Aula 10

Cálculo de primitivas ou de antiderivadas

Objetivos

- Calcular primitivas de funções usando regras elementares de primitivação.
- Calcular primitivas de funções pelo método da substituição.
- Calcular primitivas de funções usando o método da integração por partes.

Esta aula será dedicada às técnicas que nos permitirão calcular primitivas que não sejam obtidas por simples inspeção. Recordemos que $F(x)$ é uma primitiva ou antiderivada de uma função $f(x)$ em um intervalo I se $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$, sendo que o símbolo $\int f(x)dx$ designa

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

1 Regras elementares para cálculo de primitivas

Por questões de completeza estabeleceremos não apenas novas regras como também recordaremos outras que já foram citadas na aula 8. Nas regras a seguir, o símbolo C representará sempre uma constante arbitrária.

Regra 1. $\displaystyle\int 0\, dx = C.$

Regra 2. $\displaystyle\int 1\ dx = x + C.$

Regra 3. $\displaystyle\int a\ dx = ax + C,$ em que a é uma constante.

Regra 4. $\displaystyle\int x^r\ dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C,$ para qualquer número racional $r \neq -1$

Regra 5. $\displaystyle\int af(x)dx = a\int f(x)dx,$ qualquer seja a constante a

Regra 6. $\displaystyle\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

Regra 7. $\displaystyle\int (f(x)-g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx.$

Regra 8. $\displaystyle\int (g(x))^r g'(x)dx = \frac{1}{r+1}(g(x))^{r+1} + C,$ para todo número racional $r \neq -1$.

Outras técnicas de integração serão vistas. Antes de passarmos a elas faremos uma seqüência de exemplos, a fim de que o leitor fixe definitivamente as regras já estabelecidas.

Exemplo 96. Calculemos a integral

$$\int x^6 dx$$

Neste caso basta aplicar diretamente a regra 4.

$$\int x^6 dx = \frac{1}{7}x^7 + C$$

Exemplo 97. Calculemos

$$\int \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx$$

Observemos inicialmente que

$$\int \frac{1}{\sqrt[5]{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{5}}dx.$$

Agora, tal como no exemplo anterior, basta aplicar diretamente a regra 4, para obter

$$\int \frac{1}{\sqrt[5]{x}}dx = \frac{5}{4}x^{\frac{4}{5}} + C.$$

Exemplo 98. Calculemos a integral indefinida

$$\int (2x^2 - 5x + 3)dx.$$

Aplicando as regras 5, 6 e 7, obtemos

$$\int (2x^2 - 5x + 3)dx = 2\int x^2dx - 5\int xdx + \int 3dx$$

Segue-se das regra 3 e 4 que

$$\int (2x^2 - 5x + 3)dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x + C.$$

Exemplo 99. Calculemos a seguinte integral indefinida

$$\int (3s + 4)^2ds.$$

Observemos que

$$\int (3s + 4)^2ds = \frac{1}{3}\int (3s + 4)^2 3ds$$

Assim, podemos aplicar a regra 8 para obter

$$\int (3s + 4)^2ds = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}(3s + 4)^3\right) + C = \frac{1}{9}(3s + 4)^3 + C.$$

2 Método da substituição

Para resolver uma integral que possa ser escrita na forma

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

podemos lançar mão de um processo chamado *método da substituição*, que consiste em tomar $u = g(x)$ e, portanto, $du = g'(x)dx$, de modo que a integral anterior pode ser reescrita como

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du.$$

Assim, a variável de integração, que era x, foi substituída pela nova variável u.

Vejamos alguns problemas.

Exemplo 100. Calculemos a integral $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

Observemos que essa integral pode ser escrita como

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \cos(\sqrt{x}\,)\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx.$$

Fazendo $u = \sqrt{x}$, obtemos $du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$. Assim,

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \cos u\,du = 2\operatorname{sen} u = 2\operatorname{sen}(\sqrt{x}) + C.$$

Exemplo 101. Calculemos a integral $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$.

Façamos $u = x+1$, logo $du = dx$. Então

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx &= \int \frac{u-1}{\sqrt{u}}du \\
&= \int \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}\right) du \\
&= \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} + C \\
&= \frac{2}{3}\left(\sqrt{u}\right)^3 - 2\sqrt{u} + C \\
&= \frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 - 2\sqrt{x+1} + C \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{x+1}(x-2) + C
\end{aligned}$$

Exemplo 102. Calculemos $\displaystyle\int \sqrt[3]{x^3-2x+1}dx$.

Notemos que $x^2-2x+1 = (x-1)^2$. Assim, fazendo $u = x-1$, $du = dx$. Então

$$\begin{aligned}
\int \sqrt[3]{x^3-2x+1}dx &= \int \sqrt[3]{(x-1)^2}dx \\
&= \int \sqrt[3]{u^2}du \\
&= \int u^{\frac{2}{3}}du \\
&= \frac{3}{5}u^{\frac{5}{3}} + C \\
&= \frac{3}{5}\left(\sqrt[3]{u}\right)^5 + C \\
&= \frac{3}{5}\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^5
\end{aligned}$$

3 Integração por partes

Sejam f e g funções deriváveis em um certo intervalo I. Usando a *regra do produto* para a derivação

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

obtemos

$$f(x)g'(x) = (f(x)g(x))' - f'(x)g(x).$$

Assim,

$$\int f(x)g'(x)dx = \int (f(x)g(x))'dx - \int f'(x)g(x)dx$$

o que nos fornece

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

que é a chamada *fórmula de integração por partes.* Tal fórmula é mais usualmente apresentada da seguinte maneira. Chamemos $u = f(x)$ e $dv = g'(x)dx$, de modo que

$$du = f'(x)dx \text{ e } v = g(x)$$

e assim temos a outra forma para a *fórmula de integração por partes*

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 103. Calculemos a integral

$$\int x \cos x dx.$$

Para aplicar a fórmula de integração por partes devemos escolher convenientemente u e dv observando que u deve ser derivada e dv deve ser integrada, de modo que a integral resultante se torne mais simples do que a integral original. No presente caso, façamos

$$u = x \text{ e } dv = \cos x dx$$

o que nos dá

$$du = dx \text{ e } v = \operatorname{sen} x$$

donde

$$\int x \cos x dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C.$$

Exemplo 104. Calculemos

$$\int x^2 \cos x dx.$$

Chamemos $u = x^2$ e $dv = \cos x dx$ para obter

$$du = 2xdx \ \text{ e } \ \int dv = \int \cos x dx,$$

e assim $v = \operatorname{sen} x$. Logo,

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \operatorname{sen} x - \int (\operatorname{sen} x) 2x dx$$

e observemos que devemos integrar por partes o termo

$$\int x \operatorname{sen} x dx.$$

Façamos

$$u = x \ \text{ e } \ dv = \operatorname{sen} x dx$$

o que fornece

$$du = dx \ \text{ e } \ v = -\cos x.$$

Daí,

$$\int x \operatorname{sen} x = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + C.$$

Voltando à integral $\int x^2 \cos x dx$, teremos

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C_1,$$

em que C_1 é a constante $-2C$.

Para nos certificarmos de que os cálculos efetuados estão corretos, podemos derivar a função

$$x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C_1$$

cujo resultado deve ser $x^2 \cos x$. De fato,

$$\begin{aligned}
&(x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C_1)' \\
&\qquad = 2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x + 2 \cos x - 2x \operatorname{sen} x - 2 \cos x \\
&\qquad = x^2 \cos x,
\end{aligned}$$

o que mostra que os cálculos efetuados estão corretos. Evidentemente, após o estudante adquirir prática no processo de integração por partes, esta verificação final pode ser dispensada.

Deixaremos certas integrais por partes, envolvendo exponencial, logaritmos, etc., para aulas futuras.

Exemplo 105. Calculemos

$$\int x\text{sen}\,(kx)dx.$$

em que k é uma constante não-nula. Façamos

$$u = x \;\text{ e }\; dv = \text{sen}\,(kx)dx,$$

donde

$$du = dx \;\text{ e }\; v = -\frac{\cos(kx)}{k}$$

o que implica

$$\begin{aligned}\int x\text{sen}\,(kx)dx &= -\frac{x\cos(kx)}{k} + \frac{1}{k}\int \cos(kx)dx \\ &= -\frac{x\cos(kx)}{k} + \frac{1}{k^2}\text{sen}\,(kx) + C.\end{aligned}$$

Observa-se que, ao calcularmos integrais indefinidas, sempre surge a chamada constante de integração. Em alguns casos pode-se determinar tal constante de integração. Vejamos um exemplo no qual isso ocorre.

Exemplo 106. Determinemos a curva que passa pelo ponto $(2,3)$ e cuja declividade da reta tangente a ela, em cada um de seus pontos (x,y), é dada por $-\dfrac{x}{y}$.

Seja $y = f(x)$ a equação dessa curva. Assim,

$$y' = -\frac{x}{y},$$

pois a derivada y' mede a declividade da reta tangente em cada um de seus pontos. Daí, $yy' = -x$ e observando que, usando a regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx}[y^2] = 2yy',$$

teremos $2yy' = -2x$. Logo

$$\frac{d}{dx}[y^2] = -2x$$

o que nos diz que y^2 é primitiva de $-2x$. Pela definição de primitiva, tem-se

$$y^2 = \int -2x dx = -x^2 + C,$$

em que C é a constante de integração. Assim,

$$x^2 + y^2 = C$$

é a expressão algébrica de todas as curvas cuja declividade da reta tangente em cada um de seus pontos é $-\dfrac{x}{y}$. Desta última expressão tem-se que $y \neq 0$. Além disso, como $x^2 + y^2 > 0$, quaisquer que sejam $(x, y), y \neq 0$, façamos $C = R^2, R > 0$, e daí

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \text{ ou } y = -\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Observando-se que no enunciado exige-se que o ponto $(3, 4)$ pertença à curva, façamos $x = 3$ e $y = 4$ para obter

$$3^2 + 4^2 = R^2 = 25$$

o que nos fornece $R = 5$, de modo que a curva procurada é $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ que é o semicírculo de centro $(0, 0)$ e raio 5.

4 Funções trigonométricas inversas

Introduziremos agora a noção de função trigonométrica inversa. Comecemos com a inversa da função sen . Como é bem conhecido, a função sen não é injetiva e em vista disso não existirá sua inversa. No entanto, se restringirmos seu domínio, por exemplo, ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, teremos que a função sen , restrita a este intervalo,

$$\operatorname{sen} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$$

é injetiva e sobrejetiva, de modo que existe a sua inversa, designada por arcsen ,

$$\operatorname{arcsen} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Dessa maneira

$$y = \operatorname{arcsen} x$$

é equivalente a dizer que

$$x = \operatorname{sen} y.$$

Derivando ambos os membros de $x = \operatorname{sen} y$, observando que y é função de x e usando a regra da cadeia, obtém-se

$$1 = y' \cos y.$$

Restringindo os valores de y ao intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, a fim de que $\cos y \neq 0$, o que restringirá os valores de x ao intervalo aberto $(-1, 1)$, obtém-se

$$y' = \frac{1}{\cos y}.$$

Como $x = \operatorname{sen} y$ implica $\cos y = \sqrt{1-x^2}$, teremos $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, o que nos fornece as seguintes regras para derivação e integração da função arcsen

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C \tag{10.1}$$

Tudo o que fizemos a fim de determinar uma função inversa para a função sen e calcular a derivada e a primitiva dessa inversa pode ser reproduzido para a função cos em que, nesse caso, restringimos x ao intervalo $(-1,1)$, o que restringe y a $(0,\pi)$. Assim,

$$\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\arccos x}$$

$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + C.$$

Vejamos o que acontece no caso da função tangente. Observemos que essa função, restrita ao intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

$$\operatorname{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-\infty, +\infty),$$

é injetiva e sobrejetiva (além de contínua, derivável, etc.), de modo que podemos definir sua inversa

$$\operatorname{tg} : (-\infty, +\infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

de modo que $y = \operatorname{arctg} x$ se, e somente se, $x = \operatorname{tg} y$. Derivando ambos os membros desta última igualdade, lembrando que y é uma função de x, e usando a regra da cadeia, obtemos

$$1 = y' \cdot \sec^2 y.$$

Como $\sec^2 y = 1 + \operatorname{arctg}^2 y = 1 + x^2$, teremos

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

de onde resulta

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = (\operatorname{arctg} x) + C.$$

Vejamos alguns exemplos de integrais nas quais aparecem termos da forma $\sqrt{k^2 - x^2}$ ou $\dfrac{1}{k^2+x^2}$

Exemplo 107. Calculemos a integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{k^2 - x^2}} dx,$$

em que k é uma constante positiva. Observemos que a expressão $\dfrac{1}{\sqrt{k^2 - x^2}}$, a menos da constante k, é essencialmente aquela que aparece em (10.1). A fim de que elas se tornem exatamente iguais, façamos $x = ku$, de modo que $dx = kdu$ e daí

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{k^2 - x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{k^2 - k^2u^2}} kdu \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du \\
&= \operatorname{arcsen} u + C \\
&= \operatorname{arcsen} \left(\frac{x}{k}\right) + C.
\end{aligned}$$

Exemplo 108. Calculemos a integral indefinida

$$\int \frac{1}{k^2 + x^2} dx.$$

Procedendo como no exemplo anterior, façamos $x = ku$, de onde $dx = kdu$, e assim

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{k^2 + x^2} dx &= \int \frac{k}{k^2 + k^2u^2} du \\
&= \int \frac{1}{1 + u^2} du \\
&= \frac{1}{k} \operatorname{arctg} u + C \\
&= \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{k}\right) + C.
\end{aligned}$$

Exemplo 109. Calculemos

$$\int x \operatorname{arcsen} x dx.$$

Façamos $u = \operatorname{arcsen} x$ e $dv = xdx$ de onde

$$du = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx, \quad v = \frac{x^2}{2}.$$

Portanto,

$$\int x \operatorname{arcsen} x dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arcsen} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

em que esta última integral é resolvida por substituição. Mais precisamente, fazendo $x = \operatorname{sen}\theta$, o que implica $dx = \cos\theta d\theta$, obtém-se

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \operatorname{sen}^2\theta d\theta = \frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4} + C = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$$

Portanto,

$$\int x \operatorname{arcsen} x dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arcsen} x - \frac{1}{4}\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C.$$

5 Exercícios resolvidos

1. Calcule $\int \frac{1}{x^6}dx$.

   Solução. Basta observar que

   $$\int \frac{1}{x^6}dx = \int x^{-6}dx$$

   e aplicar a regra 4. Assim,

   $$\int \frac{1}{x^6}dx = -\frac{1}{5}x^{-5} + C.$$

2. Calcule a integral $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

   Solução. Observemos que

   $$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int x^{-\frac{2}{3}}dx$$

   Assim, segue da regra 4 que

   $$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx = 3\sqrt[3]{x} + C.$$

3. Calcule a integral indefinida $\int (1-x)\sqrt{x}dx$.

   Solução. Inicialmente observemos que

   $$\int (1-x)\sqrt{x}dx = \int (1-x)x^{\frac{1}{2}}dx = \int (x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}})dx$$

   Usando agora a regra 7 e depois a regra 4, obtém-se

   $$\begin{aligned}\int (1-x)\sqrt{x}dx &= \int x^{\frac{1}{2}}dx - \int x^{\frac{3}{2}}dx \\ &= \frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C \\ &= 2x^{\frac{3}{2}}(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}x) + C.\end{aligned}$$

4. Calcule $\int \sqrt[3]{1-x^2}xdx$.

   Solução. Essa integral pode ser reescrita como segue

$$\int \sqrt[3]{1-x^2}xdx = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{\frac{1}{3}}(-2x)dx$$

   Agora basta aplicar a regra 8.

$$\int \sqrt[3]{1-x^2}xdx = -\frac{1}{2}(\frac{1}{\frac{4}{3}}(1-x^2)^{\frac{4}{3}}) + C = -\frac{3}{8}(1-x^2)^{\frac{4}{3}} + C.$$

5. Calcule $\int \sin^2 x \cos x dx$.

   Solução. A resolução dessa integral é conseqüência imediata da regra 8.

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int (\sin x)^2 \cos x dx = \frac{1}{3}(\sin x)^3 + C.$$

6 Exercícios propostos

1. Calcule as primitivas (antiderivadas) a seguir:

   (a) $\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}dx$

   (b) $\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}dx$

   (c) $\int \cos 3x dx$

   (d) $\int \frac{\operatorname{sen} z}{\cos^2 z}dz$

   (e) $\int \frac{1}{1+\cos x}dx$

   (f) $\int (x-2)^{\frac{3}{2}}dx$

   (g) $\int \frac{dx}{(x-1)^3}$

   (h) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}}dx$

   (i) $\int \sqrt{3x-1}dx$

   (j) $\int (2x^2+3)^{\frac{1}{3}}xdx$

(k) $\displaystyle\int 5\sqrt[3]{x^2}dx$

(l) $\displaystyle\int (x^2-1)\sqrt{x}dx$

(m) $\displaystyle\int \frac{\text{sen }\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

(n) $\displaystyle\int (1-x^2)^5 x dx$

(o) $\displaystyle\int (5\text{sen }x + 3\cos x)dx$

(p) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx$

(q) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}dx$

(r) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2}dx$

(s) $\displaystyle\int \cos^2 x dx$

(t) $\displaystyle\int \text{sen }^2 x dx$

(u) $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

(v) $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

(w) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

2. Encontre a equação da curva que passa pelo ponto $(1, 2)$ e cuja inclinação em cada ponto $(x, y), x > 0$, é dada por $x^{\frac{1}{2}} + 2$.

3. Uma partícula se move em linha reta com velocidade $v(t) = t^2 + 2$. Determine a distância percorrida pela partícula, de $t = 1$ a $t = 3$.

7 Respostas dos exercícios propostos

1. (a) $\dfrac{1}{15}\sqrt{x}\left(15+10\,x+3\,x^2\right)+C$

   (b) $x+\dfrac{1}{x+1}+C$

   (c) $\dfrac{1}{3}\sin(3\,x)+C$

   (d) $\dfrac{1}{\cos z}+C$

   (e) $\dfrac{x}{1+\cos x}+C$

   (f) $\dfrac{2}{5}(x-2)^{\frac{5}{2}}+C$

   (g) $-\dfrac{1}{2(x-1)^2}+C$

   (h) $2\sqrt{x+3}+C$

   (i) $\dfrac{2}{9}(3\,x-1)^{\frac{3}{2}}+C$

   (j) $\dfrac{3}{16}\left(2\,x^2+3\right)^{\frac{4}{3}}+C$

   (k) $3x^{\frac{5}{3}}+C$

   (l) $2(\sqrt{x})^3(\dfrac{1}{7}x^2-\dfrac{1}{3})+C$

   (m) $-2\cos\sqrt{x}+C$

   (n) $-\dfrac{1}{12}(1-x^2)^6$

   (o) $-5\cos x+3\text{sen }x+C$

   (p) $-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x^2}+C$

   (q) $\dfrac{2}{15}(x+1)^{\frac{3}{2}}(-2+3\,x)+C$

   (r) $x-\dfrac{1}{x}+C$

   (s) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{\text{sen }2x}{4}+C$

   (t) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{\text{sen}\,x2x}{4}+C$

   (u) $-\dfrac{3}{4}\sqrt{1-4\,x^2}+C$

   (v) $\dfrac{3}{2}\text{arcsen }(2\,x)+C$

   (w) $\text{arcsen}\,(\dfrac{1}{2}\,x)$

2. $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x - \frac{2}{3}$
3. 12 unidades de comprimento

Nesta aula você aprendeu:

- a calcular primitivas de funções usando regras elementares de primitivação.
- a calcular primitivas de funções pelo método da substituição.
- a calcular primitivas de funções usando o método da integração por partes.