

# Aula 6

## A derivada: propriedades e aplicações

### Objetivos

- Estudar o teorema do valor médio e algumas aplicações.
- Estudar a concavidade e pontos de inflexão de uma função.

Na aula 5 estudamos as propriedades básicas da derivada. Nesta aula introduziremos alguns resultados que nos permitirão fazer aplicações importantes, como o estudo de máximos e mínimos de funções, que constituem um dos aspectos essenciais do Cálculo Diferencial, entre outras. Veremos a relação entre máximos e mínimos de funções deriváveis em intervalos, relacionando-os com os resultados obtidos na aula 4.

### 1 O teorema do valor médio

Os resultados centrais desta aula serão os Teorema de Rolle e o Teorema do Valor Médio e alguns fatos deles decorrentes. Veja no Apêndice alguns fatos sobre a vida e obra de Rolle. Começemos com o

**Teorema 9. (Teorema de Rolle)** *Seja  $f$  uma função contínua no intervalo fechado  $[a, b]$  e derivável no intervalo aberto  $(a, b)$ . Suponhamos que  $f(a) = f(b) = k$ . Então existe um ponto  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .*

*Demonstração.* Inicialmente relembremos que, sendo  $f$  contínua no intervalo  $[a, b]$ , ela atingirá máximo e mínimo nesse intervalo. Se  $f$  for constante, então  $f'(x) = 0$  para todo  $x \in [a, b]$  e o teorema está demonstrado. Suponhamos que  $f$  não seja constante. Então existe  $x_0 \in (a, b)$  tal que  $f(x_0) > k$  ou  $f(x_0) < k$ . Se  $f(x_0) > k$ , a função  $f$  atingirá máximo

em um ponto  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) > k$ . Portanto,  $f(c+h) \leq f(c)$  para todo  $h$  tal que  $c+h \in [a, b]$ . Suponhamos  $h > 0$ . Assim,

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

e daí

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

Analogamente, considerando  $h < 0$ , obtém-se

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

e pela unicidade da derivada concluímos que  $f'(c) = 0$ .

O outro caso, em que temos  $f(x_0) < k$ , é demonstrado de maneira análoga.  $\square$

Este teorema possui uma interpretação geométrica simples e interessante. Ele nos diz que, se os pontos extremos do gráfico da função

$$y = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

possuem as mesmas ordenadas, ou seja,  $f(a) = f(b)$ , então a inclinação da reta tangente a esta curva é igual a zero em algum ponto do intervalo  $(a, b)$ , isto é, em tal ponto a reta tangente ao gráfico é horizontal. Esta situação é ilustrada nas figuras 6.1(a), 6.1(b) e 6.1(c).

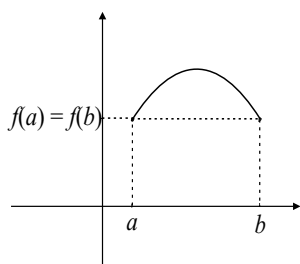


Fig.6.1(a)

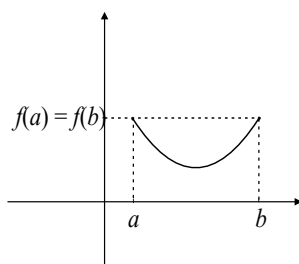


Fig. 6.1(b)

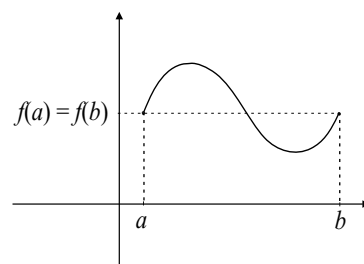


Fig. 6.1(c)

Seja  $f$  uma função definida em um certo intervalo aberto  $I$ . Se  $f$  for derivável em  $c \in I$  e  $f'(c) = 0$ , então diz-se que  $c$  é *ponto crítico* de  $f$ . Em alguns textos, os pontos em que a função deixa de ser derivável também são chamados críticos.

- (a) A função  $f(x) = x^2$  possui derivada  $f'(x) = 2x$  e 0 é o único ponto no qual  $f'$  se anula, ou seja, 0 é o único ponto crítico de  $f$ .
- (b) A função  $f(x) = ax + b, a \neq 0$  não possui pontos críticos, pois  $f'(x) = a \neq 0$ .

- (c) A função  $f(x) = x^3$  possui apenas 0 como ponto crítico, pois é o único ponto que anula a derivada  $f'(x) = 3x^2$  de  $f$ .
- (d) A função  $f(x) = \cos x$  possui uma infinidade de pontos críticos em  $\mathbb{R}$ , pois sendo  $\cos'(x) = -\text{sen } x$  tem-se que  $\text{sen } x$  se anula em qualquer valor  $x = n\pi$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

Quando  $f(a) \neq f(b)$  não podemos afirmar que em algum ponto de  $(a, b)$  a reta tangente ao gráfico de  $y = f(x)$  seja horizontal. No entanto, pode-se concluir que em algum ponto intermediário do gráfico de  $y = f(x)$  a reta tangente possui inclinação igual à da corda que liga os pontos  $A = (a, f(a))$  e  $B = (b, f(b))$ , isto é, a reta tangente em algum ponto gráfico da referida função possui inclinação igual a

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

conforme mostram as figuras 6.2(a) e 6.2(b).

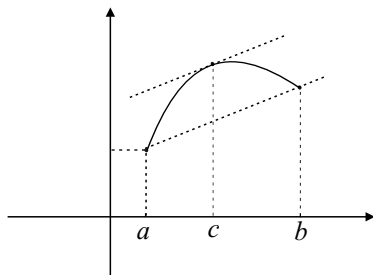


Fig.6.2(a)

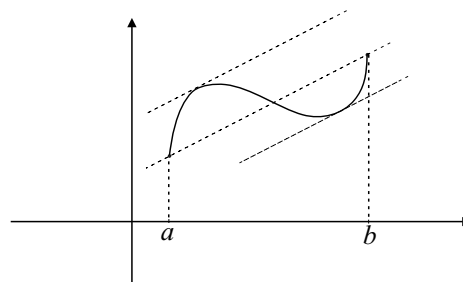


Fig. 6.2(b)

Traduzimos formalmente tal fato por meio do teorema a seguir.

**Teorema 10. (Teorema do valor médio de Lagrange)** *Seja  $f$  uma função contínua no intervalo fechado  $[a, b]$  e derivável no intervalo aberto  $(a, b)$ . Então existe um ponto  $c \in (a, b)$  tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

*Demonstração.* Consideremos a função  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) - f(a)$$

que é contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$  pois é a soma de funções contínuas em  $[a, b]$  e deriváveis em  $(a, b)$ . Além disso, é fácil ver que  $g(a) = g(b) = 0$ . Pode-se então usar o *Teorema de Rolle* para garantir a existência de  $c \in (a, b)$  tal que  $g'(c) = 0$ . Como

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

tem-se que  $g'(c) = 0$  é equivalente a

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

o que conclui a demonstração do teorema.  $\square$

## 2 Aplicações do teorema do valor médio

1. Se  $f$  for uma função derivável em um intervalo  $I$  e se sua derivada se anula em todos os pontos de  $I$ , então  $f$  será constante em  $I$ .

De fato, seja  $x_0$  um ponto arbitrário, porém fixado, de  $I$ . Seja  $x$  um ponto qualquer de  $I$  e consideremos o intervalo cujos extremos sejam  $x_0$  e  $x$ . Aplicando o *teorema do valor médio* a  $f$  neste intervalo, obteremos

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$$

para algum ponto  $c$  pertencente a  $I$ . Mas, por hipótese,  $f'(c) = 0$  e assim  $f(x) - f(x_0) = 0$  e daí segue-se que  $f(x) = f(x_0)$ , para todo  $x \in I$ , o que mostra ser  $f$  constante.

Se  $f$  não estiver definida em um intervalo, a conclusão acima não é verdadeira. Para ver isso considere a função  $f : (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in (-\infty, 0) \\ 1 & \text{se } x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Tal função é derivável e sua derivada é identicamente nula em seu domínio, no entanto, ela não é constante. Veja figura 6.3.

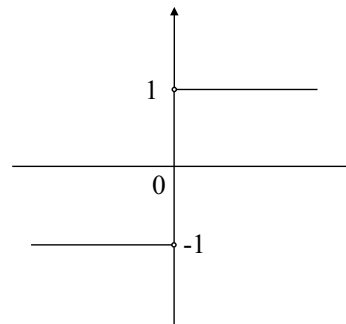


Fig. 6.3

2. Se  $f$  for uma função derivável em um intervalo  $I$  e se  $f'(x) > 0$  em todos os pontos no interior do intervalo  $I$ , então  $f$  será crescente em  $I$ , ou seja, se  $x_1, x_2 \in I$  e  $x_1 < x_2$ , então  $f(x_1) < f(x_2)$ .

Com efeito, sejam  $x_1$  e  $x_2$  como acima e apliquemos o *teorema do valor médio* à função  $f$  no intervalo  $[x_1, x_2]$ . Portanto, existe  $c \in (x_1, x_2)$  tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Como  $f'(c)$  e  $(x_2 - x_1)$  são ambos positivos, segue-se que  $f(x_2) - f(x_1)$  também é positivo e daí  $f(x_2) > f(x_1)$ , ou seja,  $f$  é crescente. Veja figuras 6.4(a) e 6.4(b).

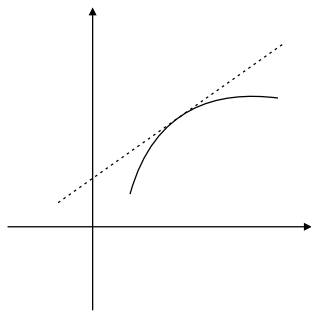


Fig. 6.4(a)

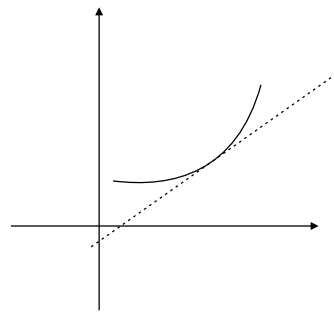


Fig. 6.4(b)

3. Se  $f$  for uma função derivável em um intervalo  $I$  e se  $f'(x) < 0$  em todos os pontos no interior do intervalo  $I$ , então  $f$  será decrescente em  $I$ , ou seja, se  $x_1, x_2 \in I$  e  $x_1 < x_2$ , então  $f(x_1) > f(x_2)$ .

Para demonstrar tal fato, siga os mesmos passos do que foi feito no item anterior. Observe as figuras 6.5(a) e 6.5(b).

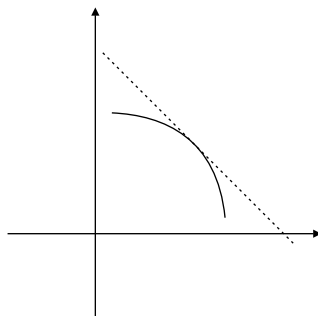


Fig. 6.5(a)

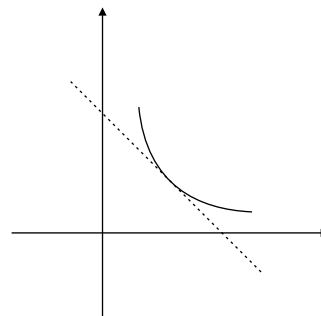


Fig. 6.5(b)

4. Observemos que a função pode ser crescente (ou decrescente) e a sua derivada se anular em alguns pontos. Basta considerar a função  $f(x) = x^3$ , que é crescente, no entanto sua derivada  $f'(x) = 3x^2$  se anula no ponto  $x = 0$ .

### 3 Extremos locais

Consideremos o gráfico de uma função contínua  $f$  em um intervalo fechado  $[a, b]$ , conforme é mostrado na figura 6.6.

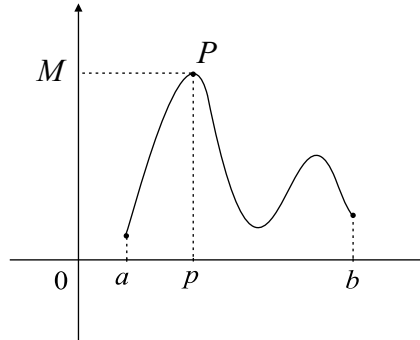


Fig. 6.6

O ponto mais alto do gráfico é atingido no ponto  $P = (p, M)$  em que  $p$  se encontra no interior  $(a, b)$  do intervalo fechado  $[a, b]$  e observemos que, de acordo com o gráfico, a derivada de  $f$  neste ponto deve ser nula, o que é equivalente a dizer que a reta tangente ao gráfico de  $f$ , aí, deve ser horizontal. O ponto mais baixo do gráfico é atingido na extremidade  $a$  do intervalo. Outro fato que deve ser destacado é que em alguns pontos o gráfico está em uma posição mais alta ou mais baixa, se nos restringirmos a intervalos pequenos centrados nestes pontos. Isto é traduzido matematicamente dizendo que a função atinge máximo ou mínimo local, o que será formalizado nas definições abaixo.

Seja  $f$  uma função definida em um intervalo  $I$ . Diz-se que  $f$  atinge *máximo local* em um ponto  $p \in I$  se existir um número  $r > 0$  tal que  $f(x) \leq f(p)$ , para todo  $x \in I$  tal que  $x \in (p - r, p + r) \cap I$ . Veja figura 6.7.

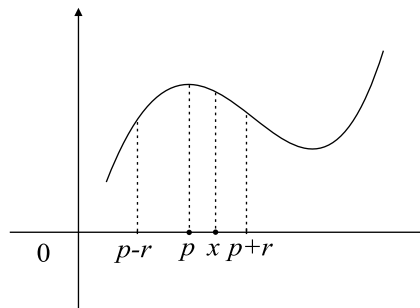


Fig. 6.7

Analogamente, diz-se que  $f$  atinge *mínimo local* em um ponto  $p \in I$  se existir um número  $r > 0$  tal que  $f(x) \geq f(p)$ , para todo  $x \in I$  tal que  $x \in (p - r, p + r) \cap I$ . Veja figura 6.8.

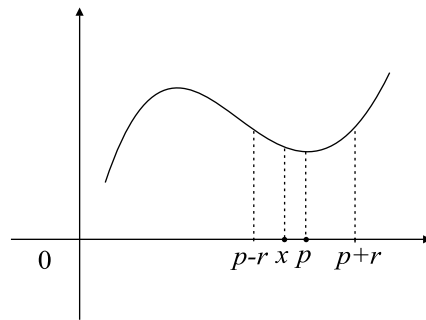


Fig. 6.8

Usa-se o termo *extremo local* para designar tanto o máximo como o mínimo local.

Um ponto de máximo (mínimo) local  $p$  é dito estrito se  $f(x) < f(p)$  ( $f(x) > f(p)$ ) para todo  $x$  nas condições acima.

Devemos observar também que uma função pode atingir vários máximos ou mínimos locais, conforme indicado nas figura 6.9.

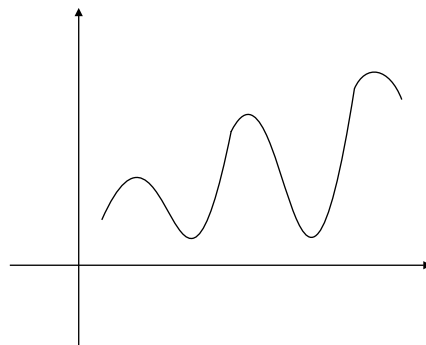


Fig. 6.9

Temos o seguinte teorema.

**Teorema 11.** *Se  $f$  possuir extremo local em um ponto  $p$ , então  $f$  não será derivável neste ponto ou  $f'(p)$  existirá e será igual a zero.*

Geometricamente, a função  $f$  deixa de ser derivável em um dado ponto  $p$  pertencente ao seu domínio se a reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(p, f(p))$  ou é vertical ou não está definida. Veja figuras 6.10(a), 6.10(b) e 6.10(c).

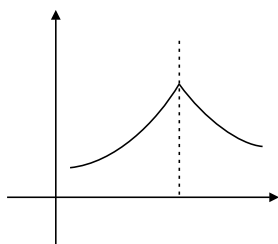


Fig. 6.10(a)

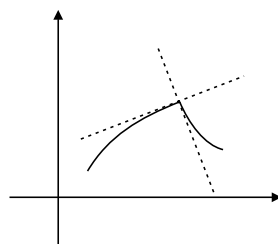


Fig. 6.10(b)

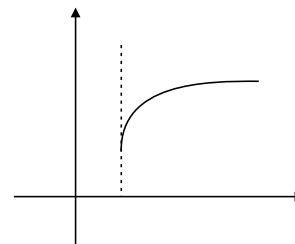


Fig. 6.10(c)

De maneira mais geral do que foi dito anteriormente, diz-se que  $p$  é um *ponto crítico* da função  $f$  se  $f$  não for derivável em  $p$  ou  $f'(p)$  existir e for igual a zero. O teorema acima nos diz que se a função atingir extremo local em um ponto  $p$ , ele será crítico. No entanto, deve-se observar que o ponto pode ser crítico mas não ser extremo, como é o caso do ponto  $x = 0$  na função  $f(x) = x^3$ . Note que  $f'(0) = 0$  mas 0 não é ponto nem de máximo nem de mínimo. Veja figura 6.11.

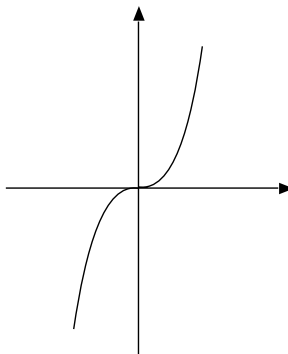


Fig. 6.11

Para decidir se um ponto crítico é de máximo ou de mínimo local podemos nos valer de alguns testes. Exibiremos dois deles.

**Teorema 12. (Teste da primeira derivada)** *Seja  $p$  um ponto crítico de  $f$  e suponha que exista  $r > 0$  tal que  $f'(x) > 0$  se  $x \in (p - r, p)$  e  $f'(x) < 0$  se  $x \in (p, p + r)$ , então  $p$  é ponto de máximo local. Se  $f'(x) < 0$  se  $x \in (p - r, p)$  e  $f'(x) > 0$  se  $x \in (p, p + r)$ , então  $p$  é ponto de mínimo local.*

Observe as figuras 6.12(a) e 6.12(b) a seguir.

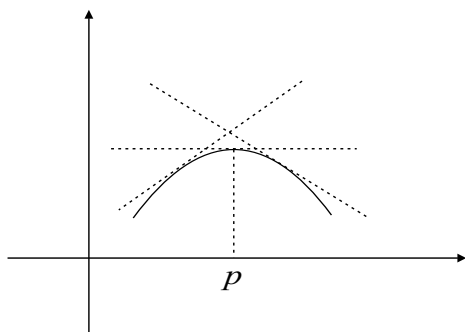


Fig. 6.12(a)

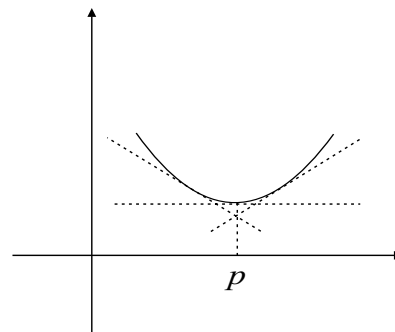


Fig. 6.12(b)

**Exemplo 50.** Consideremos a função  $f(x) = x^2$  definida em toda a reta real  $\mathbb{R}$  e observemos que seu único ponto crítico é  $x = 0$ . Além disso,  $f'(x) = 2x$  que é negativa se  $x < 0$  e é positiva se  $x > 0$ , ou seja, antes do



ponto crítico a derivada é negativa e depois do ponto crítico a derivada é positiva. Assim, usando o teste da primeira derivada, verifica-se que 0 é ponto de mínimo local. No caso em questão ele é de fato mínimo global e tal função não possui máximo local nem global.

**Exemplo 51.** A função  $f(x) = |x|$  não é derivável apenas em  $x = 0$ , nos demais pontos, ela é derivável e a derivada é sempre diferente de zero. Deste modo,  $x = 0$  é o único ponto crítico de  $f$  e, como é fácil de ver, é ponto de mínimo global.

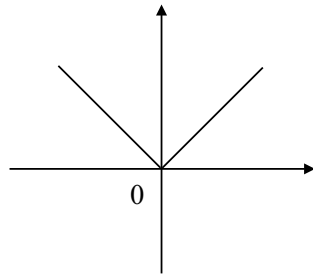


Fig. 6.13

Antes de prosseguirmos com mais exemplos, enunciemos o teste da derivada segunda.

**Teorema 13. (Teste da derivada segunda)** *Seja  $p$  um ponto crítico de  $f$  e suponha que  $f''(p)$  exista e seja não-nula. Então  $f$  possui um extremo local em  $p$ . Se  $f''(p) > 0$  tal ponto será de mínimo local e se  $f''(p) < 0$  tal ponto será de máximo local.*

**Observação 6.** Se  $f''(p) = 0$ , a função poderá ter ou não extremo local. Por exemplo, se  $f(x) = x^3$ , a derivada segunda de  $f$  é  $f''(x) = 6x$  e assim  $f''(0) = 0$  e a função não possui nem máximo nem mínimo local em 0, pois ela é sempre crescente em  $\mathbb{R}$ . Porém, se considerarmos a função  $f(x) = x^4$ , teremos que  $f''(x) = 12x^2$  e deste modo tem-se que  $f''(0) = 0$  e vê-se que 0 é ponto de mínimo estrito (global), pois  $f(0) = 0$  e  $f(x) > 0$  se  $x \neq 0$ . Veja figuras 6.14(a) e 6.14(b).

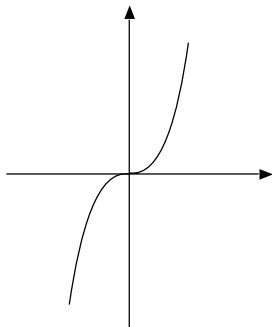


Fig. 6.14(a)

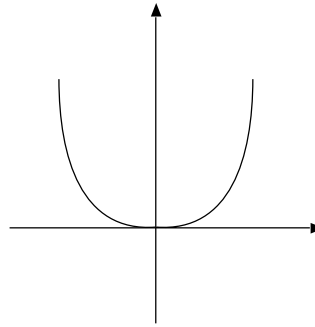


Fig. 6.14(b)

**Exemplo 52.** Encontremos os extremos locais da função

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3.$$

Inicialmente observemos que essa função é derivável pois é um polinômio. Determinemos seus pontos críticos. Sua derivada é

$$\begin{aligned} f'(x) &= 15x^4 - 15x^2 \\ &= 15x^2(x^2 - 1) \\ &= 15x^2(x - 1)(x + 1) \end{aligned}$$

e seus pontos críticos são obtidos fazendo  $f'(x) = 0$ . Assim, tais pontos são as raízes da equação

$$15x^2(x - 1)(x + 1) = 0$$

que são  $x = -1, 0, 1$ . Usemos o teste da derivada segunda. Como

$$f''(x) = 60x^3 - 30x$$

tem-se que

$$f''(-1) = -30 < 0, \quad f''(0) = 0, \quad f''(1) = 30 > 0$$

Pelo teste da derivada segunda  $x = -1$  é ponto de máximo local, ao passo que  $x = 1$  é ponto de mínimo local. Como a derivada segunda de  $f$  em  $x = 0$  se anula, não podemos usar tal teste. No entanto, deve-se observar, analisando a derivada primeira

$$f'(x) = 15x^2(x^2 - 1)$$

que ela é negativa para  $-1 < x < 1$ , ou seja, a função  $f$  é decrescente nesse intervalo, e assim em  $x = 0$  a função não atinge nem máximo nem mínimo.

Para concluir, devemos observar que a função em estudo não possui nem máximo nem mínimo global, pois

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

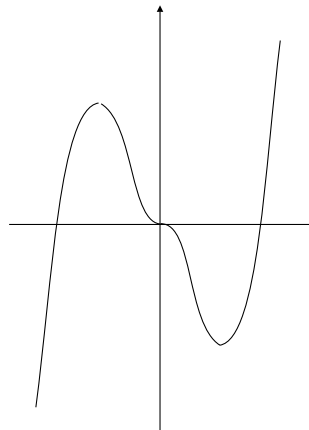


Fig. 6.15

**Exemplo 53.** Encontremos os extremos globais da função

$$f(x) = x^2 - 4x + 6$$

no intervalo  $[-3, 10]$ .

Inicialmente, observemos que tal  $f$  é contínua no intervalo fechado e limitado  $[-3, 10]$ . Assim sendo, essa função atinge máximo e mínimo em  $[-3, 10]$ . Esses extremos são atingidos nos pontos críticos de  $f$  que estejam no interior do intervalo  $[-3, 10]$  ou em suas extremidades  $-3$  e  $10$ . Calculemos os pontos críticos que estejam situados no interior do intervalo  $[-3, 10]$ . Como  $f'(x) = 2x - 4$  seu único ponto crítico é  $x = 2$ . Desde que  $f''(x) = 2 > 0$  tem-se que tal ponto crítico é de mínimo local. Os outros candidatos a extremo são  $x = -3$  e  $x = 10$ . Como

$$f(-3) = 27, f(2) = 2, f(10) = 66$$

segue-se que  $2$  é ponto de mínimo e  $10$  é ponto de máximo.

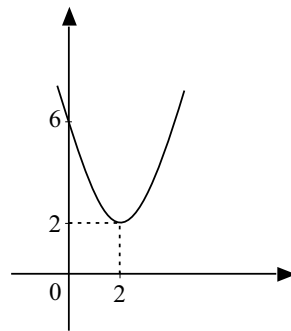


Fig. 6.16

Os dois exemplos acima sugerem certas regras que nos auxiliam na análise do comportamento de funções.

**Caso 1.**  $f$  está definida em toda a reta real  $\mathbb{R}$ . Nesse caso devemos proceder da seguinte maneira:

1. Determinar os pontos críticos de  $f$ .
2. Determinar os valores críticos de  $f$ .
3. Determinar o sinal de  $f'(x)$  entre os pontos críticos.
4. Determinar os zeros de  $f$ .
5. Analisar o comportamento de  $f$  quando  $x$  tende para  $\pm\infty$ .

Antes de prosseguirmos, cabe uma observação. Dada uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  os pontos  $x \in I$  tais que  $f(x) = 0$  são chamados *zeros* da função  $f$ . No caso particular em que  $f$  é um polinômio tais zeros são chamados *raízes* de  $f$ .

**Caso 2.**  $f$  está definida em um intervalo fechado  $[a, b]$ .

1. Verifique se  $f$  é contínua em  $[a, b]$ .
2. Se no item 1 a resposta for afirmativa, isso significará que  $f$  possuirá extremo global em  $[a, b]$ .
3. Esses extremos são atingidos ou em pontos críticos de  $f$  situados no intervalo aberto  $(a, b)$  ou em  $a$  ou em  $b$ .
4. Determinar os valores críticos de  $f$ , ou seja, os valores atingidos por  $f$  em seus pontos críticos.
5. Determinar os valores de  $f$  nas extremidades  $a$  e  $b$ .
6. Comparar os valores obtidos nos itens 4 e 5. O maior será o máximo global e o menor o mínimo global.

## 4 Concavidade e pontos de inflexão

Seja  $f$  uma função contínua em um intervalo  $I$  e derivável em um ponto  $p$  pertencente ao interior de  $I$ . Seja  $y = T(x)$  a equação da reta tangente ao gráfico de  $y = f(x)$  em um ponto com abscissa  $p$ . Um cálculo elementar mostra que a equação da reta tangente ao gráfico da função  $f$ , no ponto  $(p, f(p))$ , é dada por

$$y = T(x) = f'(p)(x - p) + f(p)$$

Se  $f(x) > T(x)$  para  $x \in (p - \epsilon, p + \epsilon) - \{p\}$ , para algum  $\epsilon > 0$ , então, para  $x$  neste conjunto, o gráfico de  $y = f(x)$  está acima da reta tangente ao referido gráfico em  $p$ , conforme mostra a figura 6.17.

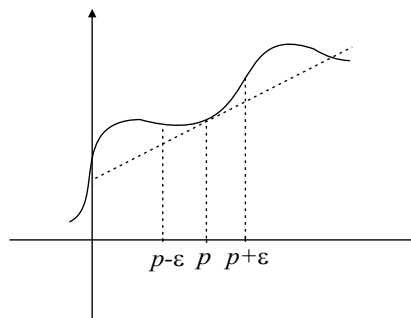


Fig. 6.17

Diz-se então que  $f$  é *côncava para cima* em  $p$ .

Analogamente, se  $f(x) < T(x)$  em um conjunto como acima, teremos que o gráfico de  $y = f(x)$  está abaixo da reta tangente ao referido gráfico em  $p$ . Vide figura 6.18.

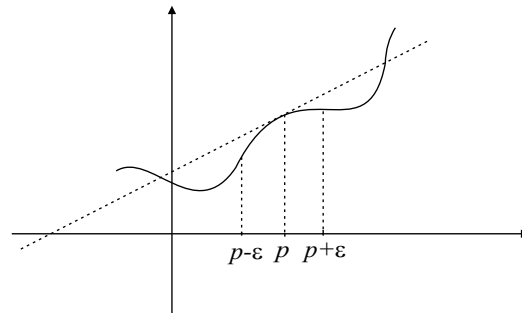


Fig. 6.18

Diz-se então que  $f$  é *côncava para baixo*.

Diz-se que  $p$  é *ponto de inflexão* do gráfico da função  $y = f(x)$  quando existir  $\epsilon > 0$  tal que: se  $x \in (p - \epsilon, p)$  então  $f(x) > T(x)$  e  $x \in (p, p + \epsilon)$  então  $f(x) < T(x)$  ou  $x \in (p - \epsilon, p)$  então  $f(x) < T(x)$  e  $x \in (p, p + \epsilon)$  então  $f(x) > T(x)$ . Estas condições nos dizem que  $p$  é ponto de inflexão se o gráfico de  $y = f(x)$  mudar de concavidade em  $(p, f(p))$ . Veja as figuras 6.19 onde são ilustradas várias situações que podem ocorrer.

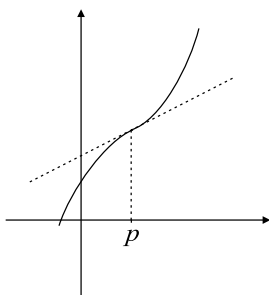


Fig. 6.19(a)

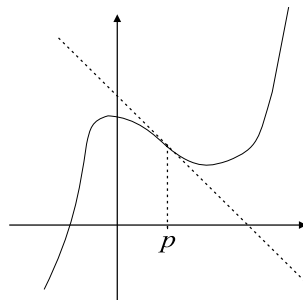


Fig. 6.19(b)

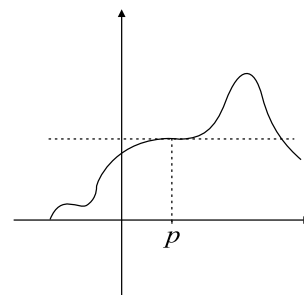


Fig. 6.19(c)

Pode-se verificar a concavidade do gráfico de uma função usando algumas regras que serão enunciadas a seguir.

**Regra 5.** Se  $f''(p)$  existir e for positiva, então  $f'$  será crescente em algum intervalo aberto contendo  $p$ , e assim  $f$  será côncava para cima em  $p$ .

**Regra 6.** Se  $f''(p)$  existir e for negativa, então  $f'$  será decrescente em algum intervalo aberto contendo  $p$ , e assim  $f$  será côncava para baixo em  $p$ .

**Regra 7.** Se  $f$  possuir um ponto de inflexão em  $p$ , então ou  $f''(p)$  não existirá ou  $f''(p)$  existirá e será igual a zero.

**Regra 8.** Suponhamos que  $f''$  exista em um conjunto da forma  $(p - \epsilon, p + \epsilon) - \{p\}$ , para algum  $\epsilon > 0$ , que ou  $f''(p)$  não exista ou  $f''(p)$  exista e seja igual a zero e que  $f''$  mude de sinal ao passar por  $p$ . Então  $p$  é ponto de inflexão de  $f$ .

**Regra 9.** Se  $f''(p) = 0$  e se a terceira derivada  $f'''(p)$  existir e for diferente de zero, então  $p$  será ponto de inflexão de  $f$ .

**Exemplo 54.** Encontremos os pontos de inflexão e analisemos a concavidade da função

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 4.$$

Observemos que  $f''(x)$  existe, qualquer que seja  $x \in \mathbb{R}$ . Portanto, pela Regra 3, os candidatos a pontos de inflexão de  $f$  são as raízes da equação

$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1)$$

que são os pontos  $x = 0$  e  $x = 1$ . Pelas Regras 1 e 2,  $f$  é côncava para cima no intervalo  $(-\infty, 0)$  pois  $f''(x) > 0$  se  $x < 0$ , côncava para baixo no intervalo  $(0, 1)$ , pois  $f''(x) < 0$  se  $0 < x < 1$ , e côncava para cima no intervalo  $(1, +\infty)$ , pois  $f''(x) > 0$  se  $x > 1$ . Portanto,  $x = 0$  e  $x = 1$  são ambos pontos de inflexão de  $f$ .

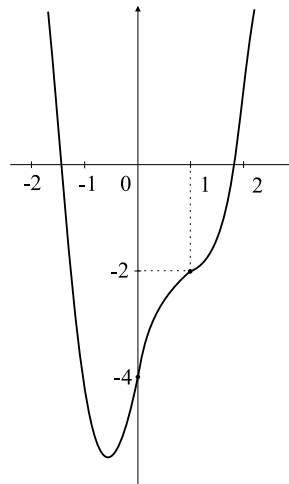


Fig. 6.20

## 5 Exercícios resolvidos

1. Verifique se é possível aplicar o teorema de Rolle à função  $f(x) = x^2 - 2x - 3$  no intervalo  $[-1, 3]$ .

*Solução.* Inicialmente observemos que  $f$  é contínua em  $[-1, 3]$  e derivável no intervalo aberto  $(-1, 3)$ . Na verdade,  $f$  é derivável no intervalo fechado  $[-1, 3]$  sendo que em  $-1$  pode-se calcular apenas a derivada lateral à direita, ao passo que em  $3$  é possível apenas calcular a derivada lateral à esquerda. Além disso,  $f(-1) = f(3) = 0$ . Fazendo  $f'(x) = 0$ , obtemos  $x = 1$ . Assim,  $f'(1) = 0$  e  $-1 < 1 < 3$ .

2. Verifique que o teorema de Rolle não se aplica à função

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 1}$$

em  $[-2, 3]$ .

*Solução.* Basta observar que a função não está definida em  $x = 1$  e  $1 \in [-2, 3]$ . Logo, no intervalo  $[-2, 3]$ , o teorema de Rolle não é aplicável.

3. Verifique se o teorema de Rolle se aplica à função  $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}}$  no intervalo  $[0, 8]$ .

*Solução.* Inicialmente observemos que  $f$  é contínua em  $[0, 8]$  e derivável em  $(0, 8)$  ( $f$  não é derivável em  $0$ ). Também,  $f(0) = f(8) = 0$  e então o teorema de Rolle se aplica. Desde que  $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}$  fazendo  $f'(x) = 0$ , encontramos  $x = 1$ , o qual está entre  $0$  e  $8$ .

4. Aplique o teorema do valor médio à função  $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$  no intervalo  $[2, 5]$ .

*Solução.* Inicialmente observemos que a função  $f$  é derivável no intervalo  $[2, 5]$ . Além disso,  $f'(x) = 6x - 5$ . Pondo

$$6c - 5 = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{51 - 3}{3} = 16$$

de modo que  $c = \frac{7}{2}$ , o qual está entre  $2$  e  $5$ .

## 6 Exercícios propostos

1. A função  $f$  é côncava para cima em  $p$  se ela possuir mínimo local estrito em  $p$  e côncava para baixo em  $p$  se ela possuir máximo local estrito em  $p$ . Verdadeiro ou falso?
2. Encontre os pontos de inflexão e analise a concavidade da função

$$y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 2x + 2.$$

3. Encontre os pontos de inflexão e analise a concavidade da função

$$y = f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 3a^2}$$

em, que  $a$  é uma constante.

4. Para que valores de  $c$  a função  $y = x^3 + cx^2 + 1$  possui um ponto de inflexão em  $x = 1$ .
5. Consideremos a função

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 1.$$

Determine:

- (a) Os pontos críticos de  $f$ .
  - (b) Os pontos que anulam  $f''(x)$ .
  - (c) Os pontos críticos que são de máximo ou de mínimo.
  - (d) Os pontos de inflexão de  $f$ .
6. Determine as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão da função

$$y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12.$$

7. Prove que toda função polinomial da forma

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ com } a \neq 0$$

possui um único ponto de inflexão e determine sua abscissa.



## 7 Respostas dos exercícios propostos

1. Falso. Tome, por exemplo,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & \text{se } x > 1 \\ -x - 1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

e  $p = 0$ .

2.  $-\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{2}$  são pontos de inflexão de  $f$ . No intervalo  $(-\infty, -\frac{1}{2})$   $f$  é côncava para cima, no intervalo  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$   $f$  é côncava para baixo e no intervalo  $(\frac{1}{2}, +\infty)$   $f$  é côncava para cima.
3. Se  $a = 0$  então  $f$  não tem pontos de inflexão e não é côncava para baixo e nem para cima em nenhum intervalo. Se  $a \neq 0$  então  $0$ ,  $-3a$  e  $3a$  são os pontos de inflexão de  $f$ . Se  $a > 0$  então  $f$  é côncava para cima em  $(-\infty, -3a)$ , é côncava para baixo em  $(-3a, 0)$ , é côncava para cima em  $(0, 3a)$  e é côncava para baixo em  $(3a, +\infty)$ . Se  $a < 0$  então  $f$  é côncava para cima em  $(-\infty, 3a)$ , é côncava para baixo em  $(3a, 0)$ , é côncava para cima em  $(0, -3a)$  e é côncava para baixo em  $(-3a, +\infty)$ .
4.  $-3$
5. (a)  $1, \frac{5}{2}$   
 (b)  $1, 2$   
 (c)  $\frac{5}{2}$   
 (d)  $1, 2$
6.  $1$
7. A segunda derivada função  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  é dada por  $f''(x) = 6ax + 2b$ . Essa segunda derivada tem um único zero, a saber,  $-\frac{b}{3a}$ . Além disso,  $f''$  é uma função afim, logo ela tem sinais contrários nos intervalos  $(-\infty, -\frac{b}{3a})$  e  $(-\frac{b}{3a}, +\infty)$ , o que implica que a concavidade de  $f$  nesses intervalos tem nomes contrários. Portanto,  $-\frac{b}{3a}$  é o único ponto de inflexão de  $f$ .

### Nesta aula você aprendeu:

- o teorema do valor médio e algumas aplicações;
- a determinar os pontos de máximo e de mínimo de certas funções.
- a determinar a concavidade e os pontos de inflexão de certas funções.

## 8 Apêndice

### Michel Rolle

Michel Rolle foi um matemático francês, nascido em Ambert, Basse-Auvergne, a 21 de abril de 1652 e falecido em Paris, a 8 de novembro de 1719. Rolle possuía uma pequena educação formal, sendo, principalmente, um autodidata. Inicialmente, ele trabalhou em Ambert e vizinhanças como assistente de advogados, e em 1675 dirigiu-se a Paris, onde trabalhou como escriturário e especialista em Aritmética.

Foi eleito para a Academia Real de Ciências, em 1685, e tornou-se Pensionnaire Géometre da Academia em 1699.

Rolle trabalhou em Análise Diofantina, Álgebra e Geometria e publicou um trabalho, *Traité d'algèbre*, sobre a teoria das equações. No entanto, ele é mais conhecido pelo *Teorema de Rolle*, enunciado nesta aula, que foi inicialmente publicado, em 1691, em um livro pouco divulgado.