

Aula 12

A função exponencial e a função logarítmica

Objetivos

- Estudar a função exponencial.
- Calcular a derivada e a integral da função exponencial.

Como vimos na aula 11, a função logarítmica $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é injetiva e sobrejetiva. Portanto, existe a sua função inversa $\ln^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$. Esta aula é dedicada ao estudo dessa função, chamada função exponencial.

1 A função exponencial

Começemos com a seguinte definição.

Definição 3. Definimos a *função exponencial* $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ como sendo a inversa da função logaritmo natural $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Como as funções logaritmo e exponencial são inversas uma da outra, os seus gráficos são simétricos com relação à primeira bissetriz $y = x$, como mostra a figura 12.1.

Listaremos as propriedades da função exponencial que são, essencialmente, decorrentes das propriedades da função logarítmica.

Propriedade 1. $\exp x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Isto se segue da própria definição de exponencial pois, já que $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, a imagem da exponencial é exatamente o domínio do logaritmo que é o intervalo $(0, \infty)$.

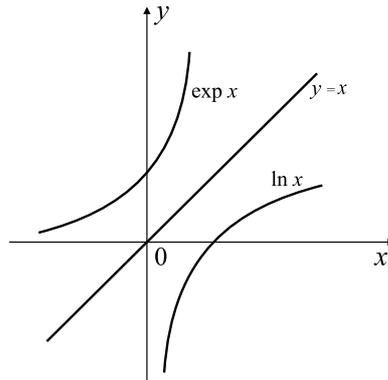


Fig. 12.1

Propriedade 2. $\ln(\exp x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Esse fato é decorrência da própria definição de função inversa e do fato de \exp ser a inversa de \ln .

Propriedade 3. $\exp(\ln x) = x$ para todo $x > 0$.

Justifica-se essa propriedade como no caso anterior.

Propriedade 4. $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ é uma função crescente.

Deve-se mostrar que se $u < v$ então $\exp u < \exp v$. Suponhamos que $u < v$. Como $u = \ln(\exp u)$ e $v = \ln(\exp v)$, tem-se $\ln(\exp u) < \ln(\exp v)$ e como \ln é crescente concluímos que $\exp u < \exp v$.

Propriedade 5. $\frac{d}{dx}(\exp x) = \exp x$ ou $\exp'(x) = \exp x$.

Inicialmente, observemos que se $y = \exp x$ então $\ln y = x$. Derivando ambos os membros desta última igualdade com relação a x , observando que y é uma função de x , obtemos

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = 1$$

e daí

$$\frac{y'}{y} = 1,$$

donde concluímos que

$$y' = \exp'(x) = y = \exp x.$$

Propriedade 6. Se $f(x)$ for uma função derivável, então a função $y = \exp f(x)$ é derivável e $y' = f'(x) \exp f(x)$.

Essa propriedade segue-se imediatamente da regra da cadeia.

À guisa de exemplo, a derivada da função $y = \exp(\cos x)$ é dada por $y' = (\cos x)' \exp(\cos x) = -\text{sen } x \exp(\cos x)$.

Propriedade 7. $\int \exp x dx = \exp x + C.$

Esta propriedade é decorrência do fato de que $\exp' x = \exp x$, ou seja, \exp é uma primitiva dela mesma.

Propriedade 8. $\exp 0 = 1$

Como a função \exp e a função \ln são inversas uma da outra, tem-se

$$1 = \exp \ln 1 = \exp 0$$

Propriedade 9. $\exp(u + v) = \exp u \cdot \exp v.$

É suficiente observar que

$$\ln \exp(u + v) = u + v = \ln \exp u + \ln \exp v = \ln(\exp u \cdot \exp v)$$

e como \ln é uma função injetiva, obtemos

$$\exp(u + v) = \exp u \cdot \exp v$$

Propriedade 10. $\exp(u - v) = \frac{\exp u}{\exp v}$

Observemos que

$$\exp(u - v) \exp v = \exp[(u - v) + v] = \exp u$$

e agora dividindo-se ambos os membros da igualdade acima por $\exp v$ obteremos a igualdade acima.

Propriedade 11. $\exp(-v) = \frac{1}{\exp v}$

Esta propriedade é imediata a partir da anterior.

Propriedade 12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty$

Observemos que, tomando $y = 2^k$, em que $k \in \mathbb{N}$, teremos $\ln y = \ln 2^k$, donde $\ln y = k \ln 2$ e desde que $\ln 2 > 0$ tem-se que $\ln y \rightarrow +\infty$ se $k \rightarrow +\infty$. Conseqüentemente $y = \exp x \rightarrow +\infty$ se $x \rightarrow +\infty$.

Propriedade 13. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0$

Neste caso tomemos $y = 2^{-k}$ para $k \in \mathbb{N}$. Daí, $\ln y = \ln 2^{-k}$ de onde $\ln y = -k \ln 2$ e como $-k \ln 2 \rightarrow -\infty$ deveremos ter $\ln y \rightarrow -\infty$ e então $y = \exp x \rightarrow 0$.

2 A função \exp e o número e

A partir de agora o fato de chamarmos a função \exp de exponencial começará a ser esclarecido.

Definição 4. Definimos o número e como sendo aquele que satisfaz

$$\ln e = 1$$

O número e está bem definido, pois a função $\ln : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é injetora e sobrejetora. Portanto, dado o número $1 \in \mathbb{R}$, existe um único número positivo, que designaremos por e , tal que $\ln e = 1$.

Propriedade 14. $\exp x = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Começemos observando que a propriedade é válida para $x = 1$. De fato,

$$e = \exp(\ln e) = \exp 1.$$

Por indução, mostraremos que a propriedade se verifica para todo $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ isto foi exatamente o que acabou de ser demonstrado. Suponhamos que

$$e^n = \exp n, \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Assim $\exp(n+1) = \exp n \cdot \exp 1 = e^n \cdot e^1 = e^{n+1}$, o que mostra que a propriedade é válida para $n+1$ e, conseqüentemente, válida para todo $n \in \mathbb{N}$

Se n for inteiro positivo, teremos

$$\exp(0) = 1 = \exp(n + (-n)) = \exp(n) \cdot \exp(-n)$$

e assim

$$\exp(-n) = \frac{1}{\exp n} = \frac{1}{e^n} = e^{-n}$$

Suponhamos que $r = \frac{m}{n}$ em que m e n são números inteiros e $n \neq 0$.

Daí,

$$\begin{aligned} \exp r &= \exp\left(\frac{m}{n}\right) = \exp\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{m\text{-vezes}}\right) = \\ &= \exp\left(\frac{1}{n}\right) \cdots \exp\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}} \cdots e^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{m}{n}} \end{aligned}$$

em que usamos o fato de que $\exp\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}}$. Mostremos este fato: Seja $y = \exp\left(\frac{1}{n}\right)$, ou seja, $\ln y = \frac{1}{n}$ o que implica $n \ln y = 1$ e daí $\ln y^n = 1 = \ln e$ e pela injetividade da função \ln tem-se $y^n = e$ e então $y = \exp\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}}$.

Desse modo temos

$$\exp r = e^r,$$

para todo $r \in \mathbb{Q}$. Assim, é natural definir a potência e^x , para qualquer número real x , como feito a seguir.

Definição 5. Dado qualquer número $x \in \mathbb{R}$, define-se

$$e^x = \exp x.$$

De agora em diante trabalharemos com a função exponencial apresentando-a mais na forma $y = e^x$ do que na forma $y = \exp x$.

Cabem algumas observações sobre o número e , que é a base do sistema de logaritmos naturais.

O número e é um número irracional, ou seja, ele não pode ser escrito na forma de uma fração $\frac{p}{q}$, em que $p, q \in \mathbb{Z}$, com $q \neq 0$, e seu valor aproximado é 2,71828182845.... Na verdade, e é um número *transcendente*, isto é, ele não é raiz de nenhum polinômio da forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

em que os coeficientes a_0, a_1, \dots, a_n sejam inteiros. Os números que não são transcendentos são chamados *algébricos*.

Deve-se ressaltar que todo número racional $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, com $q \neq 0$, é algébrico. Basta observar que $\frac{p}{q}$ é raiz do polinômio de grau 1

$$P(x) = qx - p.$$

No entanto, existem números irracionais que são algébricos, como é o caso de $\sqrt{2}$, que é raiz do polinômio $P(x) = x^2 - 2$. Para mais informações sobre tais classes de números, o leitor pode consultar D.G. de Figueiredo¹

Uma maneira de calcular e^x é por meio de uma entidade matemática chamada *série numérica* que é, grosso modo, uma *soma* com uma infinidade de parcelas. Detalhes sobre estas séries serão vistas nas aulas referentes à Análise. Apenas como uma informação adicional observemos que e^x pode ser escrita como

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

sendo que uma boa aproximação para e^x , qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, é dada por

$$e^x \cong 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \quad n = 1, 2, \dots$$

¹Djairo G. de Figueiredo, Números Irracionais e Transcendentes, coleção Iniciação Científica, Sociedade Brasileira de Matemática, 2002.

de sorte que quanto maior o valor de n melhor será a aproximação obtida.

Deve-se enfatizar que as funções exponencial e logarítmica são aplicáveis em vários problemas oriundos não só da Matemática como também do mundo físico.

Uma classe desses problemas está relacionada com os chamados crescimento ou decaimento exponencial. Tornemos isso mais preciso.

Suponhamos que $y = y(t)$ represente o valor de uma certa quantidade, no tempo t , cujo crescimento ou decréscimo seja expresso pela igualdade

$$\frac{dy}{dt} = ky,$$

em que k é uma certa constante não-nula. Tal expressão traduz o fato de que a taxa de variação (derivada) da quantidade y é proporcional ao valor de y em cada instante t .

Façamos $g(t) = \frac{y}{e^{kt}}$ e calculemos sua derivada, usando a regra do quociente:

$$\frac{dg}{dt}(t) = \frac{e^{kt} \frac{dy}{dt} - y k e^{kt}}{e^{2kt}} = \frac{e^{kt} ky - y k e^{kt}}{e^{2kt}} = 0,$$

qualquer que seja t em um certo intervalo, normalmente $(0, +\infty)$. Portanto, $g(t)$ deve ser constante, de modo que

$$\frac{y(t)}{e^{kt}} = C,$$

para alguma constante C e para todo $t \geq 0$, ou seja,

$$y(t) = C e^{kt}.$$

Suponhamos que no fenômeno que estejamos a estudar, conheça-se o valor de y em $t = 0$, digamos $y(0) = y_0$. Assim, podemos determinar o valor de C :

$$y_0 = y(0) = C e^{k \cdot 0} = C$$

e então

$$y(t) = y_0 e^{kt}.$$

Se $k > 0$, diz-se que y cresce exponencialmente e, se $k < 0$, diz-se que y decresce exponencialmente. Esse tipo de problema será estudado detalhadamente nas aulas referentes às equações diferenciais.

Nos exercícios resolvidos mostraremos várias propriedades importantes das funções exponencial e logarítmica e que o leitor deve estudar com cuidado.

Um problema importante em Biologia, que já foi citado *an passant*, é o do crescimento populacional de bactérias. Designemos por $N = N(t)$ o

número de bactérias em uma certa colônia de um experimento científico. Um modelo razoável para descrever tal fenômeno, caso não haja inibição ao crescimento das bactérias, é o descrito pela relação

$$\frac{dN}{dt} = kN,$$

em que $\frac{dN}{dt}$ é a derivada de N , que representa a taxa de crescimento populacional, e k é uma constante positiva, sendo que esta última relação é o que chamamos de *equação diferencial*, a qual expressa o fato de que a taxa de crescimento da cultura de bactérias, em cada instante t , é proporcional à quantidade de bactérias neste mesmo instante.

Reescrevamos tal equação diferencial na forma

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = k$$

e observemos que $\frac{d}{dt} \ln(N(t)) = \frac{N'(t)}{N(t)}$, ou seja,

$$\frac{d}{dt} \ln(N(t)) = k$$

o que nos diz que $\ln N(t)$ é uma primitiva da função constante k , isto é,

$$\ln N(t) = \int k dt + C$$

Portanto,

$$\ln N(t) = kt + C$$

e usando o fato conhecido de que as funções logarítmica e exponencial são inversas uma da outra, teremos

$$N(t) = e^{kt+c} = e^c \cdot e^{kt}$$

e chamando $e^c = A$, obtemos

$$N(t) = Ae^{kt}$$

que é a chamada *solução geral* da equação diferencial $\frac{dN}{dt} = kN$, e diz então que a população de bactérias possui crescimento exponencial.

Admitindo que saibamos calcular o número de bactérias no início do experimento, isto é, $n(0) = N_0$ é um valor conhecido, obteremos $N(0) = Ae^0 = A = N_0$. Daí,

$$N(t) = N_0 e^{kt}.$$

Vejam os uma situação concreta.

Suponhamos que em um experimento científico um pesquisador dispõe de uma colônia de bactérias para ser observada. Admitamos que no dia 1 de abril existam 1 milhão de bactérias e no dia 1 de maio elas tenham crescido e atingido a marca de 7,5 milhões. Observemos que a função que rege tal fenômeno é $N(t) = N_0 e^{kt}$. Considerando $t = 0$ no dia 1 de abril, teremos

$$N(0) = 1000000 = N_0$$

e daí

$$N(t) = 10^6 e^{kt}.$$

Como calcular k ? Ora, $N(30) = 7,5 \cdot 10^5$, e daí $N(30) = 10^6 e^{k \cdot 30}$, donde se conclui que

$$k = \frac{\ln 7,5}{30} \cong 0,0672.$$

Assim

$$N(t) \cong 10^6 \cdot e^{0,0672t}.$$

Quando a colônia de bactérias atingiria a formidável marca de 10^9 elementos? Simples:

$$10^9 \cong 10^6 \cdot e^{0,0672t}$$

e daí

$$t \cong \frac{\ln 1000}{0,0672} \cong 102,8 \text{ dias.}$$

Essa marca será alcançada no dia 11 de julho.

3 A função exponencial de base a

Observe que, muito embora a função e^x tenha sido introduzida no ensino médio, expressões como $\pi^{\sqrt{x}}$ ou $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$, entre outras, ainda não foram rigorosamente definidas. Ora, como já sabemos calcular e^x , para qualquer valor real de x , a definição seguinte deverá soar bastante natural.

Definição 6. Dado qualquer número real $a > 0, a \neq 1$, define-se a função *exponencial de base a* por

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

Essa função, como era de esperar, herda todas as propriedades da função $\exp x = e^x$. Fazemos alguns casos, à guisa de exemplo.

$$a^0 = e^{0 \ln a} = e^0 = 1,$$

$$a^1 = e^{1 \cdot \ln a} = e^{\ln a} = a,$$

pois, como já foi observado, as funções exponencial e logarítmica são inversas uma da outra.

$$a^{-x} = e^{-x \ln a} = e^{\ln a^{-x}} = a^{-x},$$

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y.$$

Esta propriedade segue-se dos cálculos a seguir:

$$a^{x+y} = e^{(x+y)\ln a} = e^{x\ln a + y\ln a} = e^{x\ln a} \cdot e^{y\ln a} = a^x \cdot a^y.$$

Estabeleceremos, em seguida, um teorema que nos fornecerá uma propriedade básica da função a^x .

Teorema 18. Seja a um número positivo e sejam x e y números reais arbitrários. Então

$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

Demonstração. Usando a definição de exponencial, tem-se

$$(e^x)^y = e^{y\ln e^x} = e^{yx} = e^{xy},$$

e assim a propriedade é válida para $a = e$. Portanto,

$$(a^x)^y = (e^{x\ln a})^y = e^{xy\ln a} = a^{xy}.$$

o que completa a demonstração. \square

Vejam outras propriedades da função a^x . Começemos com a sua derivada.

Propriedade 15. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$.

De fato, considerando que $a^x = e^{x\ln a}$, podemos usar a *regra da cadeia*, para obter

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(x \ln a)e^{x\ln a} = a^x \ln a.$$

Decorre daí que, se $a > 1$, então a^x é crescente e, se $0 < a < 1$, tal função é decrescente.

Propriedade 16. Se $a > 1$, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$.

Com efeito, $a^x = e^{x\ln a}$ e sendo $a > 1$, segue-se que $\ln a > 0$ e assim $x \ln a \rightarrow +\infty$ se $x \rightarrow +\infty$, o que implica que $e^{x\ln a} \rightarrow +\infty$, mostrando a propriedade.

Propriedade 17. Se $0 < a < 1$, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$.

Realmente, $a^x = e^{x\ln a}$ e como $0 < a < 1$ tem-se que $\ln a < 0$ e daí $x \ln a \rightarrow -\infty$ se $x \rightarrow +\infty$, donde se conclui que $e^{x\ln a} \rightarrow 0$.

De maneira análoga mostram-se as duas propriedades seguintes.

Propriedade 18. Se $a > 1$, então $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.

Propriedade 19. Se $0 < a < 1$ então $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$.

Destas propriedades, segue-se que a função exponencial a^x , definida em $x \in \mathbb{R}$, é injetora e sobrejetora tendo como imagem o intervalo $(0, +\infty)$, de modo que seus gráficos, conforme sejam $0 < a < 1$ ou $a > 1$ estão esboçados nas figuras 12.2(a) e 12.2(b) dadas a seguir.

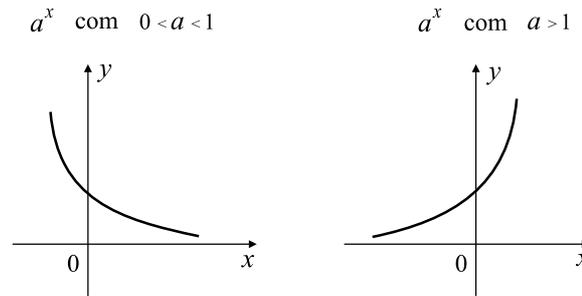


Fig. 12.2(a)

Fig. 12.2(b)

Observemos que

$$(a^x)' = \ln a \cdot e^{x \ln a}$$

$$(a^x)'' = (\ln a)^2 \cdot e^{x \ln a} > 0$$

que foram usadas para traçar os gráficos representados nas figuras 12.2(a) e 12.2(b).

4 A função logarítmica de base a

Até agora estudamos a função logarítmica \ln , definida como sendo a inversa da função exponencial de base e . Introduziremos agora outras funções logarítmicas que são definidas como inversas de funções exponenciais de outras bases.

Definição 7. Seja $a > 0$, $a \neq 1$. Define-se a função *logarítmica de base a* , $\log_a : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, como sendo a inversa da função

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow (0, +\infty) \\ x &\mapsto a^x, \end{aligned}$$

Portanto, temos que $y = \log_a x$ se, e somente se, $x = a^y$. Daí, segue-se que $\ln a^y = \ln x$ se, e somente se, $y \ln a = \ln x$, donde

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

o que nos fornece

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Resulta, também, da definição que

$$a^{\log_a x} = x \text{ e } \log_a(a^x) = x.$$

Como exercício, prove as seguintes propriedades:

- (i) $\log_a 1 = 0$;
- (ii) $\log_a a = 1$;
- (iii) $\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$;
- (iv) $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$;
- (v) $\log_a\left(\frac{1}{v}\right) = -\log_a v$;
- (vi) $\log_a(u^r) = r \log_a u$.

Estas propriedades decorrem daquelas mostradas para o logaritmo natural.

5 Exercícios resolvidos

1. Mostre que

$$e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Solução. Escreva

$$f(t) = \left(1 + \frac{x}{t}\right)^t$$

de onde

$$\ln f(t) = t \ln \left(1 + \frac{x}{t}\right) = x \left[\frac{\ln(1 + \frac{x}{t}) - \ln 1}{\frac{x}{t}} \right].$$

Fixado x teremos que $t \rightarrow +\infty$ implica $\frac{x}{t} \rightarrow 0$ e observe que

$$\frac{\ln(1 + x/t) - \ln 1}{\frac{x}{t}}$$

é o quociente de Newton da função \ln no ponto 1 em que o acréscimo $h = \frac{x}{t}$ tende a zero quando $t \rightarrow +\infty$. Assim,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln f(t) = x \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + x/t) - \ln 1}{\frac{x}{t}} = x \cdot \ln'(1) = x.$$

Desse modo,

$$\ln f(t) \rightarrow x \text{ se } t \rightarrow +\infty$$

e assim

$$e^{\ln f(t)} \rightarrow e^x \text{ se } t \rightarrow +\infty,$$

ou seja,

$$f(t) \rightarrow e^x \text{ se } t \rightarrow +\infty$$

Conseqüentemente,

$$e^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{t}\right)^t.$$

Fazendo $x = 1$ temos uma maneira de calcular aproximações para o número e :

$$e = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t.$$

2. Calcule a integral

$$\int a^x dx$$

em que a é um número real positivo e diferente de 1.

Solução. Sabemos que

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

e daí

$$a^x = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\ln a} a^x \right).$$

Segue-se que $\frac{1}{\ln a} a^x$ é uma primitiva de a^x . Portanto,

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C.$$

3. Calcule a integral $\int x \ln x dx$.

Solução. Usaremos a fórmula de integração por partes, introduzida na aula 10, ou seja,

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Chamemos $u = \ln x$ e $dv = x dx$ para obter $du = \frac{1}{x} dx$ e $v = \frac{x^2}{2}$ donde

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x + C.$$

4. Calcule a integral $\int \ln x dx$.

Solução. Fazemos $u = \ln x$ e $dv = dx$ e usemos a fórmula da integração por partes. Assim, $du = \frac{1}{x} dx$ e $v = x$, o que nos fornece

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} x dx = x \ln x - x + C.$$

5. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função $y = \ln x$ no ponto $(1, 0)$.

Solução. A inclinação da reta tangente ao gráfico da função $y = \ln x$ em um ponto de abscissa $x > 0$ é dada por $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$. Fazendo $x = 1$, teremos a inclinação $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = 1$ e daí a reta tangente solicitada no problema é $y = x - 1$.

6. Calcule o limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{x+1}.$$

Solução. Observemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{x+1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1-1}{x+1} \right)^{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x+1} \right)^{x+1} \\ &= e^{-1} \end{aligned}$$

6 Exercícios propostos

1. Calcule $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$.

2. Mostre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x}{n} \right)^n = e^{-x}.$$

3. Encontre todas as funções $f(x)$ que satisfazem à igualdade $f'(x) = f(x)$.
4. Encontre a área da região plana limitada pelos gráficos das funções $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$ e pela reta vertical $x = \frac{1}{2}$.
5. Mostre que a reta tangente ao gráfico de $y = \ln x$, passando pelo ponto de abscissa e passa pela origem.

6. Encontre a área da região limitada pelo eixo ox , a reta $x = e$ e o gráfico de $y = \ln x$.

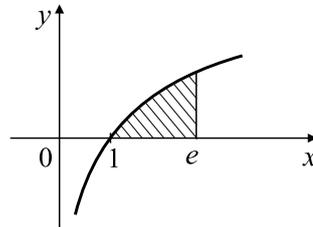


Fig. 12.3

7. Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo:

(a) $x8^x$ (b) 10^{x^2} (c) $10^x x^{10}$.

8. Calcule as derivadas das funções abaixo:

(a) $y = e^{5x}$

(b) $y = e\sqrt{x}$

(c) $y = e^{\frac{x}{3}}$

(d) $y = e^{\cos x}$

(e) $y = e^{|x|}$

(f) $y = \frac{e^x}{x^2}$

(g) $y = 3^{\text{sen } x}$

(h) $y = 10^{x \cos x}$

(i) $y = x^{e^x}$

(j) $y = e^{2^x}$

9. Esboce o gráfico da função $y = e^{|x|}$.

10. Esboce o gráfico da função $y = e^{x+k}$ em que k é uma constante.

11. Esboce o gráfico da função $y = e^{|x|+k}$.

12. Determine a reta normal ao gráfico da função $y = e^{x^2}$ quando $x = 1$.

13. Mostre que as funções $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{2x}$ e $y_3(x) = Ae^x + Be^{2x}$ satisfazem à igualdade

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

7 Respostas dos exercícios propostos

1. $\ln 2$

2. Sugestão: Verifique inicialmente que $e^x = \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. A seguir, no limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}$, faça a mudança de variável $u = -n$.

3. $f(x) = Ae^x$ em que A é uma constante.

4. $\ln 2 - \frac{7}{24}$

5. A equação da reta procurada é $y = \frac{1}{e}x$

6. 1

7. (a) $8^x + 8^x x \ln x$ (b) $2 \cdot 10^{x^2} x \ln(10)$ (c) $10^x x^{10} \ln x + 10 \cdot 10^x x^9$

8. (a) $y' = 5e^{5x}$

(b) $y' = \frac{e}{2\sqrt{x}}$

(c) $y' = \frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}$

(d) $y' = -e^{\cos x} \sin x$

(e) $y' = \begin{cases} e^x & \text{se } x > 0 \\ -e^{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

(f) $y' = \frac{e^x(x-1)}{x^3}$

(g) $y' = \ln 3 (3^{\sin x} \cos x)$

(h) $y' = 10^{x \cos x} (\cos x - x \sin x) \ln 10$

(i) $y' = x^{e^x} e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right)$

(j) $y' = e^{2x} 2^x \ln x$

9.

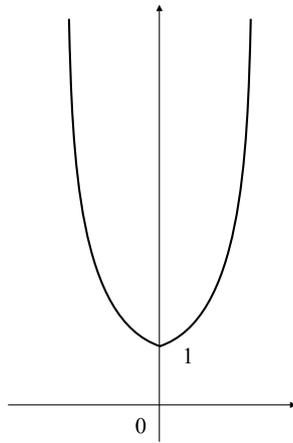


Fig. 12.4

10.

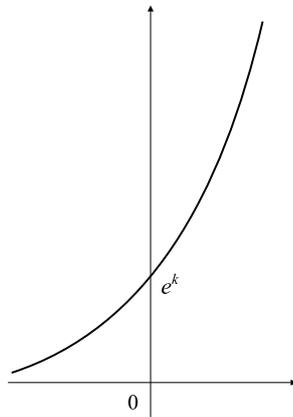


Fig. 12.5

11.

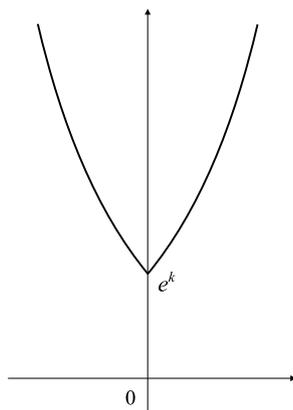


Fig. 12.6

12. $y = -\frac{1}{2e}(x - 1) + e$

13. Basta mostrar que a função y_1 e suas primeira e segunda derivadas satisfazem $y_1'' - 3y_1' + 2y_1 = 0$ fazendo substituição de y_1 , y_1' e y_1''

nessa fórmula. O mesmo deve ser feito para y_2 e y_3 .

Nesta aula você aprendeu:

- a definição e as propriedades da função exponencial.
- a calcular a derivada e a integral da função exponencial.

8 Apêndice

Como construir uma tábua de logaritmos

Este Apêndice é baseado, parcialmente, em um artigo do Prof. Geraldo Ávila²

Como vimos na Definição 7 desta aula, dado um número positivo $a \neq 1$, o logaritmo de um número positivo x , na base a , é dado por

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

e a função $\log_a : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é a inversa da função exponencial

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow (0, +\infty) \\ x &\mapsto a^x. \end{aligned}$$

Antes do advento e popularização das calculadoras eletrônicas, os valores dos logaritmos vinham listados em tabelas incluídas nos textos utilizados no Curso Científico, um dos precursores do atual ensino médio. Veja o livro de Bezerra³, bastante popular há algumas décadas, que contém uma tábua de logaritmos.

Como, então, tais tábuas eram construídas?

Os logaritmos que mais se popularizaram foram os decimais, que são aqueles calculados na base 10. Tais logaritmos, foram introduzidos por Henry Briggs (1561-1631), e por isso são também chamados logaritmos de Briggs, tiveram sua tábua publicada pela primeira vez em 1617 e, depois, em uma versão mais ampliada, em 1624.

Começemos lembrando o que vem a ser o logaritmo de um número na base 10:

O logaritmo de um número N na base 10, designado por $\log_{10} N$, é o expoente r a que se deve elevar 10 a fim de obter N , isto é, $N = 10^r$.

De agora em diante designaremos o logaritmo na base 10 simplesmente por \log . Observemos, inicialmente, que qualquer número positivo pode ser escrito na forma de uma potência de 10 vezes um número α pertencente ao intervalo $[0, 10)$. Por exemplo,

$$\begin{aligned} 17749 &= 1,7749 \times 10^4 \\ 0,00031 &= 3,1 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

²Geraldo Ávila, Como se Constrói uma Tábua de Logaritmos, Revista do Professor de Matemática 26(1994)1-7.

³Manoel Jairo Bezerra, Curso de Matemática, Companhia Editora Nacional, São Paulo, 1970.

Portanto, é suficiente conhecer os logaritmos dos números do intervalo $(1, 10)$. Tais logaritmos são chamados *mantissas*. Se quisermos calcular $\log 17749$, basta saber o valor de $\log 1,7749$ pois

$$\log 17749 = \log(1,7749 \times 10^4) = \log 1,7749 + \log 10^4 = \log 1,7749 + 4.$$

Briggs procedeu da seguinte maneira. Inicialmente ele extraiu a raiz quadrada de 10, seguida das extrações sucessivas das raízes quadradas dos resultados obtidos em cada extração. Isto é equivalente a calcular

$$10^{\frac{1}{2}}, 10^{\frac{1}{4}}, 10^{\frac{1}{8}}, 10^{\frac{1}{16}}, \dots$$

Assim,

$$10^{\frac{1}{2}} = 3,1622 \Rightarrow \log 3,1622 = 0,5;$$

$$10^{\frac{1}{4}} = 1,7783 \Rightarrow \log 1,7783 = 0,25;$$

$$10^{\frac{1}{8}} = 1,3352 \Rightarrow \log 1,3352 = 0,125.$$

Prosseguindo desta maneira ele obtinha uma tabela na qual estava incluída a seguinte tabelinha:

x	$\log x$
$10^{1/2} = 3,16228$	0,50000
$10^{1/4} = 1,77828$	0,25000
$10^{1/8} = 1,33352$	0,12500
$10^{1/16} = 1,15478$	0,06250
$10^{1/32} = 1,07461$	0,03125
$10^{1/64} = 1,03663$	0,01563
$10^{1/128} = 1,01815$	0,00781
$10^{1/256} = 1,00904$	0,00391