Aula 16

FORMALISMO MATEMÁTICO

META

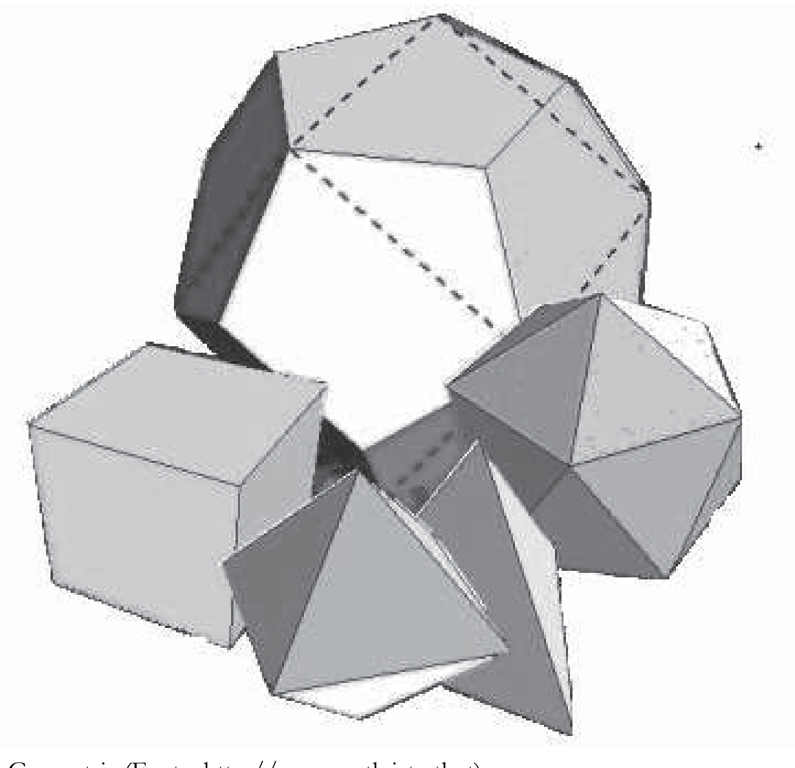
Suprir algumas deficiências sobre geometria, trigonometria e números complexos ensinadas em matemática no nível médio.

OBJETIVOS

Ao final desta aula, o aluno deverá:
relembrar conceitos sobre geometria e trigonometria;
discernir entre um número real e um imaginário;
representar de várias maneiras um número complexo;
realizar operações com números complexos

PRÉ-REQUISITOS

Você vai precisar de uma calculadora e de seus livros de matemática do ensino médio.



Geometria (Fonte: http://www.math.ist.utl.pt).

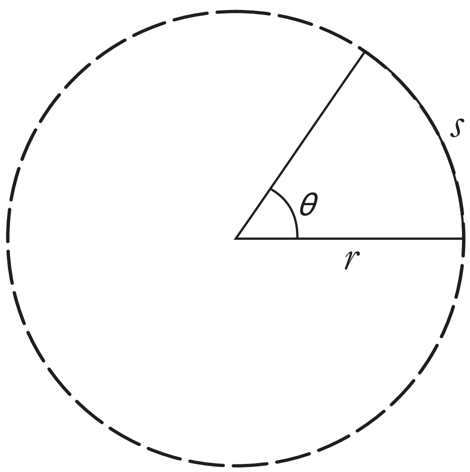
INTRODUÇÃO

Vamos continuar hoje com nossa revisão de matemática? Bem, ainda temos alguns pontos importantes para relembrar, tais como um pouco de trigonometria e números complexos. Você vai utilizar muito esses conhecimentos no seu curso de física. Tenha certeza de que entendeu bem esses conceitos para conseguir tirar o máximo de proveito em suas disciplinas futuras.

A distância d entre dois pontos com coordenadas (x_1,y_1) e (x_2,y_2) é dada por:

$$d=\sqrt{x_2-x_1 + (y_2-y_1)^2} \quad d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^1}$$

O comprimento de um arco s em um círculo é proporcional ao raio r para um valor fixo de *q* (em radianos)



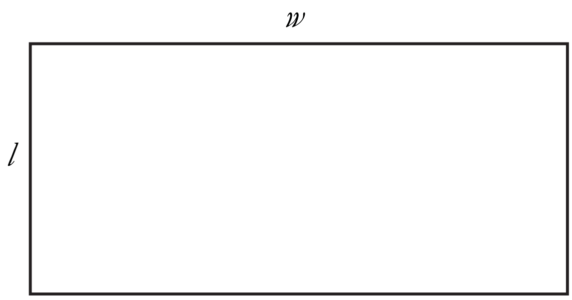
$$s = r\theta$$

$$\theta = \frac{s}{r}$$

ÁREAS

Você vai utilizar muitas vezes cálculos de áreas. Então vamos relembrar algumas fórmulas.

Retângulo com lados **l** e w Área= **l** w



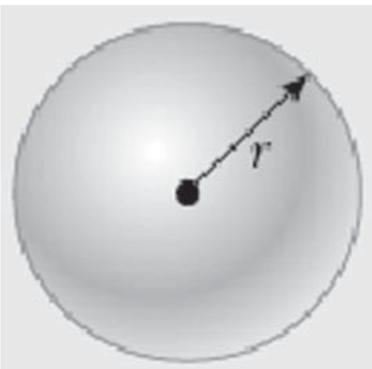
Círculo de raio r

Área da superfície = πr^2

Comprimento da circunferência = πr^2

Se você está cursando cálculo I, veja que derivando a área em relação á π encontramos o comprimento. $\frac{dA}{dr}$ **=2πr**

Esfera de raio r

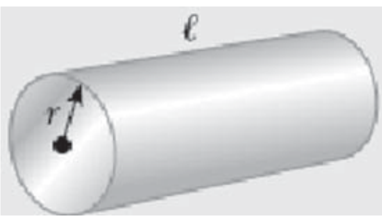


Área da superfície = $4\pi r^2$

Volume = $\frac{4}{3}\pi r^3/$

Derive o volume em relaçãoá r; você encontrará a área $\frac{dV}{dr} = \frac{4}{3}\pi r3$

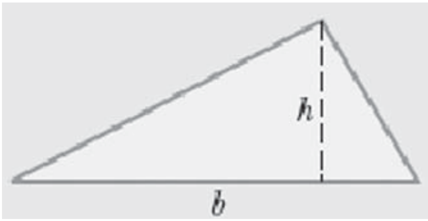
Cilindro de lado l e raio r



Área da superfície = $2\pi rl$

Volume = $\pi r^2 l$

Triângulo de base *b* e altura *h*   Área = ½ *bh*



ATIVIDADES

Calcule o raio de uma roda gigante, na qual uma pessoa sentada em uma de sua cadeiras em 6 voltas, percorre uma distância de 66 metros.

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

Sabemos que o comprimento da circunferência é $2\pi r$. Se em 6 voltas ela percorreu 66 m, em uma volta, o que corresponde ao comprimento da circunferência, percorrerá $\frac{66}{6} = 11 = 2\pi r$

Então, agora podemos encontrar o raio:

$$2\pi r = 11$$

$$r = \frac{11}{2\pi} = 5{,}5\pi^{-1} m$$

EQUAÇÕES DAS LINHAS

A equação de uma linha reta, como já vimos na aula passada é:

Em que *b* corresponde ao ponto onde a reta intercepta o eixo *y* e *m* é a inclinação da reta.

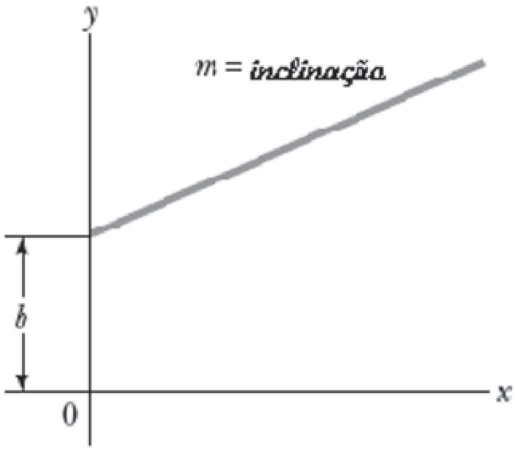
$$y = mx + b$$

A equação de um círculo de raio r centrado na origem é:

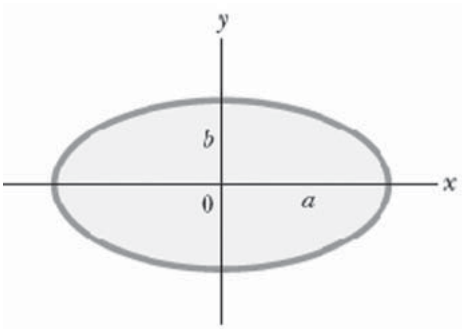
$$x^2 + y^2 = R^2$$

Já a equação de uma elipse com centro na origem é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

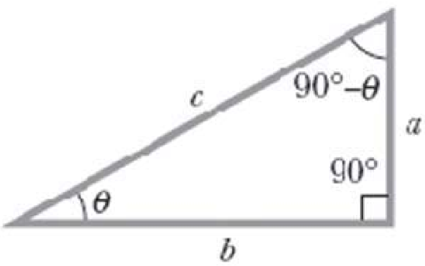


Onde a é o comprimento do semi-eixo maior e b é o comprimento do semi-eixo menor.



TRIGONOMETRIA

A porção da matemática baseada nas propriedades do triângulo retângulo é chamada de trigonometria. Por definição, o triângulo retângulo é aquele que contém um ângulo de 90º, denominado de ângulo reto. Considere agora, um triângulo retângulo com lado a oposto ao ângulo o e lado b adjacente ao ângulo o, e finalmente c a hipotenusa do triângulo. As três funções trigonométricas básicas são:



$$sen\theta = \frac{a}{c}$$

$$\cos\theta = \frac{b}{c}$$

$$tg\theta = \frac{a}{b}$$

O teorema de Pitágoras dá a relação entre os lados de um triângulo retângulo

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Com isso, segue a seguinte relação:

$$sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$tg\theta = \frac{sen\theta}{\cos\theta}$$

As funções secante, cossecante e cotangente são definidas como:

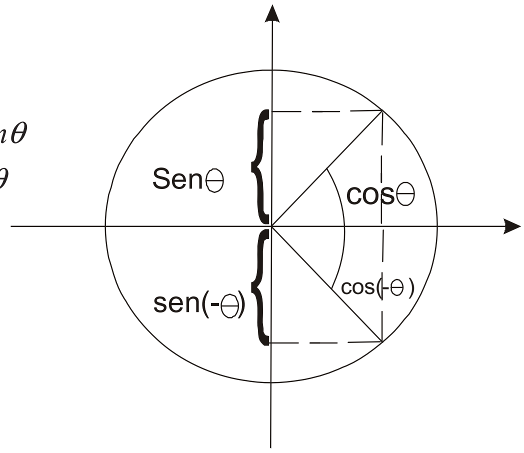
$$\sec\theta \equiv \frac{1}{\cos\theta} \quad \cos\sec\theta \equiv \frac{1}{sen\,\theta} \quad \cot g\theta \equiv \frac{1}{tg\theta}$$

Algumas propriedades trigonométricas são

$$sen(-\theta) = -sen\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$tg(-\theta) = -tg\theta$$



Bem, vamos resumir as identidades trigonométricas que você vai utilizar bastante durante seu curso de física.

1. $sen^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $1 + tg^2 x = \sec^2 x$
3. $1 + cotg^2 x = cosec^2 x$
4. $sen^2 x = \dfrac{1 - \cos^2 x}{2}$
5. $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos^2 x}{2}$
6. $sen\ 2x = 2\ sen\ x \cos x$
7. $2\ sen\ x \cos y = sen(x-y) + sen(x+y)$
8. $2\ sen\ x\ sen\ y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$
9. $2 \cos x \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$
10. $1 \pm sen x = 1 \pm \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Pra finalizar essa parte, as seguintes relações aplicam-se a qualquer triângulo, como mostrado na figura:

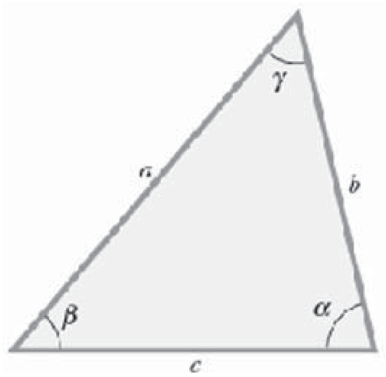
$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Lei dos cossenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Lei dos senos:

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma}$$

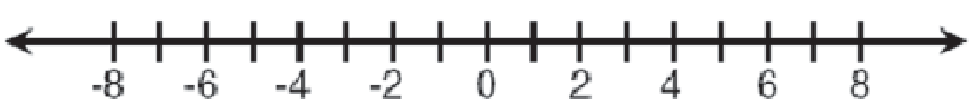


Atenção: Aqui fica difícil colocar muitas atividades com exercícios de geometria e trigonometria para suprir suas necessidades de revisão. Mas você pode resolver outros exercícios propostos em seus livros do ensino médio. Você também pode encontrar vários exemplos de exercícios na internet. Entre no site: www.google.com.br e faça uma busca por exercícios de geometria plana. Lá irão surgir diversos deles. Tente resolver alguns para verificar se você está "afiado" no assunto mesmo.

NÚMEROS REAIS

Um número real pode ser definido informalmente como qualquer número que aparece em uma linha. (Para os matemáticos isso é uma simplificação, mas vamos fazê-la nessa aula).

Alguns exemplos de números reais incluem 0, 3, -7, 12,63,$\sqrt{2}$ e π



Se você está pensando então o que um número não real significa, considere $\sqrt{-1}$. Qual número real que multiplicado por ele mesmo da -1?

É, não existe tal número. Todos os números positivos ou negativos quando elevados ao quadrado produzem um valor positivo e o quadrado de zero é igual à zero. Mas, então, se existe esta raiz ela está em algum outro lugar que não pode ser representado por um ponto em uma reta.

Então devemos relembrar algumas propriedades dos números "não reais" chamados de *números imaginários*.

NÚMEROS IMAGINÁRIOS

Matemáticos simbolizam a raiz quadrada de -1, chamada de unidade imaginária, usando a letra minúscula i. Em engenharia e física, é comum a troca da letra i pela letra j, devido ao freqüente uso da primeira como indicação de corrente elétrica.

$i = \sqrt{-1}$ **Isso conduz a i2 = -1.**
Também devemos lembrar que i0 = 1

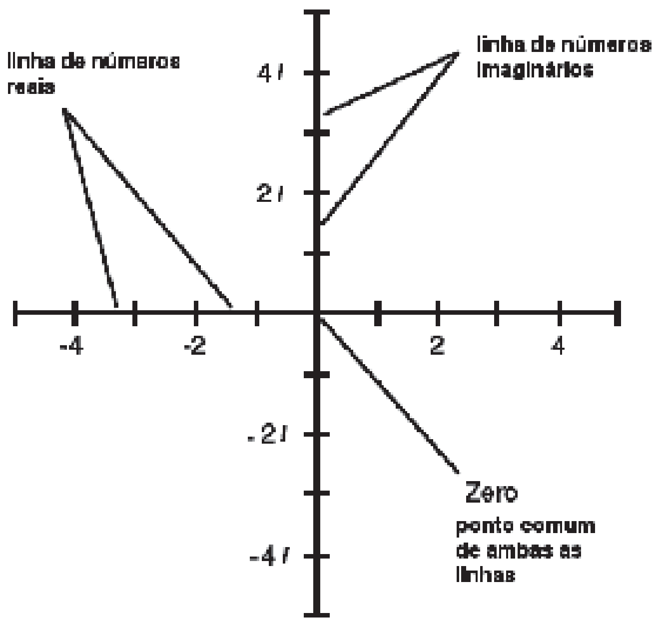
Qualquer número imaginário pode ser obtido multiplicando i por algum número real q. Alguns exemplos de números imaginários são 3i, -7i.

Se - r < 0, então as raízes quadradas de - r são:

$$i\sqrt{r} \text{ e } -i\sqrt{r}$$

Um conjunto de números imaginários pode ser representado ao longo de uma reta, como no caso dos números reais. Essas duas retas são como irmãos gêmeos idênticos, que embora parecidos, são independentes. O plano determinado por esses dois eixos chama-se plano complexo. Essas duas retas têm um ponto em comum (o zero):

0i=0



ATIVIDADES

Diga se os números são reais ou imaginários:

a) -4
b) $\sqrt{-9}$
c) $\sqrt{9}$

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

a) -4 - Esse é um número real, afinal ele pode ser definido como qualquer número que aparece em uma linha.
b) Nenhum número real multiplicado por ele mesmo da -9, portanto esse é um número imaginário.
c) Aqui o número 3 multiplicado por ele mesmo gera o número 9, portanto esse é um número real.

NÚMEROS COMPLEXOS

Um número complexo consiste da soma de um número real e um número imaginário e é constituído por duas componentes: a parte real e a *parte imaginária*.

Um número complexo pode ser representado através de várias maneiras, dentre as quais, as mais usuais, são a forma retangular e a forma polar.

Forma retangular (cartesiana):

A formula geral de um número complexo z é:

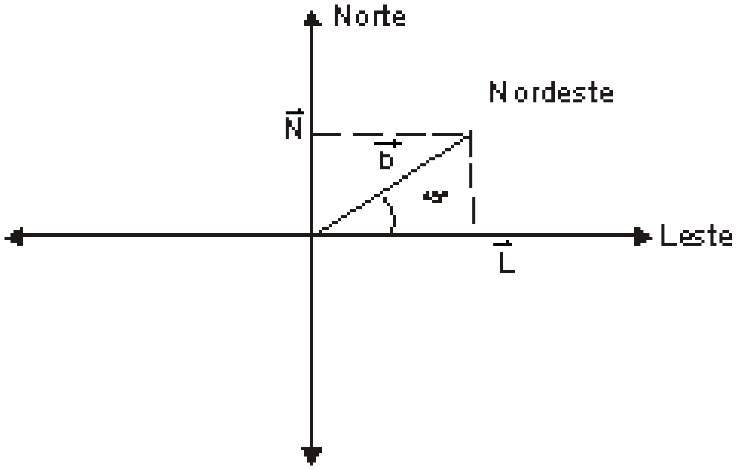
$$z= a+ib$$

onde a e b são números reais. Nesta forma, a é a parte real e ib é chamada parte imaginária do número complexo.

Os cientistas denotam o conjunto de números complexos colocando dois eixos para representá-lo: um para a parte real e o outro para a parte imaginária. O resultado é um plano de coordenadas retangulares. Cada ponto no plano corresponde a um único número complexo; cada número complexo corresponde também a apenas um único ponto no plano.

Um número real, como -9, pode ser considerado como um número complexo com parte imaginária 0. Um número como 12i, tem parte real 0, e por isso chama-se número imaginário puro.

Para que dois números complexos sejam iguais, suas partes reais e imaginárias devem ser iguais.



MÓDULO DE UM NÚMERO COMPLEXO

O módulo (ou valor absoluto) do número complexo a + bi pode ser comparado com a distância do ponto a + bi à origem no plano complexo. Portanto, módulo do complexo z = a + bi é:

FORMA POLAR (EXPONENCIAL) OU TRIGONOMÉTRICA

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

A representação polar de um número complexo surgiu da visualização gráfica do mesmo no plano em que se tem representada a parte real no eixo das abscissas e a parte imaginária no eixo das ordenadas. Tal representação, em parte, ajudou na aceitação dos números complexos por parte da comunidade matemática da época.

Nesse caso, a formula geral de um número complexo não nulo pode ser representada pela sua forma polar:

$$z = |z| \cos\theta + i sen\theta$$

em que q é o argumento (ângulo formado entre o segmento Oz e o eixo real) do número complexo z.

ATIVIDADES

Passe o número complexo z=i8 para a forma trigonométrica

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

Encontramos primeiro o módulo de z:

$$|z| = \sqrt{0^2 + 8^2} = \sqrt{64} = 8$$

Então vamos encontrar o argumento:

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{0}{8} = 0$$

$$sen\theta = \frac{b}{|z|} = \frac{8}{8} = 1 \quad \text{portanto} \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

Passando para a forma trigonométrica temos:

$$z = |z| \cos\theta + isen\theta$$

$$z = 8\left(\cos\frac{\pi}{2}\theta + isen\frac{\pi}{2}\right)$$

Existe ainda uma importantíssima relação matemática, atribuída a Euler (lê-se "óiler"), garantindo que para todo número complexo z e também para todo número real z que:

$e^{iz} = \cos(z) + i \text{ sen } (z)$

Essa relação, normalmente é demonstrada em um curso de Cálculo Diferencial, e provavelmente você verá isso por lá.

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Adição

Para adicionarmos dois números complexos, adicionamos as partes reais e as partes imaginárias separadamnete.

(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i

ATIVIDADES

Faça a soma: (3 + *i*4) + .(7 - *i*8)

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

Adicionado a parte real de ambos os números e separadamente adicionando as partes imaginárias temos:

$(3 + 4i) + (7 - i8) = (3 + 7) + (4 - 8)\,i$

$= 10 - i4$

Portanto (3 + *i*4) + .(7 - *i*8) = 10 -4*i*

Se você usar a representação de Euler dos números complexos A e B:

$A = e^{ia} = \cos(a) + i\,\text{sen}(a)$

$B = eib = \cos(b) + i\,\text{sen}(b)$

onde a é o argumento de A, e *b* é o argumento de B. Então:

$e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i\text{sen}(a+b)$

Por outro lado

$e^{i(a+b)} = e^{ia} \,.\, e^{ib} = [\cos(a) + i\text{sen}(a)]\,[\cos(b) + i\text{sen}(b)]$

e desse modo

$ei(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \text{sen}(a)\text{sen}(b) + i\,[\cos(a)\text{sen}(b) + \cos(b)\text{sen}(a)]$

SUBTRAÇÃO

Para subtrairmos dois números complexos, subtraímos as partes reais e as partes imaginárias separademente.

$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

ATIVIDADES

Subtraia (3 + *i*4) - (7 - *i*8)

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

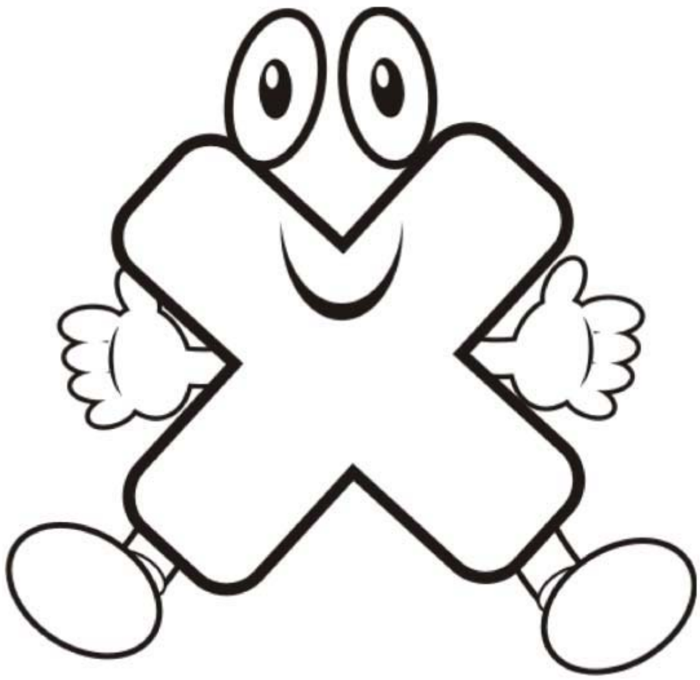
$(3 + 4i) - (7 - i8) = (3 - 7) + (4 + 8)\,i = -4 + i12$

Portanto (3 + *i*4) - (7 - *i*8) = -4 + *i*12

MULTIPLICAÇÃO

Para multiplicamos números complexos fazemos da mesma maneira como multiplicamos binômios (lembre-se de usar i2 = - 1). Isto é:

(a + bi) . (c - di) = (ac + bd) + (ad + bc)i



Multiplicação (Fonte: http://farm2.static.flickr.com).

ATIVIDADES

Multiplique (2+*i*3).(3-*i*4)

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

(2+3i).(3-4i)

= 6 – 8i + 9i – 12i2
= 6 + i – 12 . (-1)
= 6 + i + 12
= 18 + i

Portanto (2+*i*3).(3-*i*4) = 18 + *i*

Para multiplicar dois números complexos em suas formas trigonométricas, devemos multiplicar os seus módulos e somar os seus argumentos. Isto é, da multiplicação de dois números complexos z_1 e z_2 na forma polar:

$$z_1 = |z_1|(\cos(\theta_1) + i sen(\theta_1))$$

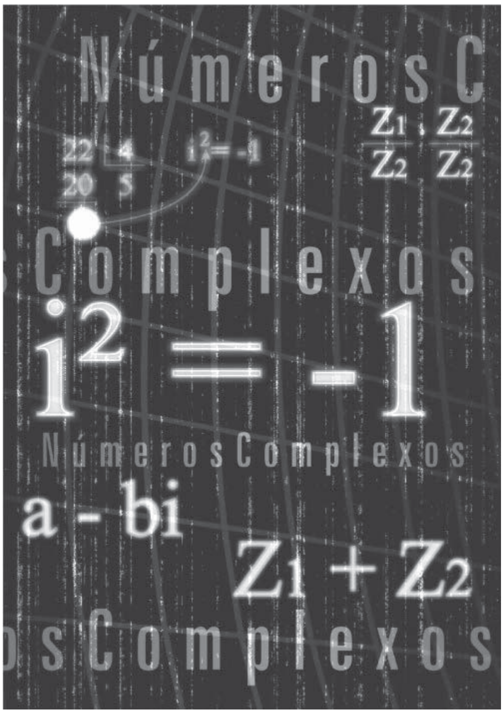
DIVISÃO

Divisão de números complexos é semelhante à racionalização do denominador de uma fração com radicais. Para isso, introduziremos inicialmente o conceito de conjugado de um número complexo.

Os números complexos (a + bi) e (a – bi) são chamados *complexos conjugados*. Isto é, para um número complexo z, com z = a + bi seu complexo conjugado é o número ≡ = a - bi

Exemplos:
O conjugado de z = 2 + 3i é = 2 - 3i
O conjugado de z = 5i é = - 5i
O conjugado de z = 10 é = 10

Agora então podemos definir a divisão dos números complexos. Para realizarmos a divisão de dois números complexos (z_1 e z_2) multiplicamos o numerador (z_1) e o denominador (z_2) pelo complexo conjugado do denominador ($\overline{z_2}$).



Números complexo (Fonte: http://www.jovenscriativos.com.br).

ATIVIDADES

Faça a divisão de $\dfrac{3-i}{2+i}$

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADE

Precisamos multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador para obter um número real no denominador. Então

$$\frac{3-1}{2+1} = \frac{(3-i).(2-i)}{(2+i).(2-i)}$$

$$\frac{6-3i-2i+i^2}{4-i^2}$$

$$\frac{6-5i-1}{4-1}$$

$$\frac{5-5i}{5}$$

$$\frac{3-i}{2+1} = 1+i$$

Portanto

Na forma polar, a divisão de dois números complexos z1 e z2, com:

é igual a:

$$z_1 = |z_1|\cos(\theta_1) + isen(\theta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = |z_2|\cos(\theta_2) + isen(\theta_2)$$

é igual a:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2)$$

SUGESTÕES PARA SOLUÇÕES DE PROBLEMAS

Ser um físico significa se tornar capaz de observar a natureza, definir um problema e buscar a solução para ele. Então aqui vão algumas sugestões para você "driblar" as dificuldades em solucionar os problemas.

Em primeiro lugar, leia cuidadosamente o problema, pois a dificuldade mais comum é não compreender o que está escrito. Faça um teste, leia o texto e imagine-se explicando o problema para um amigo. Se você compreendeu será capaz de explicar.

Analise se compreendeu tudo o que foi pedido. Escreva separadamente os dados fornecidos com as respectivas unidades. Tente compreender a relação existente entre as incógnitas e os dados.

Também quando for realizar os cálculos, tome cuidado com as unidades. Certifique-se de que está usando um conjunto consistente de unidades ao fazer as substituições numéricas nas equações. Isto é, padronize as unidades em um mesmo sistema para não cometer erros bobos, como o de misturar km com milhas. Se precisar faça as transformações necessárias nas unidades. Você não precisa decorar todos os fatores de conversão. A Internet é uma grande fonte de informação.

Depois de obter sua resposta observe-a e pergunte-se se ela faz sentido: Será que as unidades são apropriadas? O valor não parece grande ou pequeno demais? O sinal está correto? Se algo lhe parecer errado analise onde pode estar o erro: na fórmula errada ou nas suas contas?

Muitas respostas de problemas terão sinal negativo. Interprete corretamente o sinal. Por exemplo, se você considerar o eixo na direção de um corpo em queda livre (vertical) com o sentido para cima, então o movimento de queda terá sinal negativo.

Em 1928, o físico P. A. M. Dirac encontrou uma raiz negativa inesperada para uma das complicadas equações com que trabalhava. Esse resultado conduziu a previsão da existência do pósitron, a anti-partícula do elétron, e que veio a ser comprovada experimentalmente anos depois.

Às vezes você pode encontrar uma resposta que não foi prevista. Se você conferiu seus dados e seu procedimento e tudo parece correto, não abandone sua resposta de imediato. Tente compreender seu significado físico. Por exemplo, mesmo se o tempo deve ter um valor positivo, um resultado negativo pode ter uma interpretação física correta: o evento pode ter ocorrido antes do ponto de referência definido como instante inicial.

Em 1928, o físico P. A. M. Dirac encontrou uma raiz negativa inesperada para uma das complicadas equações com que trabalhava. Esse resultado conduziu a previsão da existência do pósitron, a anti-partícula do elétron, e que veio a ser comprovada experimentalmente anos depois.

CONCLUSÃO

Na aula de hoje revimos muitas das relações geométricas e trigonométricas que foram lecionadas durante o ensino médio. Também discutimos como representar um número complexo e como realizar operações com ele. Talvez essas sejam algumas das partes consideradas mais difíceis para os alunos do ensino médio, quando as vêem pela primeira vez. Mas esse provavelmente não é o seu caso, e, portanto elas devem já estar claras em sua cabeça. Caso seja a primeira vez que você viu algum desses assuntos, reforce seu conhecimento em livros do ensino médio.

Em geral, a aula de hoje serviu para que você apenas reforçasse suas lembranças sobre esses assuntos e espero que você tenha alcançado esse objetivo.

Essa aula e a aula anterior apresentaram um pequeno resumo da matemática básica que você irá aplicar no seu dia-a-dia na física. Mas nos seus cursos de cálculo você está aprendendo e irá aprender uma matemática muito mais avançada, porém jamais se esqueça dessas ferramentas básicas.

RESUMO

De geometria e trigonometria você deve lembrar:

A distância entre dois pontos com coordenadas (x_1,y_1) e (x_2,y_2)

$$d = \sqrt{(x_2 - x_4)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

O comprimento de um arco s em um círculo: $s = r\theta$

Retângulo com lados l e *w* Área= l *w*

Círculo de raio *r* Área da superfície = πr^2

Comprimento da circunferência = $2\pi r$

Esfera de raio *r* Área da superfície = $4\pi^2$

Volume = $4\pi r^3/3$

Cilindro de lado l e raio *r* Área da superfície = $2\pi rl$

Volume = $\pi r^2 l$

Triângulo de base *b* e altura *h* Área = ½

Equação da reta: $y = mx + b$

Equação do círculo de raio r centrado na origem: $x^2 + y^2 = R^2$

Equação de uma elipse com centro na origem: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{a}{c}$$

No triângulo retângulo $c^2 = a^2 = b^2$

$$\cos\theta = \frac{b}{c}$$

$$\tan\theta = \frac{a}{b}$$

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \quad \cos\sec\theta \equiv \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \quad \sec\theta \equiv \frac{1}{\cos\theta} \quad \cot an\,\theta \equiv \frac{1}{\tan\theta}$$

Identidades Trigonométricas

1. $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

2. $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$.

3. $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$.

4. $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

5. $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

6. $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$.

7. $\operatorname{sen} x \ \cos y = \operatorname{sen}(x - y) + sem(x + y)$

8. $2 \operatorname{sen} x \ \operatorname{sen} y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$

9. $2 \cos x \ \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$

10. $1 \pm \operatorname{sen} x = 1 \pm \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Lei dos cossenos
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Lei dos senos: $\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta} = \frac{c}{sen\,\gamma}$

De números complexos você deve saber: $i^2 = -1$

Conjugado de número complexo $z = a + bi \Leftrightarrow \bar{z} = a - bi$

Divisão de números complexos $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 . \overline{z_2}}{z_2 . \overline{z_2}}$

Módulo de um número complexo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Argumento de um número complexo $\cos\theta = \dfrac{a}{|z|}$ e $sen\theta = \dfrac{b}{|z|}$

Forma trigonométrica ou polar: $z = |z|(\cos\theta + isen\theta)$

Multiplicação na forma trigonométrica

$$z_1 . z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2))$$

Divisão na forma trigonométrica

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2))$$

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula vamos iniciar o estudo sobre os vetores, que é extremamente útil em física. Você já sabe o que é um vetor?

Bom! Então vai relembrar alguns dados.

Não sabe? Então na aula que vem vai descobrir que é bem fácil! Até lá.

REFERÊNCIAS

ALONSO, M. S.; Finn, E. J. **Física.** Edgard Blücher. São Paulo Editora, 1999.

GIBILISCO, S. **Physics Demystified**, Mcgraw-Hill, New York, 2002

<http://pt.wikipedia.org/> Consultado em 22/03/2008.

Portal de ensino de Física da USP. Disponível em <http://efisica.if.usp.br/> consultado em 06/03/2008.

SEARS, F. W. e Zemansky, M. W., **Física I - Mecânica**, 10 ed. Addison Wesley, 2003.

TIPLER, P.A. **Física Ia**, 2 ed., Guanabara, 1982.