# Aula 8

# Mais aplicações da derivada

### Objetivos

- Estudar a aproximação de funções por polinômios.
- Estudar a regra de L'Hospital.

Nesta aula estudaremos duas outras aplicações da derivada, a saber, a *aproximações de funções por polinômios* e a *regra de L'Hospital*. Esta última é uma maneira engenhosa de cálculo de certos limites de funções usando derivada.

## 1 Aproximação de funções por polinômios

Dentre as funções mais simples que se estudam na Matemática estão os polinômios. Mas existem funções, conhecidas do leitor, que não são representadas por polinômios. Dentre essas podemos destacar a função exponencial, a função logarítmica, as funções trigonométricas e tantas outras que se encontram na Matemática e suas aplicações. Entretanto, existem classes de funções relevantes que podem ser aproximadas, em um sentido a ser esclarecido oportunamente, por polinômios. Este é o caso da função exponencial $f(x) = e^x$. Mostraremos que os polinômios

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 + x, \\ f_2(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!}, \\ f_3(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}, \\ f_4(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \end{aligned}$$

são todos aproximações cada vez melhores da função exponencial.

Veja a figura 8.1 em que estão esboçados os gráficos da função exponencial e das funções $f_1, f_2, f_3$ e $f_4$ e observe que tais gráficos vão gradativamente ficando mais próximos do gráfico de $y = e^x$ nas proximidades de $x = 0$.

É de bom alvitre lembrar que em Matemática é interessante estudar tópicos mais avançados comparando-os com outros previamente estudados. Quando trabalhamos com números reais, o mais interessante seria trabalhar sempre com os números racionais. Porém, para felicidade geral dos matemáticos, existem os números irracionais. O que se faz quando, em problemas práticos, tem-se que lidar com irracionais? Fazemos uma aproximação por números racionais. Lembre de $\sqrt{2}$ que é aproximado por $1,4$, por $1,41$, por $1,414$ e assim por diante, que são todos racionais.

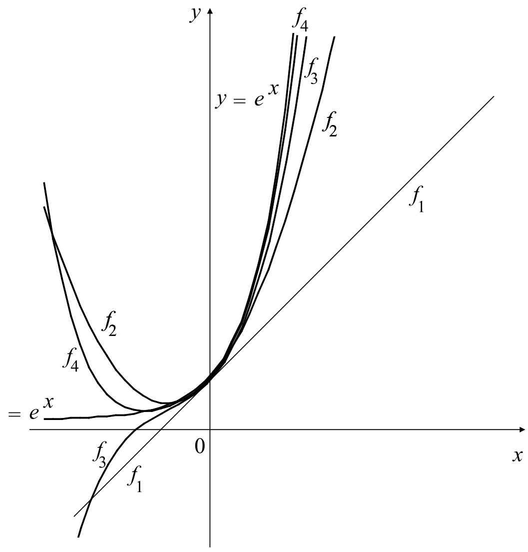

Fig. 8.1

Esta idéia, a de aproximar funções bastante gerais por polinômios, teve origem com Maclaurin, matemático inglês do século XVII. Vide apêndice desta aula. Comecemos com um exemplo ilustrativo.

**Exemplo 72.** Consideremos uma progressão geométrica de razão $r > 0$ e cujo primeiro termo seja $a > 0$. Assim, os termos dessa progressão são

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^4,\ \ldots$$

Pode-se provar facilmente que a soma dos $n$ primeiros termos dessa progressão é

$$S_n = a\,\frac{1 - r^n}{1 - r}\,.$$

Se $r > 1$ os termos da progressão tendem ao infinito, de onde se conclui que a soma $S_n$ tende ao infinito. Se $0 < r < 1$ observa-se que $r^n$ tende a zero, de modo que a soma de todos os termos da progressão geométrica tende a

$$a\,\frac{1}{1 - r}$$

e escreve-se

$$a\,\frac{1}{1 - r} = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots$$

e de maneira mais sucinta, e eliminando o $a$,

$$\frac{1}{1 - r} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n.$$

Isso nos diz que os polinômios

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n, \text{para todo, } n = 1, 2, \ldots,$$

são aproximações de

$$\frac{1}{1-r}$$

se $0 < r < 1$. Mais geralmente, e usando $x$ para designar a variável, temos

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \text{para todo } -1 < x < 1.$$

Desse modo, a função não-polinomial $\dfrac{1}{1-x}$ é aproximada pelo polinômio

$$P_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$$

e a parte restante da soma infinita, $\displaystyle\sum_{j=n+1}^{\infty} x^j$, tende a zero quando $n$ tende para o infinito.

**Observação 7.** Expressões da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

em que $a_n$ é um número real para todo $n \in \mathbb{N}$, são chamadas *séries numéricas*, ou simplesmente *séries*, e não são somas no sentido usual da palavra e sim um limite de somas. O que significa isto? Faremos uma breve interpretação intuitiva deste importante conceito, deixando os formalismos para as aulas de Análise.

Comecemos considerando um conjunto de números reais $\{a_1, a_2, \ldots\}$ dispostos numa certa ordem, de modo que $a_1$ seja o primeiro, $a_2$ seja o segundo, ..., $a_n$ seja o $n$-ésimo, e assim por diante. Deve-se enfatizar que esta ordem não significa que tenhamos $a_1 \leq a_2 \leq \ldots$.

À custa desses números construamos outro conjunto de números $s_n$, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \end{aligned}$$

para todo $n = 1, 2, \ldots$. Caso estes valores $s_1, s_2, \ldots s_n, \ldots$ se aproximem de algum número real $s$, diremos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e escreve-se

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

ou

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j \, .$$

Caso contrário diremos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

No caso do exemplo 72 os números $a_n$ são dados por

$$a_1 = 1, \; a_2 = r, \; a_3 = r^2, \; \ldots$$

e

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_1 &= 1 + r \\ s_1 &= 1 + r + r^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

de modo que, se $0 < r < 1$ (na verdade podemos ter $-1 < r < 1$), a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1-r} \, .$$

A *fórmula de Maclaurin* tem como objetivo generalizar o procedimento esboçado no Exemplo 1. Em virtude dos objetivos iniciais deste curso, não entraremos nos detalhes formais das demonstrações, deixando os rigores matemáticos para as aulas referentes à Análise.

Para estabelecermos a fórmula de Maclaurin, comecemos considerando uma função $y = f(x)$ definida e possuindo derivadas de todas as ordens em um dado intervalo aberto $I$ que contenha o ponto 0. Gostaríamos de expressar tal função na forma

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots \, . \tag{8.1}$$

cujos coeficientes $a_j$, $j = 0, 1, 2, \cdots$ devem ser determinados de maneira conveniente. O termo $a_0$ é determinado atribuindo-se o valor $x = 0$ na expressão (8.1). Assim,

$$f(0) = a_0 \, .$$

Para a determinação dos outros usaremos um fato que não é trivial, porém é tentador. A expressão em (8.1) é, digamos, uma soma infinita. No entanto, esse tipo de soma, chamada *série de potências*, é, na verdade, um limite de somas finitas, e derivar termo a termo tal tipo de série é algo válido em um certo intervalo centrado em 0, chamado intervalo de convergência, mas que nem sempre é possível para as chamadas *série de funções*. As funções que podem ser desenvolvidas como aquela na expressão (8.1) são chamadas *funções analíticas* e são aquilo o que de melhor podemos esperar no que concerne às funções.

Derivando uma vez, termo a termo, a expressão em (8.1), obtém-se

$$f'(x) \quad = \quad a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots . \tag{8.2}$$

Fazendo-se $x = 0$ em (8.2), tem-se

$$f'(0) = a_1.$$

Para determinarmos o valor de $a_2$, derivemos termo a termo a expressão em (8.2):

$$f''(x) \quad = \quad 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + 3 \cdot 4a_4x^2 + \cdots . \tag{8.3}$$

Atribuindo $x = 0$ na expressão em (8.3), obtém-se $f''(0) = 2a_2$, e daí segue que

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{f''(0)}{2!} .$$

Derivemos mais uma vez:

$$f'''(x) \quad = \quad 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4x + \cdots . \tag{8.4}$$

Procedendo como nos casos anteriores, obtemos $f'''(0) = 2 \cdot 3a_3$, logo

$$a_3 = \frac{f'''(0)}{2 \cdot 3} = \frac{f'''(0)}{3!} .$$

Derivando novamente, indicando a derivada de ordem 4 por $f^{(4)}$ e fazendo $x = 0$, obtemos

$$a_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{4!} .$$

Prosseguindo desta maneira, pode-se provar que

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} , \quad \text{para todo} \;\; n = 1, 2, \ldots$$

em que $f^{(n)}(0)$ designa a derivada de ordem $n$ da função $f$ calculada em $x = 0$.

De posse destes coeficientes encontramos a *série de Maclaurin* da função $f$:

$$f(x) \quad = \quad f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots \tag{8.5}$$

ou

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \,.$$

Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 73.** Comecemos com a função $f(x) = e^x$, pois é a mais fácil de derivar. Assim,

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^x\,, & f(0) = e^0 = 1 \\ f'(x) = e^x\,, & f'(0) = e^0 = 1 \\ f'(x) = e^x\,, & f''(0) = e^0 = 1 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Substituindo-se na expressão (8.5), obtém-se

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \,. \qquad (8.6)$$

Ao atribuirmos o valor $x = 1$ na expressão em (8.6), teremos

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \qquad (8.7)$$

de modo que, ao truncarmos a soma infinita dada em (8.7), chegamos a

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \qquad (8.8)$$

a qual é uma aproximação para o número transcendente $e$, sendo que o erro cometido será tanto menor quanto maior for $n$, que é o número de parcelas da soma dada por (8.8).

**Exemplo 74.** Determinemos a série de Maclaurin da função

$$f(x) = \ln(1 + x).$$

Um simples cálculo de derivadas nos fornece a seguinte tabela

$$\begin{array}{rcl rcl} f(x) & = & \ln(1+x) & f(0) = \ln(1+0) & = & 0 \\ f'(x) & = & \dfrac{1}{1+x} & f'(0) & = & 1 \\ f''(x) & = & -\dfrac{1}{(1+x)^2} & f''(0) & = & -1 \\ f'''(x) & = & \dfrac{2}{(1+x)^3} & f'''(0) & = & 2 \\ f^{(4)}(x) & = & -\dfrac{6}{(1+x)^4} & f^{(4)}(0) & = & -6 \\ \vdots & & & & \vdots & \end{array}$$

Substituindo-se tais valores na expressão em (8.5), teremos

$$\ln(1 + x) = 0 + \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} - \frac{6x^4}{4!} + \cdots$$

Portanto,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

que possui limite finito se $-1 < x < 1$.

**Exemplo 75.** Desenvolvamos a função $f(x) = \cos x$. Cálculos elementares de derivadas nos levam a

$$\begin{array}{rclcrcl}
f(x) & = & \cos x & \quad & f(0) & = & 1 \\
f'(x) & = & -\text{sen}\, x & & f'(0) & = & 0 \\
f''(x) & = & -\cos x & & f''(0) & = & -1 \\
f'''(x) & = & \text{sen}\, x & & f'''(0) & = & 0 \\
f^{(4)}(x) & = & \cos x & & f^{(4)}(0) & = & 1 \\
f^{(5)}(x) & = & -\text{sen}\, x & & f^{(5)}(0) & = & 0 \\
f^{(6)}(x) & = & -\cos x & & f^{(6)}(0) & = & -1 \\
& \vdots & & & & \vdots &
\end{array}$$

de modo que, ao substituirmos esses valores na expressão em (8.5), obtém-se

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots .$$

Caso queiramos construir uma tábua trigonométrica, devemos observar que

$$\cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2!}$$

$$\cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$\cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

o que nos fornece aproximações cada vez mais acuradas para os valores de $\cos x$.

**Exemplo 76.** Desenvolvamos a função $f(x) = \text{sen}\, x$ em série de Maclaurin. Observemos a tabela abaixo obtida por simples derivação

$$\begin{array}{rclcrcl}
f(x) & = & \text{sen}\, x & \quad & f(0) & = & 0 \\
f'(x) & = & \cos x & & f'(0) & = & 1 \\
f''(x) & = & -\text{sen}\, x & & f''(0) & = & 0 \\
f'''(x) & = & -\cos x & & f'''(0) & = & -1 \\
f^{(4)}(x) & = & \text{sen}\, x & & f^{(4)}(0) & = & 0 \\
f^{(5)}(x) & = & \cos x & & f^{(5)}(0) & = & 1 \\
& \vdots & & & & \vdots &
\end{array}$$

de modo que, como nos casos anteriores,

$$\text{sen}\, x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

**Exemplo 77.** Um cálculo simples, porém longo, mostra que a função $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ possui o seguinte desenvolvimento de Maclaurin

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}x^6 - \cdots$$

de maneira que

$$\sqrt{1+x^2} \cong 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}x^4$$

nos fornece uma aproximação para $\sqrt{1+x^2}$. Fazendo $x = 1$ nesta expressão obtemos uma aproximação para $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} \cong 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}.$$

**Exemplo 78.** Vejamos uma demonstração para o conhecido *binômio de Newton*. Para isto consideraremos a função

$$f(x) = (a+x)^m$$

onde $m$ é um inteiro positivo. Observemos que essa função é um polinômio de grau $m$ e a cada derivação obtemos um polinômio de grau uma unidade menor do que a do anterior. Assim, a derivada $f^{(m+1)}(x) = 0$ para todo $x$. Calculando as sucessivas derivadas de $f$, obtém-se

$$\begin{array}{rlrl}
f(x) &= (a+x)^m & f(0) &= a^m \\
f'(x) &= m(a+x)^{m-1} & f'(0) &= ma^{m-1} \\
f''(x) &= m(m-1)(a+x)^{m-2} & f''(0) &= m(m-1)a^{m-2} \\
&\vdots & &\vdots \\
f^{(m)}(x) &= m(m-1)(m-2)\cdots 1 & f^{(m)}(0) &= m(m-1)(m-2)\cdots 1 \\
f^{(m+1)}(x) &= 0 & f^{(m+1)}(0) &= 0.
\end{array}$$

Conseqüentemente,

$$(a+x)^m = a^m + \tfrac{m}{1!}a^{m-1}x + \tfrac{m(m-1)}{2!}a^{m-2}x^2 + \cdots + \tfrac{m(m-1)(m-2)\cdots 1}{m!}x^m.$$

Fazendo $x = b$ nesta última expressão, obtemos a forma como o *binômio de Newton* é normalmente apresentada:

$$(a+b)^m = a^m + \tfrac{m}{1!}a^{m-1}b + \tfrac{m(m-1)}{2!}a^{m-2}b^2 + \cdots + \tfrac{m)m-1)(m-2)\cdots 1}{m!}b^m.$$

Para obter o desenvolvimento de $(a-b)^m$ basta observar que $a-b$ é igual a $a+(-b)$ e daí use a última expressão.

Raciocinando de maneira análoga ao feito para a fórmula de Maclaurin, obtemos a *fórmula de Taylor*.

Se $y = f(x)$ for uma função que tenha derivadas de todas as ordens em um certo intervalo aberto $I$, teremos a seguinte fórmula

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a) + \cdots$$

chamada *fórmula de Taylor*, ou, equivalentemente

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

em que se convenciona $f^{(0)}(x) = f(x)$. Ao fazermos $x = a + h$, obtemos a expressão seguinte, que é bastante usual e exprime a função $f$ em forma de potências de $x - a$:

$$f(x) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{8.9}$$

**Observação 8.** Deve-se observar que nem toda função que possua derivadas de todas as ordens em certo intervalo pode ser desenvolvida em série de Taylor (ou série de Maclaurin). Para que isto aconteça, algumas condições devem ser impostas à função. A classe de funções que possuem esta propriedade (a de ser desenvolvidas em *série de potências*) é a das *funções analíticas*. Para sorte nossa, a grande maioria das funções com as quais temos trabalhado são analíticas. Para elas é válido derivar termo a termo, integrar termo a termo, etc., porém devemos deixar claro que existem funções, importantes do ponto de vista da Matemática e de suas aplicações, que não são analíticas mas podem ser desenvolvidas em outros tipos de séries. Um exemplo típico são as chamadas *séries de Fourier* que surgiram nos estudos de transmissão de calor e que se prestam, entre outras coisas, a aproximar funções que podem ter várias descontinuidades. Apenas para satisfazer a curiosidade do leitor, uma *série de Fourier*, é uma expressão da forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \mathrm{sen}\, nx$$

em que $a_n, n = 1, 2, \ldots$ são constantes que dependem da função que está sendo expandida. Um exemplo de função que pode ser representada por séries de Fourier é a apresentada na figura 8.2.

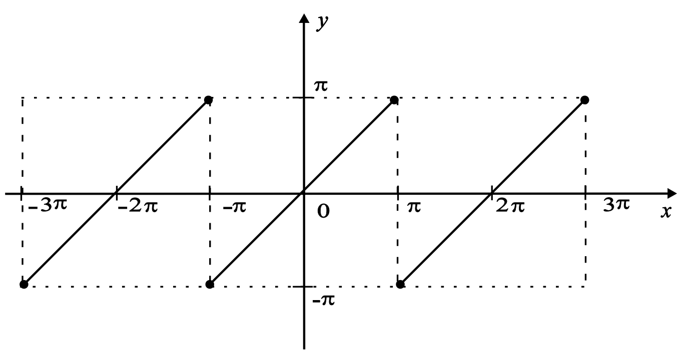


Fig. 8.2

**Exemplo 79.** Desenvolvamos a função $f(x) = e^x$ em potências de $x - 1$. No caso em questão tem-se $a = 1$ e então

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^x & f(1) = e \\ f'(x) = e^x & f'(1) = e \\ f''(x) = e^x & f'(1) = e \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Portanto, usando a fórmula expressa em (8.9), tem-se

$$e^x = e + \frac{e^2}{1!}(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \frac{e}{3!}(x-1)^3 + \cdots$$

**Exemplo 80.** A expressão da fórmula de Taylor

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

pode ser utilizada para fazer aproximações. À guisa de exemplo determinemos uma aproximação para $\operatorname{sen} 31^o$ sabendo que $\operatorname{sen} 30^{\underline{o}} = 0,5$. Ora $30^o = \dfrac{\pi}{6}$ e $1^o = \dfrac{\pi}{180} = 0,01745\, rad$, de modo que

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = 0,5$$

e

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) = \operatorname{sen} 31^o$$

donde

$$\operatorname{sen} 31^o \cong \operatorname{sen} 30^o + \frac{\pi}{180} \cdot \cos 30^o = 0,5 + 0,0349 \cdot 0,8666 = 0,5151.$$

em que na última expressão usamos a aproximação

$$f(a+h) \cong f(a) + f'(a)h$$

dada pela fórmula de Taylor. Caso quiséssemos algo mais preciso, poderíamos usar uma aproximação de grau dois

$$f(a+h) \cong f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2$$

de modo que quanto maior for o grau do polinômio de Taylor

$$f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n$$

melhor será a aproximação obtida.

# 2 Expressões indeterminadas

Usaremos o que foi feito sobre séries de Maclaurin e de Taylor para o estudo de levantamentos de indeterminações. Sabe-se, desde o estudo de limites, nas Aulas 2 e 3, que indeterminações são expressões da forma $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0^0, \ldots$. Comecemos com o primeiro exemplo já introduzido na aula 3.

**Exemplo 81.** Consideremos a função

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

que, quando $x \to 0$, apresenta a indeterminação $\dfrac{0}{0}$. Como levantá-la? Usemos a fórmula de Maclaurin

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots .$$

Deste modo

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots$$

e daí

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

que é uma maneira de levantar tal indeterminação sem o apelo geométrico desenvolvido na aula 3.

**Exemplo 82.** Vejamos, agora, a função

$$\frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$$

da qual resulta a indeterminação $\dfrac{0}{0}$ quando $x \to 0$. Usando a série de Maclaurin para as funções $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$, teremos

$$\frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right)}{\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots} = \frac{\frac{x}{2!} - \frac{x^3}{4!} + \frac{x^5}{6!} - \cdots}{\frac{1}{1!} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots}$$

e então

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} = 0.$$

# 3 Regra de L'Hospital

Vejamos a *regra de L'Hospital*, que é outro instrumento muito útil para levantarmos indeterminações. Para isso, suponhamos que tenhamos duas funções $f(x)$ e $g(x)$ que se anulem simultaneamente no ponto $x = a$, de modo que, se tentarmos calcular o limite do quociente

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

atribuindo-se simplesmente o valor $x = a$, chegamos à indeterminação $\dfrac{0}{0}$. O que fazer? Usemos a série de Taylor para ambas as funções $f$ e $g$ em torno de $x = a$ para obter

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f(a) + \dfrac{f'(a)}{1!}h + \dfrac{f''(a)}{2!}h^2 + \dfrac{f'''(a)}{3!}h^3 + \cdots}{g(a) + \dfrac{g'(a)}{1!}h + \dfrac{g''(a)}{2!}h^2 + \dfrac{g'''(a)}{3!}h^3 + \cdots}$$

de modo que, usando o fato de que $f(a) = g(a) = 0$,

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{\dfrac{f'(a)}{1!} + \dfrac{f''(a)}{2!}h + \dfrac{f'''(a)}{3!}h^2 + \cdots}{\dfrac{g'(a)}{1!} + \dfrac{g''(a)}{2!}h + \dfrac{g'''(a)}{3!}h^2 + \cdots}.$$

Supondo que $g'(a) \neq 0$, podemos fazer $h \to 0$ nesta última expressão para obter

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Esta é a *regra de L'Hospital* (veja Apêndice no qual se fazem alguns comentários sobre L'Hospital) . Caso tivéssemos que $a$ é ponto crítico tanto de $f$ como de $g$, obteríamos, outra vez, uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$ e aplicaríamos, novamente, o processo acima para obter

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f''(a)}{g''(a)}$$

supondo que não teríamos outra indeterminação $\dfrac{0}{0}$. Caso isto aconteça, mais um a vez aplicamos o procedimento e teríamos o quociente das derivadas de ordem três de $f$ e $g$. Temos, então, as seguintes regra práticas.

## Regras práticas para levantamento de indeterminação

**Regra 10. O caso $\dfrac{0}{0}$**

Caso queiramos calcular o limite

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

e tenhamos $f(a)=g(a)=0$, ou seja, recaiamos em uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$, devemos calcular as derivadas $f'(x)$ e $g'(x)$ e construir o quociente $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, avaliando-o em $x=a$. Caso não tenhamos $\frac{f'(a)}{g'(a)}=\frac{0}{0}$, teremos

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}\right]_{x=a}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Se recairmos, novamente, em uma indeterminação $\frac{0}{0}$, que acontece quando $a$ for, simultaneamente, ponto crítico tanto de $f$ como de $g$, $f'(a)=g'(a)=0$, aplicaremos a regra de L'Hospital uma vez mais para obter

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}\right]_{x=a}=\frac{f''(a)}{g''(a)}.$$

Se tivermos $f''(a)=g''(a)=0$, aplicamos mais uma vez a regra, e assim por diante.

**Regra 11. O caso $\frac{\infty}{\infty}$**

Consideremos a função $\frac{f(x)}{g(x)}$ de modo que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$$

que é um outro tipo de indeterminação. Isto acontece quando $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ e $\lim_{x\to a}g(x)=\infty$. Observando que

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$$

de modo que quando $x\to a$ teremos a indeterminação $\frac{0}{0}$. Usando a regra de L'Hospital para esta última fração, obtemos

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}=\lim_{x\to a}\left[\frac{-\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}}{-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}}\right]$$

caso não tenhamos uma nova indeterminação. Se recairmos em nova indeterminação, utilizaremos os procedimentos anteriores.

**Observação 9.** Os procedimentos referentes à regra de L'Hospital são válidos quando tivermos limites do tipo

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

que recaiam em indeterminações como as previamente estudadas. Isto pode ser justificado, de maneira informal, da seguinte maneira: faça $x = \dfrac{1}{t}$ de modo que $x \to \pm\infty$ é equivalente a fazer $t \to 0$ de modo que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})},$$

caso tenhamos uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$, aplicamos a regra 10 para obter

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t\to 0} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 83.** Comecemos com um velho conhecido nosso. Consideremos o limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

o qual, como é bem sabido, recai em uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$. Usando a regra de L'Hospital, teremos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \left[\frac{\cos x}{1}\right]_{x=0} = 1.$$

Os exemplos 84, 85, 86 e 87 são para aqueles que já possuem conhecimentos prévios sobre logaritmos.

**Exemplo 84.** Consideremos o limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$$

que recai na indeterminação $\dfrac{\infty}{\infty}$. Usando a regra de L'Hospital, obtemos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Vê-se, então, que a função $g(x) = x$ cresce mais rápido do que a função $\ln x$. De maneira análoga, podemos proceder com o exemplo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

Como no caso anterior, a função $g(x) = x^2$ cresce mais rápido do que a função $\ln x$. Na verdade, este comportamento se verifica para qualquer potência $g(x) = x^m$, qualquer que seja $m = 1, 2, \ldots$, ou seja, $g(x) = x^m$ cresce mais rapidamente do que $\ln x$, qualquer que seja $m = 1, 3, \ldots$.

**Exemplo 85.** Estudemos o limite

$$\lim_{x\to 0} x \ln x$$

o qual resulta na indeterminação $0\cdot(-\infty)$, que não se enquadra em nenhuma das situações que analisamos até aqui. No entanto, podemos observar que

$$x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}.$$

Quando $x \to 0$ tem-se que $\ln x \to -\infty$ e $\frac{1}{x} \to +\infty$ (observe que $x > 0$) e chegamos a uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Usando a regra de L'Hospital,

$$\lim_{x\to 0} x \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} x = 0.$$

**Exemplo 86.** Analisemos o limite

$$\lim_{x\to 0} x^x, \quad x > 0.$$

Este exemplo nos leva à indeterminação do tipo $0^0$, que não se enquadra em nenhum dos tipos estudados até agora. Para levantar essa indeterminação, procederemos da seguinte maneira, valendo-nos da função logaritmo e do exemplo precedente. Segue de $f(x) = x^x$ que $\ln f(x) = \ln x^x$. Logo $\ln f(x) = x \ln x$. Ora, sabe-se que

$$\lim_{x\to 0} x \ln x = 0$$

de modo que

$$\lim_{x\to 0} \ln f(x) = 0.$$

Como $\ln f(x) \to 0$ então $f(x) \to 1$ e daí

$$\lim_{x\to 0} x^x = 1.$$

**Exemplo 87.** Consideremos o limite

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} \quad \text{para} \quad x > 0.$$

Notemos que, ao fazer $x \to 0$, somos levados à indeterminação $1^\infty$. Usemos, novamente, a função logarítmica. Escrevendo $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$, temos que

$$\ln f(x) = \ln(\cos x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\ln(\cos x)$$

o que conduz à indeterminação $\frac{0}{0}$. Usando a regra de L'Hospital, teremos

$$\lim_{x\to 0}\ln f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(\cos x) = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{1} = -\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0.$$

Deste modo, $\ln f(x) \to 0$ e daí teremos $f(x) \to 1$, isto é,

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = 1.$$

Outros exemplos serão colocados nos exercícios propostos.

# 4 Exercícios resolvidos

1. Encontre a série de Maclaurin de $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$.

   *Solução.* Observemos que $f(x) = \dfrac{1-x}{1-x^3}$. De $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, obtemos $\dfrac{1}{1-x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n}$, e assim

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x^3} - x\frac{1}{1-x^3} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} - \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1}. \end{aligned}$$

2. Usando o fato de que $\dfrac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + \ldots$ se $|r| < 1$, encontre uma expressão para $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} + \ldots$

   *Solução.* Fazendo-se $r = \dfrac{1}{x}$ tem-se

$$\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 + \ldots,$$

   válida para $\left|\dfrac{1}{x}\right| < 1$, ou seja, $|x| > 1$. Assim, $\dfrac{x}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} + \ldots$. Logo $\dfrac{x}{x-1} - 1 = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} + \ldots$, ou seja

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \ldots$$

3. Usando o fato de que

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

encontre a série de Maclaurin de $\operatorname{sen}^2 x$.

*Solução.* Usemos a identidade trigonométrica $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ e $\cos 2x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$. Daí $-\cos 2x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$. Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 x &= \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} \\ &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

4. A regra de L'Hospital se aplica a $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x + 1}$?

*Solução.* Usando-se regras elementares de limites temos

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x + 1} = \frac{0}{2} = 0.$$

Caso usássemos a regra de L'Hospital, teríamos

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2}{1} = 3$$

o que, evidentemente, é falso. A aplicação da regra de L'Hospital não é possível, pois não temos uma indeterminação.

# 5 Exercícios propostos

1. Desenvolver em série de Maclaurin as seguintes funções:

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$

   (c) $f(x) = \cos^2 x$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$

2. Desenvolver as funções abaixo em potências de $x - a$.

   (a) $f(x) = \operatorname{sen} x,\ a = \dfrac{\pi}{4}$

   (b) $f(x) = \cos x,\ a = 0$

   (c) $f(x) = \operatorname{tg} x,\ a = 0$

   (d) $f(x) = e^{\cos x},\ a = 0$

3. Calcule uma aproximação para $\cos 32^o$ a partir de $\cos 30^o$.

4. Calcule uma aproximação para $\cos 29^o$ a partir de $\cos 30^o$.

5. Calcule uma aproximação para $\ln \frac{4}{3}$ considerando o desenvolvimento de Taylor para a função $\ln(1+x)$ partindo do fato de que $\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$.

6. Calcule os seguintes limites

   (a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^2}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x}{x - \operatorname{sen} x}$

   (c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln 2x}{\ln 3x}$

   (d) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\operatorname{sen} x}$

# 6 Respostas dos exercícios propostos

1. (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

   (c) $\displaystyle 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}$

   (d) $\displaystyle 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \cdots (3n-2))}{3^n n!}$

2. (a) $\displaystyle \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 + \frac{x-\frac{\pi}{4}}{1!} - \frac{(x-\frac{\pi}{4})^2}{2!} - \frac{(x-\frac{\pi}{4})^3}{3!} + \frac{(x-\frac{\pi}{4})^4}{4!} - \cdots\right]$

   (b) $\displaystyle 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$

   (c) $\displaystyle x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^3 + \cdots$

   (d) $\displaystyle e\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \cdots\right)$

3. $0,848$

4. $0,874$

5. $1,098$

6. (a) $0$

   (b) $+\infty$

   (c) $1$

   (d) $4$

## Nesta aula você aprendeu:

- a expandir funções em séries de Maclaurin e de Taylor;
- a resolver limites utilizando a regra de L'Hospital.

# 7 Apêndice

## Marquês de L'Hospital

Guillaume-François-Antoine de L'Hospital, ou L'Hôpital, Marquês de St. Mesme, nasceu em 1661. Desde tenra idade manifestou interesse por Geometria e aos quinze anos de idade chegou a resolver um difícil problema sobre a ciclóide, proposto por Pascal. Tornou-se capitão de cavalaria, mas desistiu da carreira militar para devotar mais tempo aos estudos de Matemática. Quando Jean Bernoulli esteve em Paris, em 1692, L'Hospital estudou a geometria infinitesimal, então emergente, sob a sua orientação, tendo se tornado um dos expoentes do Cálculo na França de então. Nesta época um dos poucos textos existentes sobre o recém-nascido Cálculo Infinitesimal era uma memória escrita por Leibniz, na *Acta Eruditorum*, em 1684. Este trabalho continha a definição de diferencial e fornecia algumas regras de derivação, tais como a derivada da soma, do produto, do quociente, de potências e de raízes. Ela também incluía algumas aplicações a poblemas de tangentes e pontos críticos. No entanto, ele não era um texto didático nos moldes que entendemos atualmente. L'Hospital teve a percepção da deficiência de textos mais elementares de Cálculo, fato este manifestado em uma carta para Bernoulli, em 1695, no qual ele informava que estava a escrever um trabalho sobre seções cônicas no qual ele acrescentaria um pequeno tratado sobre o Cálculo Diferencial. O trabalho sobre cônicas teve sua publicação procrastinada e somente apareceu postumamente em 1707 (L'Hospital faleceu em 1704); no entanto, o trabalho sobre Cálculo, *Analyse des Infiniment Petits*, foi publicado em 1696. No prefácio o autor enfatiza que deve muito a Leibniz e a Jean Bernoulli, especialmente a esse último, a quem chama de jovem professor de Groningen.

O *Analyse des Infiniment Petits* representa o primeiro tratamento sistemático do Cálculo e apresenta um perfil bastante claro do estado da arte na época de seu lançamento. O prefácio inclui um breve histórico no qual o autor admite que Newton também tinha um tipo de Cálculo.

Neste texto aparece a chamada *Regra de L'Hospital*, que consiste, como vimos nesta aula, em

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)},$$

desde que $f(a) = g(a) = 0,\ g'(a) \neq 0$, cuja origem é bastante inusitada. Ao que parece, os fatos aconteceram da seguinte maneira: durante alguns meses, de 1691-1692, o brilhante matemático suíço Jean Bernoulli esteve a serviço do Marquês de L'Hospital e recebia uma espécie de bolsa; em contrapartida, alguns resultados obtidos por Bernoulli seriam atribuídos a L'Hospital, com as anuências dos dois envolvidos. Em particular, a chamada Regra de L'Hospital estava incluída neste negócio. Vejamos um trecho de uma carta enviada por L'Hospital a Jean Bernoulli, em 17 de março de 1694, de Paris para Basel (Suíça):

> I shall give you with a pleasure a pension of three hundred livres, which will begin on the first of January of the present year, and I shall send you two hundreds livres for the first half of the year because of the journals that you have sent, and it will be one hundred and fifty livres for the other half of the year, and so in the future. I promise to increase this pension soon, since I know it to be very moderate, and I shall do this as soon as my affairs are a little less confused ... I am not so unreasonable as to ask for this all your time, but I shall ask you to give me occasionally some hours of your time to work on what I shall ask you- and also to communicate to me your discoveries, with the request not to mention them to others. I also ask you to send neither to M. Varignon nor to others copies of the notes that you let me have, for it would not please me if they were made public. Send me your answer to all this and believe me , *Monsieur tout À vous.*
>
> le M. de Lhopital

Em uma carta de 22 de julho de 1694, Jean Bernoulli aceita a proposta de L'Hospital. Nesta carta está contida a regra para $\frac{0}{0}$, e a formulação de Bernoulli é próxima daquela que aparece em *Analyse des Infiniment Petits* e consiste basicamente, em linguajar atual, no seguinte: se

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

e ambas as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ passam pelo mesmo ponto $P$ no eixo $x$ de modo que se designarmos por $O$ a origem do sistemas de coordenadas, $OP = a$, tal que $f(a) = g(a) = 0$, e se tomarmos $x = a + h$, então

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)}$$

é aproximadamente igual ao quociente

$$\frac{hf'(a+h)}{hg'(a+h)}$$

quando $h$ for suficientemente pequeno. Fazendo $h \to 0$ obtemos a conhecida regra de L'Hospital. Para mais informações o leitor poderá consultar os artigos de Boyer[1] e Struik[2]

[1] Carl B. Boyer, The First Calculus Textbooks, Mathematics Teacher 39 (April, 1946) 159-167.

[2] D.J. Struik, The Origin of L'Hôpital's Rule, Mathematics Teacher, 56 (April, 1963) 257-260.

## Maclaurin e Taylor

Brook Taylor (1685-1731) foi um eminente matemático inglês, contemporâneo de Isaac Newton. Ele foi um jovem de talento incomum com variados interesses intelectuais nos quais estavam incluídos a Música, as Artes, a Filosofia e a Matemática. A dedução da série que leva seu nome está contida em seu livro *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*, que foi publicado em Londres, em 1715, em uma época em que o mundo matemático estava envolvido em querelas sobre a prioridade da criação do Cálculo entre as correntes pró-Newton e pró-Leibniz. Tal livro era devotado inicialmente para aquilo conhecido hoje como o cálculo de diferenças finitas. Os argumentos usados por Taylor eram pouco rigorosos, muitas vezes confusos, que deixavam não apenas Taylor, mas também Newton e Leibniz e os pioneiros do Cálculo, vulneráveis aos ataques do Bispo de Berkeley, que era um ferrenho opositor do então emergente Cálculo. Esses ataques tiveram frutos positivos, pois levaram os matemáticos a procurar demonstrações que tornassem mais convincentes os argumentos do Cálculo incipiente.

Com relação à série de Taylor, as objeções levantadas por Berkeley foram absorvidas por Maclaurin, que chegou a uma série, chamada *Série de Maclaurin*, cuja abordagem será feita após falarmos brevemente sobre a vida de Maclaurin.

Colin Maclaurin (1698-1746) foi um brilhante matemático britânico que se tornou professor de Matemática da Universidade de Aberdeen aos dezenove anos de idade por meio de um exame extremamente competitivo. Neste exame ele apresentou a dedução da chamada *Série de Maclaurin*, que posteriormente apareceu em seu livro *Treatise on Fluxions*, publicado em Edinburgh, em 1742. O procedimento de Maclaurin será descrito a seguir.

Seja

$$y(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \cdots ,$$

em que os coeficientes $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots$ são números fixados a ser determinados. Como $y(0) = A_0$ e admitindo que a função $y$ seja derivável infinitas vezes, teremos:

$$\frac{dy}{dx}(x) = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \cdots$$

e fazendo $x = 0$ obtemos

$$\frac{dy}{dx}(0) = A_1.$$

Analogamente,

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x) = 2A_2 + 3 \cdot 2A_3 + 4 \cdot 3A_4x^2 + \cdots$$

e assim

$$\frac{d^2y}{dx^2}(0) = 2A_2$$

e prosseguindo dessa maneira

$$\frac{d^n y}{dx^n}(x) = n!A_n + (n+1)n(n-1)\ldots 2A_{n+1}x + (n+2)(n+1)\ldots 3A_{n+2}x^2 + \cdots$$

de modo que

$$\frac{d^n y}{dx^n}(0) = n!A_n.$$

Assim,

$$y(x) = y(0) + \frac{dy}{dx}(0)x + \frac{d^2y}{dx^2}(0)\frac{x^2}{2!} + \frac{d^3y}{dx^3}(0)\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

que é a chamada *Série de Maclaurin* da função $y$ em 0.

Evidentemente, Maclaurin ignorou o fato de que nem toda função que seja derivável infinitas vezes possui tal desenvolvimento, assim como a justificativa para derivarmos uma série termo a termo.

Estas questões serão respondidas nas aulas de Análise.