Aula 11

O logaritmo natural

Objetivos

- Estudar o logaritmo natural.
- Fazer aplicações da derivada da função logarítmica.
- Fazer aplicações da primitiva da função logarítmica.

Na aula passada vimos a conhecida fórmula para o cálculo da primitiva da função $y = x^r$, que é dada por

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \neq -1.$$

Resta-nos saber o que acontece quando $r = -1$, ou seja, o que devemos fazer para encontrar a primitiva ou antiderivada de $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$. Esta aula é dedicada a definir e a estudar as propriedades dessa importante função chamada logaritmo natural (ou neperiano) e indicada por $y = \ln x$.

1 O logaritmo natural

O gráfico de $y = \frac{1}{t}$, para $t > 0$, é conhecido do leitor

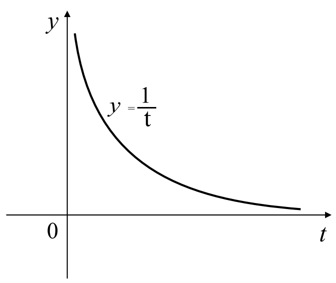

Fig. 11.1

e está esboçado na figura 11.1, sendo um ramo de uma hipérbole equilátera.

Para $x > 1$ a integral

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt$$

representa a área sob a curva $y = \frac{1}{t}$ e acima do eixo ot, entre os valores $t = 1$ e $t = x$. Veja figura 11.2.

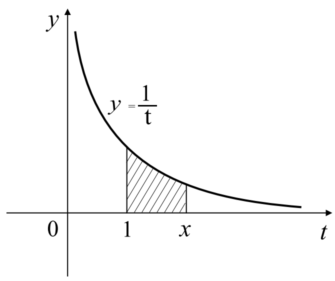

Fig. 11.2

Para $0 < x < 1$ a integral acima pode ser escrita como

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = -\int_x^1 \frac{1}{t} dt,$$

e assim, neste caso, esta última integral representa a área sob a curva, limitada inferiormente pelo eixo ot, entre $t = 1$ e $t = x$, precedida do sinal negativo. Veja a figura 11.3. Se $x = 1$, a integral dá zero.

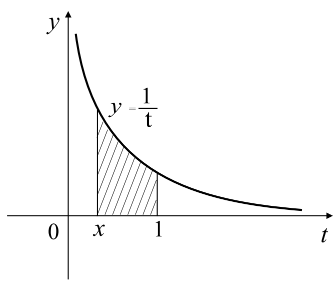

Fig. 11.3

Podemos, então, definir a função logaritmo natural da seguinte maneira.

Definição 2. Definimos a função *logaritmo natural*,

$$\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

por

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad \text{para} \ \ t > 0.$$

Deve-se observar que a integral $\int_1^x \frac{1}{t}dt$ existe, pois a função $\frac{1}{t}$ é contínua para $t > 0$, donde se conclui que a integral que define a função *logaritmo* está bem definida, lembrando que qualquer função contínua, definida em intervalos fechados e limitados, é integrável.

Esta maneira, aparentemente não-natural, de definir a função logaritmo natural tornar-se-á clara à medida que formos avançando no seu estudo.

Em virtude do teorema fundamental do Cálculo, temos que ln é derivável e

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = (\ln)'(x) = \frac{1}{x}, \text{ para } x > 0.$$

Portanto, o logaritmo natural é uma primitiva ou antiderivada de $\frac{1}{x}$, somente para $x > 0$. Uma primitiva no caso em que $x \neq 0$ será construída futuramente.

Listaremos, a seguir, algumas propriedades da função logaritmo natural as quais começarão a tornar claro o porquê de chamarmos tal função de logaritmo.

Propriedade 1. $\ln 1 = 0$, porque

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}dt = 0.$$

Propriedade 2. Se $x > 1$, então $\ln x > 0$.

Isto é claramente verdade em virtude de integrais de funções positivas serem positivas e assim $\int_1^x \frac{1}{t}dt$ representará a área sob o gráfico de $\frac{1}{t}$ e acima do eixo ox, para t variando de 1 até x.

Propriedade 3. Se $0 < x < 1$, então $\ln x < 0$.

Isto se segue do fato

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}dt.$$

e de que a integral $\int_x^1 \frac{1}{t}dt$ representa a área sob o gráfico de $\frac{1}{t}$ e acima do eixo ox, para t variando de x até 1.

Propriedade 4. $\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{1}{x}$

Isto se segue dos seguintes fatos: Se $x > 0$, temos que $|x| = x$ e assim

$$\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}.$$

Se $x < 0$, temos que $|x| = -x$ e daí

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{d}{dx}(\ln(-x)).$$

Fazendo $u = -x > 0$, e usando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{d}{dx}(\ln(-x)) = \frac{d}{du}(\ln u) \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot (-1) = \frac{1}{-u} = \frac{1}{x}.$$

Propriedade 5 $\ln uv = \ln u + \ln v$

Inicialmente, observemos que

$$\frac{d}{dx}(\ln(ax)) = \frac{1}{ax}\frac{d}{dx}(ax),$$

em virtude da regra da cadeia. Dessa forma,

$$\frac{d}{dx}(\ln(ax)) = \frac{1}{ax}\,a = \frac{1}{x}.$$

Isto nos diz que as funções $\ln x$ e $\ln(ax)$ possuem derivadas iguais. Conseqüentemente,

$$\ln(ax) = \ln x + K,$$

para alguma constante K. Daí, quando $x = 1$, obteremos

$$\ln a = \ln 1 + K = 0 + K = K.$$

Conseqüentemente,

$$\ln(ax) = \ln a + \ln x.$$

Fazendo $a = u$ e $x = v$, obtemos a fórmula pretendida.

Propriedade 6. $\ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln u - \ln v$

Esta propriedade segue-se da anterior da seguinte maneira:

$$\ln u = \ln\left(\frac{u}{v} \cdot v\right) = \ln\left(\frac{u}{v}\right) + \ln v,$$

donde

$$\ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln u - \ln v.$$

Propriedade 7. $\ln\left(\frac{1}{v}\right) = -\ln v$

Na propriedade anterior, façamos $u = 1$ para obter

$$\ln\left(\frac{1}{v}\right) = \ln 1 - \ln v = -\ln v.$$

Propriedade 8. Se r for um número racional e x um número positivo, então

$$\ln(x^r) = r\ln x.$$

Pela regra da cadeia

$$\frac{d}{dx}(\ln(x^r)) = \frac{1}{x^r}(rx^{r-1}) = \frac{r}{x} = \frac{d}{dx}(r\ln x).$$

Deste modo, como as funções $\ln x^r$ e $r\ln x$ possuem derivadas iguais, elas diferem por uma constante, ou seja, existe uma constante K tal que

$$\ln(x^r) = r\ln x + K.$$

Fazendo $x = 1$, obtém-se $\ln 1 = r\ln 1 + K$ e desde que $\ln 1 = 0$, concluímos que $K = 0$ e então

$$\ln(x^r) = r\ln x.$$

Propriedade 9. A função $\ln x$ é crescente.

Basta observar que

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} > 0$$

desde que $x > 0$. A propriedade segue-se do fato de que, se a derivada de uma função for positiva, então ela será crescente.

Propriedade 10. O gráfico da função ln é côncavo para baixo.

Basta observar que

$$\frac{d^2}{dx^2}(\ln x) = \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{d}{dx}(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

Propriedade 11. $\frac{1}{2} < \ln 2 < 1$

Observemos a figura 11.4 e conclua que a área sob o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$, entre $x = 1$ e $x = 2$, e acima do eixo ox é maior do que a área do retângulo com base $[1, 2]$ e altura $\frac{1}{2}$, que é $\frac{1}{2}$ que, por sua vez, é menor que a área do retângulo de base $[1, 2]$ e altura 1, a qual é 1.

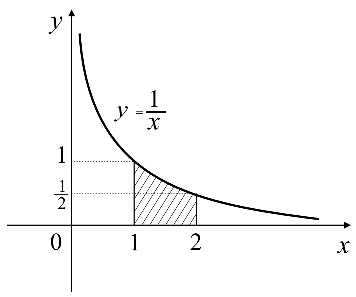

Fig. 11.4

Mais precisamente, $1 \cdot \frac{1}{2} < \int_1^2 \frac{1}{x} dx < 1 \cdot 1$, ou seja $\frac{1}{2} < \int_1^2 \frac{1}{x} dx < 1$.
Portanto,

$$\frac{1}{2} < \ln 2 < 1.$$

Propriedade 12. $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

Seja k um inteiro positivo qualquer. Então, para $x > 2^{2k}$, teremos

$$\ln x > \ln(2^{2k})$$

pois a função ln é crescente. Assim,

$$\ln x > \ln(2^{2k}) = 2k \ln 2 > 2k \left(\frac{1}{2}\right) = k.$$

Portanto, como $x \to +\infty$, temos que $\ln x$ excede qualquer número inteiro positivo k, o que implica que

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty.$$

Propriedade 13. $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

Façamos $u = \frac{1}{x}$ e observemos que $x \to 0^+$ se, e somente se, $u \to +\infty$.
Portanto

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = \lim_{u \to +\infty} \ln \left(\frac{1}{u}\right) = \lim_{u \to +\infty} (-\ln u) = -\lim_{u \to +\infty} \ln u = -\infty.$$

Propriedade 14.

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)| + C$$

Isto se segue da Regra da Cadeia e do seguinte fato

$$\frac{d}{dx}(\ln |g(x)|) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

bastando observar que

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \int \frac{d}{dx}(\ln |g(x)|) dx = \ln |g(x)| + C.$$

Esta propriedade pode ser reescrita como: Façamos $u = g(x)$, o que nos permite concluir que $du = g'(x)dx$ e daí

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |g(x)| + C.$$

Observemos que as propriedades do logaritmo listadas até agora nos fazem tirar algumas conclusões importantes que serão utilizadas na aula 12 e verificar que o seu gráfico é esboçado na figura 11.5.

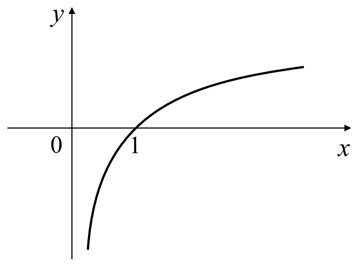

Fig. 11.5

Na figura 11.6 encontra-se esboçado o gráfico da função $\ln|x|$.

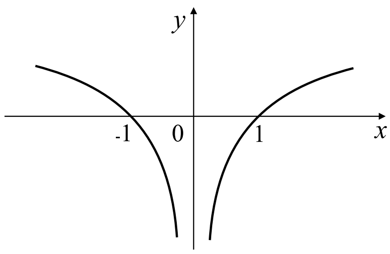

Fig. 11.6

Antes de resolvermos alguns exercícios, introduziremos uma técnica em que usamos a derivada do logaritmo, com algumas de suas propriedades, a fim de facilitar o cálculo da derivada de funções que, sem essa ajuda, tornaria o nosso trabalho bastante árduo. Tal técnica é chamada *derivação logarítmica*.

2 Derivação logarítmica

Ilustremos esse método por meio de exemplos.

Exemplo 110. Derivemos a função

$$y = (1 - 3x^2)^3(\cos 2x)^4.$$

Calculando o logaritmo de ambos os membros da expressão acima, obtém-se

$$\ln y = \ln(1 - 3x^2)^3 + \ln(\cos 2x)^4.$$

Daí,

$$\ln y = 3\ln(1 - 3x^2) + 4\ln(\cos 2x)$$

e derivando ambos os seus membros

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{1-3x^2} \cdot (-6x) + \frac{4}{\cos 2x} \cdot (-\text{sen}\, 2x) \cdot (2) = -\frac{18x}{1-3x^2} - 8\text{tg}2x.$$

Conseqüentemente

$$y' = -(1-3x^2)^3(\cos 2x)^4 \left(\frac{18x}{1-3x^2} + 8\text{tg}\, 2x \right).$$

Exemplo 111. Calcule a derivada de

$$y = \frac{x(1-x^2)^2}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Usando a derivação logarítmica, obtemos

$$\ln y = \ln x + 2\ln(1-x^2) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

logo,

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + 2\frac{1}{1-x^2}(-2x) - \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}(2x) = \frac{1}{x} - \frac{4x}{1-x^2} - \frac{x}{1+x^2}$$

e, após algumas manipulações algébricas, obtém-se

$$y' = \frac{(1-5x^2-4x^4)(1-x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

Com a introdução da função logaritmo podemos considerar uma nova técnica de integração chamada *integração por frações parciais.*

3 Integração por frações parciais

A técnica de integração por frações parciais consiste em determinar primitivas de funções racionais decompondo tal tipo de funções em soma de funções racionais mais simples e cujas primitivas sejam calculadas facilmente. Comecemos com um exemplo simples.

Exemplo 112. Calculemos a integral

$$\int \frac{1}{x^2-1} dx.$$

A idéia é decompor a função racional $\dfrac{1}{x^2-1}$ na forma

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

em que A e B são constantes a ser determinadas. Dessa última igualdade obtém-se

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(A+B)x + A - B}{x^2-1}.$$

Daí, por uma simples comparação, tem-se

$$\begin{aligned} A+B &= 0 \\ A-B &= 1 \end{aligned}$$

que é um sistema linear cuja solução é $A = \frac{1}{2}$ e $B = -\frac{1}{2}$. Portanto,

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\,.$$

Integrando ambos os membros dessa última igualdade

$$\int \frac{1}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx\,,$$

donde

$$\int \frac{1}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C.$$

Se quisermos simplificar esta última expressão, obteremos

$$\int \frac{1}{x^2-1}dx = \ln\left[K\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{1/2}\right],$$

em que $C = \ln K$. Verifique a validez dessa última igualdade.

Exemplo 113. Calculemos a integral

$$\int \frac{3x-1}{x^2+x-2}dx.$$

Usemos um procedimento semelhante àquele do exemplo anterior e escrevamos

$$\frac{3x-1}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

observando que $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$. Após um cálculo simples chegamos a

$$A = \frac{2}{3} \text{ e } B = \frac{7}{3}\,.$$

Assim

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-1}{x^2+x-2}dx &= \frac{2}{3}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{7}{3}\int \frac{1}{x+2}dx \\ &= \frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{7}{3}\ln|x+2| + C. \end{aligned}$$

Exemplo 114. Em alguns casos o polinômio que figura no denominador não pode ser decomposto em fatores de primeiro grau reais, pois as suas raízes são complexas. Em virtude disso, devemos usar outra estratégia. Vejamos o que acontece com a integral

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx.$$

Observemos que o trinômio do segundo grau x^2+2x+2 não possui raízes reais pois o seu discriminante é negativo. Verifique isso. No entanto, ele pode ser escrito na forma

$$x^2+2x+2 = x^2+2x+1+1 = (x+1)^2+1$$

e a integral em estudo se apresenta como

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx.$$

Neste ponto o estudante deve recordar a integral

$$\int \frac{1}{u^2+1}du = \arctan u + C.$$

Portanto, fazendo $u = x+1$ tem-se $du = dx$ e assim

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx = \int \frac{1}{u^2+1}du = \arctan u + C =$$

$$\int \frac{1}{u^2+1}du = \arctan u + C = \arctan(x+1) + C.$$

Exemplo 115. Vejamos a integral

$$\int \frac{x+1}{(x+1)^2+1}dx.$$

O que fazer com essa integral? Observe que podemos fazer a mudança de variáveis $u = x+1$ e obter

$$\int \frac{x+1}{(x+1)^2+1}dx = \int \frac{u}{u^2+1}du = \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+1}du.$$

Nesta última integral o numerador do integrando é exatamente a derivada da função que figura no denominador, de modo que

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{(x+1)^2+1}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+1}du = \frac{1}{2}\ln(u^2+1) + C \\
&= \frac{1}{2}\ln(u^2+1) + C \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + C.
\end{aligned}$$

4 Exercícios resolvidos

1. Calcule a derivada de $\ln(5x+3)$.

   Solução. Usando a regra da cadeia
   $$\frac{d}{dx}(\ln(5x+3)) = \frac{d}{dx}(5x+3)\cdot\frac{1}{5x+3} = \frac{5}{5x+3}.$$

2. Calcule a derivada de $\sqrt{\ln x}$.

   Solução. Usando a regra da cadeia
   $$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sqrt{\ln x}) &= \frac{d}{dx}(\ln x)^{\frac{1}{2}}\\ &= \frac{1}{2}(\ln x)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(\ln x)\\ &= \frac{1}{2}(\ln x)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{x}\\ &= \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}.\end{aligned}$$

3. Calcule a integral
   $$\int \frac{2x}{x^2+1}dx.$$

   Solução. Basta observar que fazendo $g(x) = x^2+1$ obtemos $g'(x) = 2x$. Daí
   $$\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx = \ln|x^2+1| + C = \ln(x^2+1) + C.$$

4. Calcule a integral
   $$\int \operatorname{tg} x dx.$$

   Solução. Observemos que
   $$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}dx = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}dx.$$
   Fazendo $g(x) = \cos x$ tem-se $g'(x) = -\operatorname{sen} x$ e assim
   $$\int \operatorname{tg} x dx = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}dx = \int \frac{\cos' x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x| + C.$$

5. Calcule $\displaystyle\int \frac{4x^7}{3x^8-2}dx$.

   Solução. Para calcular a integral acima basta acompanhar os cálculos abaixo, justificando as passagens.
   $$\int \frac{4x^7}{3x^8-2}dx = \frac{1}{6}\int \frac{24x^7}{3x^8-2}dx = \frac{1}{6}\ln|3x^8-2| + C.$$

6. Calcule $\int \ln x dx, \quad x > 0.$

   Solução. Calculemos essa integral usando a técnica de integração por partes. Para isso, façamos

   $$u = \ln x \text{ e } dv = dx,$$

   de modo que $du = \dfrac{1}{x}$ e $v = x$.

   $$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C.$$

7. Calcule $\int \dfrac{\ln x}{x} dx.$

   Solução. Faça $u = \ln x$, o que nos dá $du = \dfrac{dx}{x}$ e assim

   $$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C.$$

8. Calcule a integral $\int \dfrac{dx}{x^2 - 9}$.

   Solução. Escrevamos $\dfrac{1}{x^2-9} = \dfrac{1}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x+3}$. Assim, $1 = A(x+3) + B(x-3)$ e daí $A = \dfrac{1}{6}$ e $B = -\dfrac{1}{6}$. Portanto,

   $$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2-9} &= \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+3} \\ &= \frac{1}{6}\ln|x-3| - \frac{1}{6}|x+3| + C \\ &= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C \end{aligned}$$

9. Calcule a integral $\int \dfrac{x}{(x+2)(x+3)} dx$.

   Solução. $\dfrac{x}{(x+2)(x+3)} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x+3}$.Assim, $x = A(x+3) + B(x+2)$ e daí $A = -2$ e $B = 3$. Logo,

   $$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x+2)(x+3)} &= \int -\frac{2}{x+2} dx + \int \frac{3}{x+3} dx \\ &= -2\ln|x+2| + 3\ln|x+3| + C \\ &= \ln\left|\frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}\right| + C \end{aligned}$$

10. Calcule a integral $\int \frac{x-5}{x^2(x+1)}dx$

Solução. $\frac{x-5}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$. Assim, $x - 5 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2$ e daí $A = 6$, $B = -5$ e $C = -6$. Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \int \frac{x-5}{x^2(x+1)}dx &= \int \frac{6}{x}dx - \int \frac{5}{x^2}dx - \int \frac{6}{x+1}dx \\ &= 6\ln|x| + \frac{5}{x} - 6\ln|x+1| + C \\ &= 6\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{5}{x} + C\,. \end{aligned}$$

5 Exercícios propostos

1. Encontre as derivadas das funções.
   (a) $y = \ln(x+3)^2$
   (b) $y = (\ln(x+3))^2$
   (c) $y = \ln(\operatorname{sen} 5x)$
   (d) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}\,)$
   (e) $y = x\ln x - x$
   (f) $y = \ln\sqrt{3-x^2}$

2. Calcule as seguintes primitivas.
   (a) $\int \frac{1}{7x}dx$
   (b) $\int \frac{x^8}{x^9-1}dx$
   (c) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$
   (d) $\int \frac{\operatorname{sen} 3x}{1-\cos 3x}dx$
   (e) $\int \frac{2x^4-x^2}{x^3}dx$
   (f) $\int \frac{\ln x}{x}dx$
   (g) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}dx$

3. Encontre a área sob a curva $y = \frac{1}{x}$ e acima do eixo ox, entre $x = 2$ e $x = 4$.

4. Calcule a integral $\int \frac{x}{(2x+3)^2} dx$.
5. Resolva a equação $2 \ln x = \ln(2x)$.
6. Calcule a integral $\int_1^2 \frac{x}{4x^2 - 2} dx$.
7. Mostre que $\ln x < \sqrt{x}$, para todo $x > 0$.

6 Respostas dos exercícios propostos

1. (a) $y' = \dfrac{2}{x+3}$

   (b) $y' = 2\,\dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$

   (c) $y' = 5\,\dfrac{\cos(5\,x)}{\sin(5\,x)}$

   (d) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

   (e) $y' = \ln x$

   (f) $y' = -\dfrac{x}{3-x^2}$

2. (a) $\dfrac{1}{7}\ln x + C$

   (b) $\dfrac{1}{9}\ln\left(x^9-1\right) + C$

   (c) $\ln(\ln x) + C$

   (d) $\dfrac{1}{3}\ln(1-\cos(3\,x)) + C$

   (e) $x^2 - \ln x + C$

   (f) $\dfrac{1}{2}(\ln x)^2 + C$

   (g) $-2\ln(-1+\sqrt{x}) + C$

3. $\ln 2$

4. $\dfrac{1}{4}\ln(2x+3) + \dfrac{3}{4(2x+3)} + C$

5. 2

6. $\dfrac{1}{8}\ln 7$

7. Sugestão: use o que você sabe sobre máximos e mínimos.

Nesta aula você aprendeu:

- O que é o logaritmo natural.
- a fazer aplicação da derivada da função logarítmica.
- a fazer aplicação da primitiva da função logarítmica.

7 Apêndice

História dos logaritmos

Os logaritmos surgiram como um instrumento para simplificar cálculos em que figuravam números muito grandes, principalmente aqueles oriundos de medições astronômicas. As propriedades que simplificavam tais cálculos eram aquelas que transformavam multiplicações em adições e divisões em subtrações.

Muito embora a formalização dos logaritmos tenha sido realizada por John Napier (1550-1617), um escocês proprietário de terras, que foi o primeiro a publicar, em 1614, uma tábua de logaritmos, a sua essência, ao que parece, foi levada em conta pelos antigos babilônios[1] que consideravam uma tabela em um tablete datado aproximadamente de 1888 a.C., dada por

Tabela 1

2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6

O leitor que analisar de maneira acurada esta tabela verificará que ela se estende obedecendo a uma regra geral, de modo que a tabela 2 a seguir é uma extensão da tabela 1

Tabela 2

2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8
512	9
1024	10
2048	11
4096	12

[1] Learn from the Masters, Editors Frank Swetz, John Fauvel, Otto Bekken, Bengt Johansson, Victor Katz, The Mathematical Association of America, 1995

e assim, caso queiramos calcular o produto 32×64, basta observar que 32 corresponde ao 5 e 64 corresponde ao 6. Somam-se $5+6=11$ e verifica-se a linha correspondente ao 11, na qual figura 2048. Assim, $32 \times 64 = 2048$.

Este foi, essencialmente, o procedimento usado por Napier, que usa *progressões aritméticas* e *progressões geométricas*, assuntos bem conhecidos dos matemáticos do século XVI. Vejamos como proceder. Consideremos uma progressão aritmética começando com 0 e com razão $a > 0$ e uma progressão geométrica começando com 1 e com razão $r > 0$ e vejamos a tabela 3, a seguir,

Tabela 3

1	0
r	a
r^2	$2a$
r^3	$3a$
r^4	$4a$
r^5	$5a$
r^6	$6a$
r^7	$7a$
r^8	$8a$
r^9	$9a$
$\vdots$	$\vdots$

em que se exibe uma correspondência biunívoca entre os elementos das duas colunas dada por $0 \leftrightarrow 1, a \leftrightarrow r, 2a \leftrightarrow r^2, \cdots na \leftrightarrow r^n$ para todo $n = 0, 1, 2, \cdots$ Assim, as funções f e g definidas por

$$f(na) = r^n \text{ e } g(r^n) = na$$

são funções inversas uma da outra, de modo que

$$g(r^n) + g(r^m) = na + ma = (m+n)a = g(r^n r^m),$$

ou de maneira mais concisa

$$g(x) + g(y) = g(xy).$$

Também

$$g(r^n) - g(r^m) = na - ma = (n-m)a = g\left(\frac{r^n}{r^m}\right),$$

ou

$$g(x) - g(y) = g\left(\frac{x}{y}\right).$$

Pode-se constatar, sem muita dificuldade, que todas as regras do logaritmo se verificam, ou seja, g nada mais é do que a função logaritmo conhecida com base r sendo a inversa de uma potência.

Somente na década de 1650 foi verificado por Isaac Newton (1642-1727), em seu *Waste Book* (1664-1665), que a área abaixo da hipérbole satisfaz as propriedades do logaritmo. Posteriormente, em 1668, Mercator encontra o logaritmo como uma série dada por

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$$

Evidentemente que o uso dos logaritmos como instrumento de cálculo está completamente ultrapassado, dado o advento das calculadoras, computadores, etc. No entanto, sua relevância perdura em virtude da função logarítmica, que se presta, em parceria com a função exponencial, a diversas aplicações práticas importantes. Isto ficará evidente, por exemplo, em várias aulas sobre *equações diferenciais*.