Aula 5

A derivada

Objetivos

- Estudar o conceito de derivada de uma função.
- Calcular a derivada de algumas funções elementares.
- Estudar as regras de derivação.

Nesta aula introduziremos os conceitos básicos relacionados com a *derivada*, os quais, de maneira introdutória, foram esboçados na aula 2.

1 Noções preliminares

Consideremos uma função $y = f(x)$ definida em um dado intervalo I, e escolhamos um ponto x_0 que não seja uma de suas extremidades. Tomemos um número positivo h tal que $x_0 + h$ ainda esteja em I, de modo que podemos calcular o valor de f em $x_0 + h$ e assim formar o chamado *quociente de Newton*

$$q(x) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\,.$$

Se

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existir, dir-se-á que f é *derivável à direita* em x_0 e o limite acima será chamado *derivada lateral à direita de* f em x_0, sendo designada por $f'_+(x_0)$. Assim,

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Quando o acréscimo h é negativo e se $x_0 + h$ ainda estiver em I, constrói-se o quociente de Newton, como feito acima, e caso o limite

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

existir, diremos que f é *derivável à esquerda* em x_0, sendo tal limite chamado *derivada lateral à esquerda* de f em x_0 e designado por $f'_-(x_0)$, ou seja,

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} .$$

Caso as derivadas laterais de f em x_0 existam e sejam iguais, diremos que f é *derivável* neste ponto, sendo o limite acima chamado *derivada* de f em x_0, e designado por $f'(x_0)$. Portanto,

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} .$$

A derivada também poderá ser apresentada da seguinte maneira. Façamos $x_0 + h = x$ e observemos que $h \to 0$ se, e somente se, $x \to x_0$, de modo que

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} .$$

O leitor também encontrará, ao longo dos seus estudos, as seguintes notações para a derivada da função $y = f(x)$ no ponto x_0:

$$\frac{df}{dx}(x_0), \quad \frac{dy}{dx}(x_0), \quad y'(x_0)$$

ou, quando não houver necessidade de enfatizar o ponto no qual estamos calculando a derivada, escreveremos simplesmente

A notação $\frac{dy}{dx}$ é devida ao matemático alemão Leibniz (ver aula 1 e apêndice da Aula 3), por isso é conhecida como a *notação de Leibniz para derivada.*

$$\frac{df}{dx}, \quad \frac{dy}{dx}, \quad y'.$$

Em algumas situações pode-se apenas falar em derivada lateral à direita ou à esquerda. É o que acontece quando a função estiver definida em intervalos tais como $[a, b], [a, b), [a, \infty), (a, b], (-\infty, b]$. Nos três primeiros casos pode-se apenas calcular em a a derivada lateral à direita e nos primeiro, quarto e quinto casos é possível somente calcular em b a derivada lateral à esquerda.

Neste ponto, o leitor deverá reportar-se à aula 2 e verificar que, ao definirmos derivada, fizemos, essencialmente, uma mera repetição daquilo que foi a motivação da noção de limite por meio do traçado de retas tangentes e velocidade instantânea. Dessa forma, f é derivável em um certo ponto x_0 se pudermos traçar uma tangente não-vertical ao gráfico de f, no ponto $(x_0, f(x_0))$ e temos que $f'(x_0)$ representa a inclinação de tal reta tangente, ou seja,

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\theta$$

em que θ é o ângulo formado pelo eixo x com a reta tangente, no sentido anti-horário. Deste modo, a derivada de uma função mede, em cada ponto, a sua taxa de crescimento ou de decrescimento, ou seja, quanto maior for a derivada, maior será o crescimento da função. Interprete as figuras 5.1(a), (b) e (c) esboçadas a seguir.

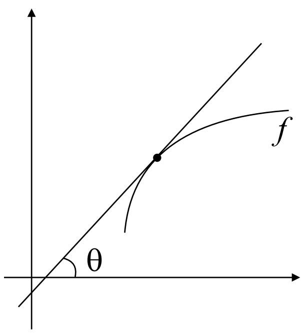

Fig. 5.1(a)

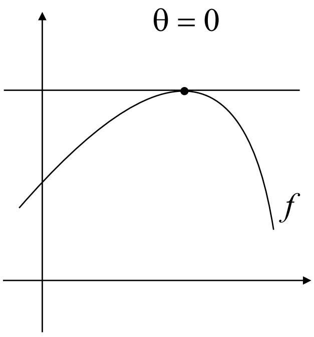

Fig. 5.1(b)

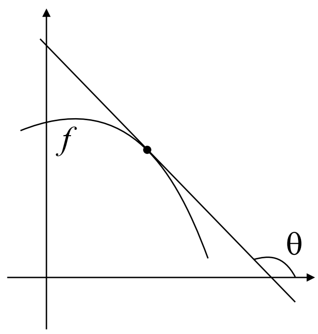

Fig. 5.1(c)

Para tornar o conceito mais claro, consideremos a situação descrita no seguinte exemplo.

Exemplo 37. Suponhamos que uma pessoa esteja a caminhar sobre uma montanha cujo perfil está esboçado na figura 5.2 e que ele seja o gráfico de uma função.

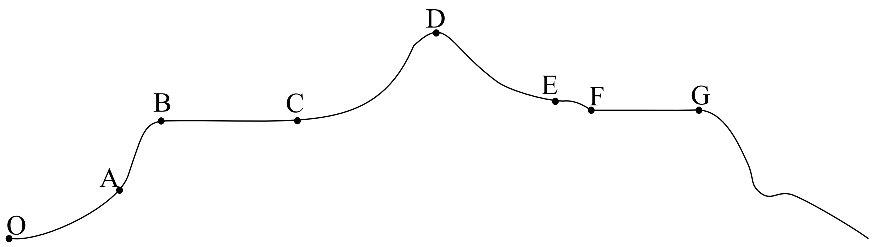

Fig. 5.2

No trecho $\widetilde{OA}$ a pessoa subirá sem muito esforço, pois nesta parte a subida não é muito íngreme, ou seja, a derivada é positiva mas não é muito grande. A partir do ponto A, e até o ponto B, o montanista será submetido a um esforço maior pois a declividade aumentou, isto é, a derivada tornou-se maior. Já em BC a caminhada efetuar-se-á horizontalmente e assim a derivada será zero nestes pontos em virtude de a inclinação ser nula. De C até D o esforço recomeçará a ser grande em virtude de a inclinação voltar a aumentar. No ponto D o atleta atingiu o pico da montanha, isto é, nesta altura ele momentaneamente descansará, pois a inclinação - e conseqüentemente a derivada - será zero.

A partir daí ele começará a descer pelo lado oposto da montanha. De D até E a descida será suave e assim teremos derivadas negativas cujos módulos serão pequenos. Em F inicia-se novamente um platô que se estende até G, no qual a derivada novamente se anula. Prosseguindo assim, poderemos analisar as situações que ocorrem nos outros trechos.

Vejamos mais alguns exemplos nos quais é possível calcular explicitamente as derivadas.

Exemplo 38. Se $f(x) = C$, para todo x pertencente ao domínio de f, em que C é uma constante, então sua derivada será sempre igual a zero pois não há variação na função. Vejamos isso usando a definição:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{C - C}{h} = 0.$$

Como o quociente de Newton é sempre nulo, segue-se que $f'(x) = 0$ sempre que a função f for constante, pois a derivada mede a taxa de variação.

Exemplo 39. Consideremos a função $f(x) = ax + b$ em que a, b são constantes. Como é bem sabido, tal função descreve retas não-verticais cujas inclinações são determinadas pela constante a. Calculemos sua derivada. Para isto tomemos o seu quociente de Newton em um ponto x de $\mathbb{R}$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h} = \frac{ah}{h} = a.$$

Usando o fato de que limite de constante é a própria constante, obteremos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a$$

o que era de se esperar pois a reta possui inclinação (derivada) constante em todos os seus pontos.

Exemplo 40. Consideremos a função $f(x) = x^2$. Para calcular a sua derivada em um ponto qualquer x, procede-se de modo análogo ao desenvolvido na aula 2 e obteremos

$$f'(x) = 2x.$$

O procedimento feito no exemplo acima pode ser aplicado a qualquer função da forma $f(x) = x^n$ em que n é um número natural arbitrário.

Nesse caso deve-se usar a fórmula do *Binômio de Newton* para obter $f'(x) = nx^{n-1}$. Vejamos como proceder. Inicialmente, observemos que

$$f(x+h) = (x+h)^n = x^n + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} h^j x^{n-j}$$

em que $\binom{n}{j} = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$ são os coeficientes binomiais. Calculando o quociente de Newton

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = nx^{n-1} + \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} h^{j-1} x^{n-j}$$

e fazendo $h \to 0$ obtemos a fórmula desejada

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

para todo $n = 1, 2, \ldots$

Exemplo 41. Estudaremos, agora, a derivada da função $f(x) = \operatorname{sen} x$. Para isto, comecemos com o quociente de Newton

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \operatorname{sen} x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

em que na igualdade acima utilizamos uma identidade trigonométrica usual.

Usando os limites fundamentais relacionados com as funções sen e cos, introduzidos na aula 3, teremos

$$(\operatorname{sen})' x = \cos x$$

Por um procedimento análogo pode-se provar que

$$\cos' x = -\operatorname{sen} x$$

Vejamos agora um importante teorema que relaciona os conceitos de derivação e de continuidade de funções.

Teorema 6. *Toda função derivável é contínua.*

Demonstração. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável em um ponto x_0 pertencente ao intervalo I. Devemos mostrar que f é contínua em x_0, ou seja, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Observe que, dado $x \in I, x \neq x_0$, tem-se que $x = x_0 + h$ para algum $h \in \mathbb{R}$, de modo que $x \to x_0$ é equivalente a $h \to 0$. Lembremos, também, que f ser derivável significa que

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$

Assim,

$$f(x) = f(x) - f(x_0) + f(x_0) = \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)(x - x_0) + f(x_0)$$

e usando os fatos de que o limite da soma é a soma dos limites e o limite do produto é o produto dos limites, obtém-se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f'(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) + f(x_0) = f(x_0)$$

e isso mostra que f é contínua em x_0. □

Observação 5. A recíproca do Teorema 6, não é verdadeira, como mostra o exemplo a seguir. Seja $f(x) = |x|$ em que $|x|$ representa o módulo do número real x. Assim, a função f é dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0, \\ -x & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

Claramente f é contínua. No entanto, f não é derivável em 0. De fato, suponhamos, inicialmente, $h > 0$ e consideremos o quociente de Newton

$$\frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

e daí

$$f'_{+}(0) = 1$$

Supondo $h < 0$, teremos

$$\frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

donde

$$f'_{-}(0) = -1$$

Conclusão: f não é derivável em 0, pois as derivadas laterais de f em 0, mesmo existindo, são distintas.

2 Regras básicas de derivação

Pelos exemplos desenvolvidos até agora verifica-se que calcular a derivada de funções é algo trabalhoso e tedioso caso tenhamos que sempre usar a definição. Em vista disso, nesta lição, acrescentaremos algumas regras, além das vistas anteriormente, que serão indispensáveis para o desenvolvimento do Cálculo.

Regra 1. A derivada da soma é a soma das derivadas.

Para tornar mais precisa tal afirmação, sejam f e g duas funções, definidas em um mesmo domínio de modo que elas sejam deriváveis em um dado ponto x pertencente ao domínio comum de f e g. Observando que $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, o quociente de Newton da função soma é dado por

$$\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

e usando o fato de que o limite da soma é a soma dos limites teremos

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Regra 2. Sejam f uma função derivável em um certo ponto x de seu domínio e λ um número real. Então a função λf é derivável em x e sua derivada é dada por

$$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x).$$

Vejamos como isto é feito. O quociente de Newton de λf é escrito como

$$\frac{\lambda f(x+h)-\lambda f(x)}{h} = \lambda \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

e usando o fato de que o limite de uma constante vezes uma função é igual à constante vezes o limite da função, teremos a fórmula desejada.

Muito embora a derivada da soma seja a soma das derivadas, devemos enfatizar que a derivada do produto não é o produto das derivadas. Com efeito, como a função produto fg é definida por $(fg)(x) = f(x)\cdot g(x)$, determinaremos a derivada de fg.

Calculando o quociente de Newton da função fg teremos

$$\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

e vê-se facilmente que o procedimento não é tão direto como no caso da Regra 1. Executaremos um procedimento muito comum no Cálculo, ou seja, já que os quocientes de Newton de f e g não aparecem diretamente, deveremos usar de uma estratégia de modo que tais quocientes apareçam. Para isto, subtrairemos e adicionaremos o termo $f(x)g(x+h)$ no numerador da expressão acima e fazendo as devidas simplificações obteremos

$$\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

o que nos leva a

$$(f.g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

e assim temos a regra:

Regra 3. Se f e g são duas funções deriváveis em um certo ponto x, então a função produto $f \cdot g$ é derivável em x e sua derivada é dada por

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Regra 4. Se f e g são duas funções deriváveis em um certo ponto x e se $g(x) \neq 0$, então a função quociente $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ é derivável e sua derivada é dada por

$$F'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \frac{\dfrac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h}}{g(x+h)g(x)} \\
&= \frac{\dfrac{[f(x+h)g(x) - f(x)g(x)] - [f(x)g(x+h) - f(x)g(x)]}{h}}{g(x+h)g(x)} \\
&= \frac{\left[\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x)\right] - \left[f(x)\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]}{g(x+h)g(x)}
\end{aligned}$$

Considerando que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existe e é igual a $f'(x)$ e

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

também existe e é igual a $g'(x)$, teremos

$$F'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

O leitor atento deve ter observado que impusemos a hipótese de que $g(x) \neq 0$, mas usamos também o fato de que $g(x+h) \neq 0$, haja vista que ele aparece no denominador. Isto pode ser feito em virtude de que, sendo g derivável em x, g é contínua em x. Como conseqüência disso, e como $g(x) \neq 0$, temos que $g(x+h) \neq 0$, para todo h suficientemente pequeno.

Usemos as regras de derivação nos exemplos a seguir.

Exemplo 42. Calcule a derivada do polinômio

$$P(x) = x^2 + 3x + 2.$$

Solução. Observemos que a derivada da soma é a soma das derivadas, qualquer que seja o número de parcelas. Assim, a derivada de P é a soma da derivada de x^2, que é $2x$, de $3x$, que é 3 e da derivada de 2, que é zero. Portanto,

$$P'(x) = 2x + 3.$$

Exemplo 43. Calcule a derivada da função

$$f(x) = (\cos x)(x^3 + 2x^2 + 4x + 3).$$

Solução. Devemos usar a regra do produto. Assim,

$$f'(x) = (\cos' x)(x^3 + 2x^2 + 4x + 3) + (\cos x)(3x^2 + 4x + 4)$$

e usando $\cos' = \operatorname{sen}$ teremos

$$f'(x) = (\operatorname{sen} x)(x^3 + 2x^2 + 4x + 3) + (\cos x)(3x^2 + 4x + 4).$$

Exemplo 44. Calcule a derivada de

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2}\,.$$

Solução. Usaremos a regra do quociente. Portanto,

$$f'(x) = \frac{(x+1)'(x+2) - (x+1)(x+2)'}{(x+2)^2}$$

e daí

$$f'(x) = \frac{1(x+2) - (x+1)1}{(x+2)^2}\,,$$

ou seja,

$$f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}\,.$$

Exemplo 45. Calculemos a derivada da função tg x $= \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$. Usando a Regra do Quociente, obtemos

$$\operatorname{tg}' x = \frac{\operatorname{sen}' x \cos x - \operatorname{sen} x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

3 Derivadas de ordem superior

Seja $f(x)$ uma função derivável em um intervalo I, com derivada $f'(x)$, e suponhamos que $f'(x)$ seja também derivável em I. Então a função

$$\frac{df'}{dx}(x) = (f')'(x)$$

é chamada a *segunda derivada* de $f(x)$, escrita como $f''(x)$ ou $f^{(2)}(x)$. Analogamente, se $f''(x)$ for derivável em I, a função

$$\frac{df''}{dx}(x) = (f'')'(x)$$

é chamada a *terceira derivada* (ou derivada de ordem três) de $f(x)$, escrita como $f'''(x)$ ou $f^{(3)}(x)$. Mais geralmente, a derivada de ordem n de $f(x)$ (ou a n-*ésima derivada* de $f(x)$), designada por $f^{(n)}(x)$ é a função

$$\frac{df^{(n-1)}(x)}{dx} = (f^{(n-1)})'(x)$$

admitindo que a derivada $f^{(n-1)}(x)$ de ordem $n-1$ exista e seja derivável em I. Também escrevemos

$$f(x) = f^{(0)}(x)$$

isto é, $f(x)$ é a derivada de ordem zero de f.

É usual também a notação para $f^{(n)}(x)$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x)$$

ou, se $y = f(x)$, temos

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x), \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)\,, \ldots, \; y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x).$$

Exemplo 46. Se $y = x^4$, então

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(4x^3) = 12x^2,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}(12x^2) = 24x,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}(24x) = 24,$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{d}{dx}(24) = 0.$$

4 Outras regras de derivação

Na aula 1 introduzimos o conceito de função inversa. A próxima regra nos mostra como expressar a derivada da função inversa em termos da função original.

Teorema 7. *Seja f uma função inversível com inversa $g = f^{-1}$. Suponhamos que f seja derivável em x, com derivada $f'(x) \neq 0$, e suponhamos que g seja contínua em $y = f(x)$. Então g é derivável em y, com derivada*

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}\,.$$

Na notação de Leibniz a expressão da derivada da inversa toma as seguintes formas

$$\frac{dg}{dy}(y) = \frac{df^{-1}}{dy}(y) = \frac{1}{\dfrac{df}{dx}(x)}$$

ou mais concisamente

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}\,.$$

Daí

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy} = 1.$$

Exemplo 47. A função

$$y = f(x) = x^2$$

é injetiva, e derivável em qualquer intervalo da forma $[a, b]$, com $a \geq 0$. Na verdade sua imagem é o intervalo $[a^2, b^2]$. Observe, também, que f é crescente. Sua inversa é dada por

$$x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

estando definida no intervalo $[a^2, b^2]$ sendo aí contínua. Usemos o Teorema 1 para calcular a derivada de $\sqrt{y}$. Assim,

$$\frac{d}{dy}\sqrt{y} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Na aula 1 introduzimos o conceito de função composta. O próximo resultado nos permitirá calcular a derivada da composta de duas funções deriváveis.

Teorema 8. (Regra da Cadeia) *Sejam f e g duas funções tais que f é derivável em x e g é derivável em $f(x)$. Então a função composta $g \circ f$, dada por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ é derivável em x e sua derivada é dada por*

$$g \circ f(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Na notação de Leibniz a Regra da Cadeia toma a seguinte forma: fazendo $y = f(x)$ e $z = g(y)$ teremos

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Se tivermos a composição de três funções, digamos

$$F(x) = h(g(f(x)))$$

e se f for derivável em x, g for derivável em $f(x)$ e h for derivável em $g(f(x))$, a Regra da Cadeia assumirá a seguinte forma

$$F'(x) = h'(g(f(x)))g'(f(x))f'(x)$$

ou, usando a notação de Leibniz, tem-se

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

em que $y = f(x)$, $z = g(y)$ e $u = g(z)$.

Exemplo 48. Calculemos a derivada de

$$F(x) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{101}$$

Neste caso $g(y) = y^{101}$ e $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$. Portanto, $g'(y) = 101y^{100}$ e $f'(x) = -2x^{-3}$. Usando a Regra da Cadeia, obtemos

$$\begin{aligned} F'(x) &= (g \circ f)'(x) \\ &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \\ &= 101\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{100} \cdot (-2x^{-3}) \\ &= -\frac{202}{x^3}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{100}. \end{aligned}$$

Exemplo 49. Dada a função $y = f(x)$, calculemos a derivada de y^n. Usando a notação de Leibniz, teremos

$$\frac{dy^n}{dx} = \frac{dy^n}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = ny^{n-1} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Portanto, se quisermos calcular a derivada de $f(x) = (x^2 + 3x + 1)^{50}$, teremos

$$f'(x) = 50(x^2 + 3x + 1)^{49}(2x + 3).$$

5 Exercícios resolvidos

1. Mostre que
$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x^n} = -\frac{n}{x^{n+1}}$$
Solução. Usemos a regra do quociente. Dessa maneira,
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\frac{1}{x^n} &= \frac{x^n\frac{d}{dx}1 - 1\frac{d}{dx}x^n}{x^{2n}}\\ &= -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}}\\ &= -\frac{n}{x^{n+1}}\,.\end{aligned}$$

2. Calcule a derivada de $f(x) = \sqrt{x}$.
Solução. Usemos a definição. Para isso suporemos que $x > 0$. Assim,
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\,.$$
Multiplicando numerador e denominador do membro direito da expressão acima por $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$, obtemos
$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &= \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\end{aligned}$$
e daí
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\,.$$
Fazendo h tender a zero, obtemos
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

6 Exercícios propostos

1. Calcule as derivadas de:
(a) $x^4 + 3x^2 - 6$ (b) $2ax^3 - bx^2 + c$, a e b constantes (c) $x - \frac{1}{x}$
(d) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$

2. Calcule as derivadas de:

(a) $(x-a)(x-b)$

(b) $x(x-a)(x-b)$

(c) $(1+4x^2)(1+2x^2)$

(d) $(2x-1)(x^2-6x+3)$

3. Calcule as derivadas de:

   (a) $\dfrac{x-a}{x+a}$, a constante (b) $\dfrac{2x}{1-x^2}$ (c) $\dfrac{x^2-5x}{x^3+3}$ (d) $\dfrac{x^3+1}{x^2-x-2}$

4. A derivada de uma função racional é também uma função racional. Falso ou verdadeiro?

   Observação: Uma função racional é o quociente de dois polinômios:

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_N x^N}.$$

5. A n-ésima derivada de um polinômio de grau n é uma função constante não-nula. Falso ou verdadeiro.

6. Calcule as n primeiras derivadas da função $\dfrac{1}{x}$.

7. Dadas duas funções f e g, deriváveis até a ordem 3, calcular $(fg)'''$.

8. Seja $y = x(2x-1)^2(x+3)^3$. Encontre $y^{(6)}$ e $y^{(7)}$ com o mínimo de trabalho possível.

9. Calcule as derivadas de

   (a) $(x+1)(x+2)^2(x+3)^3$ (b) $\dfrac{(x+4)^2}{x+3}$ (c) $\dfrac{(2-x)(3-x)}{(1-x)^2}$

10. Calcule as derivadas de

    (a) $\sqrt{x^2+a^2}$, a constante (b) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ (c) $\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$, a constante

7 Respostas dos exercícios propostos

1. (a) $4x^3 + 6x$ (b) $6ax^2 - 2bx$ (c) $1 + \dfrac{1}{2x^2}$ (d) $-\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{4}{x^3} - \dfrac{9}{x^4}$

2. (a) $2x - a - b$
   (b) $3x^2 - 2(a+b)x + ab$
   (c) $32x^2 + 12x$
   (d) $6x^2 - 26x + 12$

3. a) $\dfrac{2a}{(x-a)^2}$ (b) $\dfrac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$ (c) $-\dfrac{x^4 - 10x^3 - 6x + 15}{(x+3)^2}$
   (d) $\dfrac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2}$

4. Verdadeiro.

5. Verdadeiro.

6. $(-1)^{n+1}\dfrac{n!}{x^{n+1}}$

7. $f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$

8. $y^{(6)} = 4$ e $y^{(7)} = 0$. Observe que $y = x(2x-1)^2(x+3)^3$ é um polinômio.

9. (a) $(x+2)^2(x+3)^3 + 2\,(x+1)(x+2)(x+3)^3 + 3\,(x+1)(x+2)^2(x+3)^2$
   (b) $\dfrac{(x+4)(x+2)}{(x+3)^2}$ (c) $\dfrac{-7+3\,x}{(-1+x)^3}$

10. (a) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ (b) $\dfrac{1}{(x-1)^2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}}$ (c) $\dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$

Nesta aula você aprendeu:

- o que é a derivada de uma função;
- a calcular derivadas de certas funções elementares;
- a calcular derivada utilizando as regras de derivação.

8 Apêndice

Fermat e a derivada

A Integração, entendida nas suas origens como o cálculo de áreas, tem suas raízes no mundo grego com Eudoxo, e seu *Método da Exaustão*, e Arquimedes, com a sua *Quadratura da Parábola*. No entanto, somente no século XVII foram dados os primeiros passos para a criação do *Cálculo Diferencial*. Um dos matemáticos que mais se destacaram nestes esforços iniciais foi Fermat - personagem já destacado na aula 1 - que estabeleceu as bases do cálculo de derivadas sempre relacionando-as com o traçado de tangentes. A idéia desenvolvida por Fermat consistia, em notação moderna, no seguinte. Seja $y = f(x)$ uma dada função e fixemos um certo ponto p de seu domínio no qual f atinja um máximo ou mínimo, ou seja, $f(p) \geq f(x)$ ou $f(p) \leq f(x)$, para todo x pertencente ao domínio de f. Ora, se e for um número próximo de zero, os valores $p+e$ e p são próximos um do outro de modo que $f(p+e) \cong f(p)$. Assim, a igualdade $f(p+e) = f(p)$ somente será verdadeira se $e = 0$. Os zeros da equação resultante forneceriam os valores de x para os quais f atingiria máximo ou mínimo.

Fermat usou esta técnica para resolver o seguinte problema:

> Dentre todos os retângulos com mesmo perímetro P, qual o que possui maior área?

Observemos que, se x e y forem as dimensões de um retângulo de perímetro P, teremos $2x + 2y = P$ e sua área S será dada por $S = xy$. Como $y = \dfrac{P-2x}{2}$, $S = S(x)$ será

$$S(x) = \frac{P}{2}x - x^2$$

em que $0 < x < \frac{P}{2}$. O método de Fermat consiste no seguinte. Tomemos $e \in \mathbb{R}$ de modo que $S(x+e) = S(x)$, o que implica

$$\frac{P}{2}(x+e) - (x+e)^2 = \frac{P}{2}x - x^2$$

e daí

$$\frac{P}{2}e - 2ex - e^2 = 0$$

Dividindo ambos membros da expressão acima por e obtemos

$$\frac{P}{2} - 2x - e = 0$$

Fazendo $e = 0$ obtemos o valor de x como sendo $x = \frac{P}{4}$, donde $y = \frac{P}{4}$ e o retângulo de área máxima é o quadrado.

Evidentemente, o processo de Fermat possui falhas matemáticas graves, pois, se por um lado ele divide ambos os membros de uma equação por e, deve-se ter $e \neq 0$. Por outro lado, no final do processo ele faz $e = 0$. Contudo, estas idéias continham o gérmen do cálculo de derivadas. De fato, suponhamos que se queira calcular a inclinação da reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ em um certo ponto $(x, f(x))$ de seu gráfico. Se e for um número real não nulo, o quociente

$$\frac{f(x+e) - f(x)}{e}$$

fornece a inclinação de uma reta secante ao gráfico da função, passando pelos pontos $(x, f(x))$ e $(x + e, f(x + e))$. Mas, se e for próximo de zero, teremos que

$$\frac{f(x+e) - f(x)}{e} \cong f'(x)$$

Assim, a igualdade

$$\frac{f(x+e) - f(x)}{e} = f'(x)$$

somente será válida se $e = 0$ e isto, no moderno linguajar matemático, é dado por

$$\lim_{e \to 0} \frac{f(x+e) - f(x)}{e} = f'(x)$$

Apliquemos tal método à função $f(x) = x^2$ para obter

$$\frac{(x+e)^2 - x^2}{e} = f'(x)$$

de modo que

$$2x + e = f'(x)$$

A igualdade será verdadeira quando $e = 0$ e daí obtemos que a inclinação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$, no ponto (x, x^2), é $2x$, o que é exatamente o resultado obtido no exemplo 4 da presente aula. Para mais informações históricas sobre Fermat e o início do Cálculo Diferencial, o leitor interessado poderá consultar Simmons[1] e Eves[2].

O método dos fluxões de Newton

Em 1671 Isaac Newton, inspirado em idéias de seus predecessores, em particular de John Wallis e Isaac Barrow, produz uma técnica de derivação

[1]George F. Simmons, Cálculo com Geometria Analítica, Vol. 1, McGraw-Hill.

[2]Howard Eves, Great Moments in Mathematics, Before 1650, Mathematical Association of America.

introduzida em *Method of Fluxions* na qual ele considera uma curva como sendo a trajetória de um ponto em movimento. Newton chamou a quantidade que varia de *fluente* e sua taxa de variação de *fluxão* do fluente. Se o fluente for representado por y, então o seu fluxão será representado por $\dot{y}$, que, em termos modernos, é o nosso conhecido $\dfrac{dy}{dt}$.

Vejamos como o método funciona para a função $y = 3x^2 + 2x$. Considera-se a variável x e dá-se um acréscimo pequeno que, na notação antiga, era designada por $\dot{x}O$, e que produz um acréscimo $\dot{y}O$ correspondente na variável y, de modo que o que era x passa a ser $x + \dot{x}O$ e o que era y passa a ser $y + \dot{y}O$. Substituindo-se na função em estudo, obtemos

$$y + \dot{y}O = 3(x + \dot{x}O)^2 + 2(x + \dot{x}O).$$

Dessa maneira,

$$y + \dot{y}O = 3x^2 + 6x(\dot{x}O) + (\dot{x}O)^2 + 2x + 2(\dot{x}O).$$

Ora, Newton então argumentava, $\dot{x}O$ é um infinitésimo, ou seja, algo infinitamente pequeno, de modo que $(\dot{x}O)^2 = 0$. Além disso, $y = 3x^2 + 2x$. Usando esses fatos na última expressão, chegamos a

$$\dot{y}O = 6x(\dot{x}O) + 2(\dot{x}O)$$

e daí

$$\dot{y}O = (6x + 2)(\dot{x}O)$$

donde

$$\frac{\dot{y}O}{\dot{x}O} = 6x + 2$$

que em forma moderna é o nosso conhecidíssimo

$$\frac{dy}{dx} = 6x + 2.$$

Para mais detalhes sobre Newton e sua obra, veja Frederick Rickey [3].

[3]V. Frederick Rickey, Isaac Newton: Man, Myth, and Mathematics, College Mathematics Journal 60, Nov., 1987, 362-389.