisica.if.usp.br/> consultado em 06/03/2008

SEARS, F. W.; Zemansky, M. W. **Física I – Mecânica**. 10 ed., Addison Wesley, 2003

TIPLER, P. A. **Física Ia**. Rio de Janeiro. 2 ed. Guanabara, 1982.