Cálculo Diferencial e Integral

Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa

Ministério
da Educação

UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL

Universidade Federal do Pará

Faculdade de Matemática

Av. Augusto Corrêa, 01 – Cidade Universitária Prof. José Silveira Netto, Guamá – Belém, PA – CEP 66075-110

Diretor
Geraldo Mendes de Araújo

Vice-diretor
Manoel Silvino Batalha de Araújo

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO
Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa

REVISÃO MATEMÁTICA
Juaci Picanço da Silva

REVISÃO ORTOGRÁFICA
José dos Anjos Oliveira

ILUSTRAÇÃO
Joelma Morbach

CAPA
Silvério Sirotheau Corrêa Neto

Ao Leitor

Que Stendhal confessasse haver escrito um de seus livros para cem leitores, cousa é que admira e consterna. O que não admira, nem provavelmente consternará é se este outro livro não tiver os cem leitores de Stendhal, nem cinqüenta, nem vinte, e quando muito, dez. Dez? Talvez cinco. (Machado de Assis em Memórias Póstumas de Brás Cubas.)

Índice

Aula 1

Motivação e o conceito de função

Objetivos

- Conhecer os principais problemas que motivaram o desenvolvimento do Cálculo.

- Estudar o conceito de função.

1 Introdução

O objetivo da disciplina Cálculo é estudar o chamado Cálculo Diferencial e Integral, conhecido em tempos idos por Cálculo Infinitesimal, de funções de uma ou mais variáveis o qual, além de sua importância histórica e pedagógica, vem a ser uma das pedras angulares do progresso científico e tecnológico. O Cálculo, cujas origens remontam ao mundo grego antigo, repousa sobre dois alicerces básicos: o conceito de função e o de limite, a partir dos quais serão desenvolvidos os de continuidade, derivabilidade, integração, etc. Grosso modo, nesta introdução, podemos dizer que o Cálculo trata de problemas em que há variações, as quais são traduzidas por meio de funções e, motivados por estas análises variacionais, somos levados a estudar vários problemas que ao longo da História determinaram o desenvolvimento da Ciência, mostrando assim um intercâmbio e uma das interdependências das mais saudáveis entre a Matemática, que é uma Ciência básica e lida com conceitos abstratos, com os mais variados ramos da Ciência Aplicada e da Tecnologia.

Matemática é uma palavra de origem grega, derivada de *Mathematikos* e que significava 'disciplina mental', 'aprendizado', principalmente aprendizado matemático. Platão, filósofo grego, achava que ninguém pode ser considerado educado se não tiver aprendizado matemático.

Cálculo é uma palavra latina que significa pequena pedra que os antigos romanos usavam para fazer contagens.

Grosso modo. Locução latina ("de modo grosseiro"), que significa "por alto", "resumidamente", "de modo geral".

Enumeremos alguns problemas motivadores do desenvolvimento do Cálculo.

O problema da tangente

> Determinar a reta tangente a uma curva em um dado ponto.
> Um exemplo concreto, que será visto com detalhes na Aula 2, é o de determinar a reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$ em um dado ponto (x, x^2).

Tal problema, facilmente solúvel, quando se trata, por exemplo, de uma circunferência, em que a reta tangente é aquela que a intersecta em apenas um ponto, gera interessantes questões quando tratamos com outras curvas e que nos levam ao conceito de *limite*, o qual, por sua vez nos motiva a definir o que vem a ser *derivada.* Veja as figuras 1.1(a),(b) e (c) e decida, inicialmente de maneira intuitiva, qual (ou quais) da(s) reta(s) r abaixo é tangente à respectiva curva C.

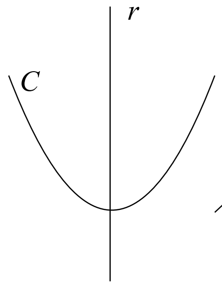


Fig. 1.1(a)

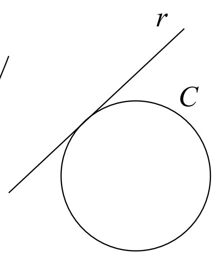


Fig. 1.1(b)

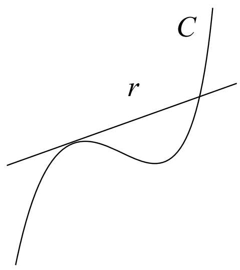


Fig. 1.1(c)

O problema da velocidade

> Determinar a velocidade instantânea de um corpo em movimento.
> Um caso concreto de um problema como este surge em cinemática em que a equação horária de um corpo em movimento, em alguns casos, pode ser escrita como
>
> $$s = s(t) = s_0 + v_0t + \frac{at^2}{2},$$
>
> em que $s = s(t)$ representa o deslocamento do corpo no instante t.

Aqui os métodos clássicos, entendidos como aqueles desenvolvidos antes do advento do Cálculo, mostram-se insuficientes para tratar problemas em que haja variações de velocidade, como o que ocorre com um corpo em queda livre ou quando ele se move em trajetórias curvilíneas, como é o caso dos planetas, que se deslocam segundo trajetórias elípticas. Deve-se ressaltar que o estudo das trajetórias de corpos celestes desenvolveu-se *pari* *passu* com o Cálculo Diferencial e Integral, produzindo um dos capítulos mais marcantes da História da Ciência, no qual a Matemática mostra-se o instrumento mais adequado para análise e interpretação do mundo físico. Veja figura 1.2.

Pari passu. Locução latina que significa a passo igual, ao mesmo tempo, simultaneamente.

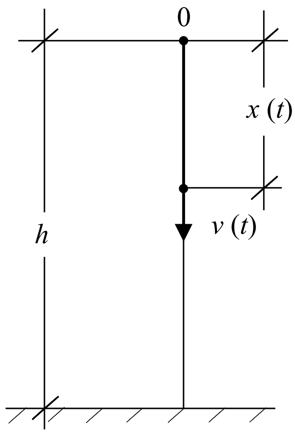


Fig. 1.2

Os problemas de extremos: máximos e mínimos

> Calcular os valores máximos e mínimos de uma determinada função.
> Um exemplo geométrico interessante, relacionado com este problema, é o de determinar as dimensões de um retângulo de área máxima que pode ser inscrito em um círculo de raio R.

Tal problema está ligado à fundação da cidade de Cartago. Foi prometida à Elisa, personagem Dido da Eneida de Virgílio, a extensão de terra que ela pudesse envolver com uma tira de couro feita a partir do couro de uma vaca. De todas as regiões que ela poderia envolver com tal tira, ela escolheu, de maneira correta, o círculo que é, dentre todas as figuras com mesmo perímetro, a que engloba a maior área.

Este problema está intimamente ligado às origens do Cálculo Diferencial. Acredita-se que Pierre de Fermat (1601-1650) - veja apêndice -, matemático francês, foi o verdadeiro criador do Cálculo Diferencial, sendo tal crença corroborada por Laplace, pois foi de sua lavra a elaboração das idéias em que se usava, ainda que de maneira embrionária, técnicas que levaram à solução, por meio de infinitésimos, do seguinte problema:

> Dentre todos os retângulos de mesmo perímetro, determinar aquele de área máxima.

Este é um caso particular dos chamados *Problemas Isoperimétricos*. Vide figuras 1.3(a), (b) e (c) em que as regiões possuem áreas distintas, muito embora estejam limitadas por curvas de mesmo comprimento, daí o nome isoperimétrico.

Pierre Simon de Laplace (1749-1827), conhecido como o Newton da França, foi um matemático de raro talento. Publicou obras primas que marcaram época, dentre elas Traité de Mécanique Céleste, que compreende toda a Mecânica Celeste da época.

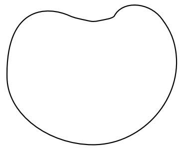


Fig. 1.3(a)

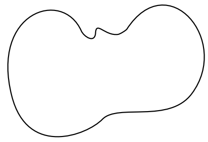


Fig.1.3(b)

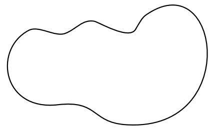


Fig.1.3(c)

O problema das áreas

> Determinar a área de uma região limitada por uma curva fechada.
> É o que acontece quando queremos determinar áreas de círculos, de regiões compreendidas por segmentos de parábolas, etc.

Quando trabalhamos com polígonos, isto é, figuras que podem ser decompostas em um número finito de triângulos, o problema das áreas é perfeitamente solúvel por intermédio da Geometria desenvolvida na Grécia Antiga. Euclides - vide apêndice -, em seus Elementos, faz a quadratura (ou seja, constrói, usando apenas régua e compasso, um quadrado com área igual à da figura dada) de figuras, usando apenas a Geometria de sua época. No entanto, quando a figura era curvilínea (lembre-se das Lúnulas, da Parábola, etc.), os métodos disponíveis na Geometria Clássica mostravam-se insuficientes. Tais questões afligiram os gregos antigos, que se viram envolvidos com problemas para alguns dos quais foram fornecidas soluções de maneira satisfatória, enquanto para outros suas soluções foram procrastinadas até o período renascentista, quando então surge o Cálculo Infinitesimal no concerto da Ciência.

Quadratura é termo originado do latim *quadratum* "quadrado". Quadratura, em sentido mais geral, significa o processo de encontrar um quadrado cuja área seja igual à de uma dada região. Na Grécia antiga a quadratura presumia o uso apenas de régua sem escala e compasso.

Alguns matemáticos gregos tentaram, com êxito, obter a quadratura de certas figuras curvilíneas. É o caso de Hipócrates de Quios que conseguiu, usando métodos elementares, porém elegantes e criativos, efetuar a quadratura da *Lúnula ou Luna*, que é a região em forma de Lua, daí o seu nome, limitada por dois círculos não concêntricos que se intersectam. No entanto, foi Arquimedes, matemático grego - veja apêndice -, o mais afortunado nestas tentativas, pois conseguiu introduzir um método para realizar a quadratura de um segmento de parábola, e, desta feita, produziu o gérmen daquilo que, com Leibniz, Newton e vários outros matemáticos, seria o *Cálculo Integral*. Na verdade, o método descrito por Arquimedes consiste fundamentalmente em *aproximar* uma determinada figura por outras mais simples como triângulos, retângulos, etc., cujas áreas sabemos calcular, conforme figuras 1.4. Na verdade, o leitor observará que os processos de aproximação constituem o leitmotiv do Cálculo Diferencial e Integral.

Hipócrates de Quios (c. 440 a.C.) matemático grego que realizou a quadratura de certas Lúnulas ou Lunas.

Leitmotiv. Pronuncia-se "laitmotif" e significa tema ou idéia sobre a qual se insiste com freqüência.

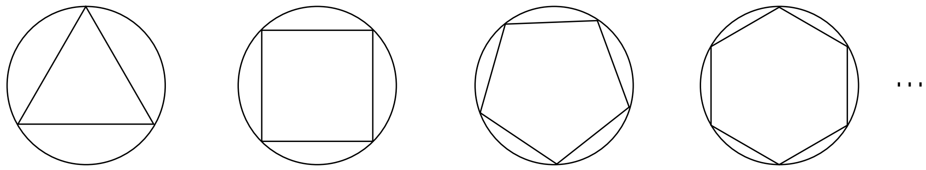


Fig.1.4(a) Fig 1.4(b) Fig.1.4(c) Fig.1.4(d)

Deve-se ressaltar que os problemas 1, 2 e 3 são típicos do Cálculo Diferencial, ao passo que o problema 4 e o 5, a seguir, estão incluídos no Cálculo Integral.

O problema do comprimento de curvas

Determinar o comprimento de uma curva descrita por uma ou mais equações.

Um exemplo típico é o de calcular o comprimento do arco de uma parábola limitado entre dois de seus pontos.

Aqui, usa-se um procedimento semelhante ao da quadratura. Mais precisamente, dada uma certa curva, cujo comprimento deve ser calculado, *aproximamo-la* por meio de segmentos de retas. Veja figuras 1.5.

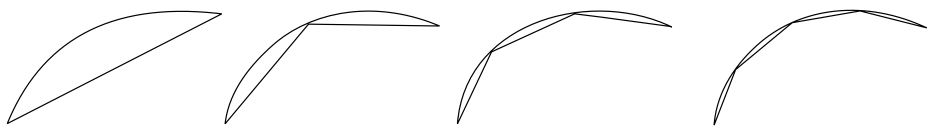


Fig. 1.5(a) Fig.1.5(b) Fig. 1.5(c) Fig.1.5(d)

Observe que, à medida que o número de lados da poligonal aumenta, ela vai ficando cada vez mais próxima da curva.

Novamente temos aqui um problema do Cálculo Integral mas, devemos enfatizar, estes últimos estão intimamente ligados ao Cálculo Diferencial por meio de um resultado, chamado *Teorema Fundamental do Cálculo*, o qual torna, em um certo sentido, as operações de *derivação* e *integração* inversas uma da outra.

O problema inverso da determinação da tangente

Determinar uma curva tal que a tangente a ela em qualquer ponto esteja predeterminada por alguma condição.

Por exemplo, determinar a curva tal que em cada ponto (x, y) a sua inclinação seja igual a $2x$. Vide figura 1.6.

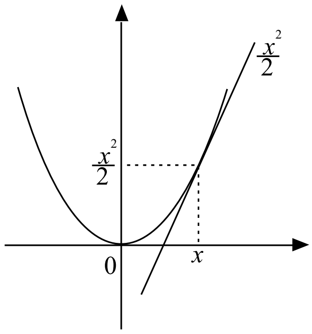


Fig. 1.6

O problema da posição (o problema inverso ao da velocidade)

> Determinar a posição de um corpo sabendo-se a sua velocidade instantânea em cada instante e a sua velocidade inicial.

Os dois últimos problemas são típicos das chamadas Equações Diferenciais Ordinárias os quais, entre vários outros, serão vistos em aulas específicas.

Com os exemplos acima esperamos ter despertado a curiosidade do leitor para os cursos de Cálculo que ora iniciam.

2 O que é uma função?

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) nasceu em Leipzig, Alemanha. Seu talento desenvolveu-se de maneira bastante precoce a ponto de, aos doze anos de idade, dominar toda a Matemática de sua época. Outro ponto a ser ressaltado é que as notações usuais do Cálculo Diferencial e Integral são devidas a Leibniz. Em virtude da importância de Leibniz, dedicaremos a ele um apêndice na aula 3.

Como dissemos rapidamente na Introdução, o Cálculo Diferencial e Integral tem como pilares básicos os conceitos de função e de limite. Nesta seção estudaremos as noções básicas de funções partindo de exemplos concretos simples. O termo função, como entidade matemática, foi usado pela primeira vez, em 1673, em uma carta escrita por Gottfried Wilhelm Leibniz, matemático e filósofo alemão, que compartilha com Isaac Newton, matemático inglês, a glória de ter criado o Cálculo Diferencial e Integral, ambos trabalhando de maneira independente um do outro. Para mais informações sobre a evolução do conceito de função o leitor poderá consultar Siu[1].

No Cálculo tradicional uma função é definida como sendo uma relação entre dois termos, chamados variáveis. Chamemo-los de x e de y. Se a cada valor de x, que pertence a um dado conjunto X, estiver associado, por meio de uma regra, um único valor y, pertencente a outro conjunto

[1] Man-Keung Siu, Concept of Function - Its History and Teaching, Learn from the Masters, The Mathematical Association of America, 1995, 105-121.

Y, diz-se que está definida uma função e escreve-se $y = f(x)$, o que se lê y é função de x. Neste caso, x é chamada variável independente e y variável dependente. O conjunto ao qual x pertence é chamado domínio da função f e o conjunto de valores da forma $y = f(x)$, quando x varia em todo o domínio de f, é chamado imagem de f. A notação usual para funções como acima é dada por

$$f : X \to Y \text{ ou } X \xrightarrow{f} Y$$

Deve-se ressaltar que nem toda função é definida por meio de uma fórmula. No que se segue, estaremos interessados apenas nas chamadas funções reais de uma variável real, ou seja, aquelas cujos domínios e imagens são subconjuntos de $\mathbb{R}$. No entanto, para que seja ressaltado o fato de que a noção de função surge nas atividades mais comezinhas do nosso dia-a-dia, daremos exemplos de funções cujos domínios ou imagens não são necessariamente subconjuntos dos números reais.

Exemplo 1. Uma pesquisa eleitoral

A revista CartaCapital, em uma edição de julho de 2002, em pleno período eleitoral, divulgou um quadro que representava a evolução mensal de intenção de votos, de fevereiro de 2002 a junho de 2002, de um certo candidato à presidência da república, a qual podia ser representada pela tabela a seguir, em que na coluna da esquerda representam-se os meses do período acima e na da direita exprimem-se os respectivos percentuais de intenção de votos.

Fevereiro	32
Março	29
Abril	32
Maio	43
Junho	40

Vê-se assim que temos definida uma função, cujo domínio é um conjunto de meses do ano de 2002, {Fevereiro, Março, Abril, Maio, Junho}, e tendo como imagem o subconjunto dos números reais $\{32, 29, 32, 43, 40\}$, pois a cada mês do conjunto acima está associado apenas um número, que é o percentual de eleitores que pretendem votar no referido candidato.

Exemplo 2. A função afim

O exemplo mais simples de função, que o leitor já deve ter encontrado em cursos de Geometria Analítica, é o de funções da forma $y = f(x) = ax + b$, em que a e b são constantes reais, x é a variável independente e y é a variável dependente. Claramente, o domínio de tal função, chamada *função afim*, é constituído pelo conjunto dos números reais. Se $a \neq 0$ a sua imagem também é $\mathbb{R}$ e se $a = 0$ a função será constante, ou seja, para qualquer valor de x o y correspondente sempre valerá b.

Pode-se, graças a um procedimento introduzido pelo matemático e filósofo francês René Descartes (vide apêndice na aula 2 para mais detalhes sobre a vida e obra deste matemático), visualizar o comportamento desta função no chamado plano Cartesiano atribuindo-se valores a x, calculando-se os correspondentes de y, e marcando-se no plano acima mencionado os pontos da forma (x, y). Como a função em estudo representa uma reta, é suficiente marcar apenas dois pontos como os descritos anteriormente para termos o seu gráfico. No entanto, tal procedimento não vale para outros casos. Veja as figuras 1.7, a seguir, que descrevem os vários perfis gráficos da função afim.

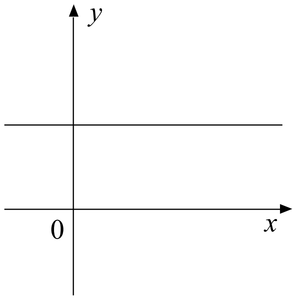


Fig. 1.7(a)

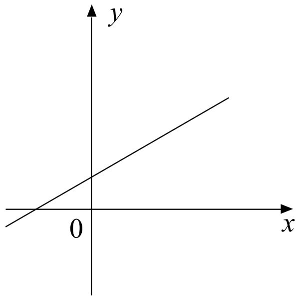


Fig.1.7(b)

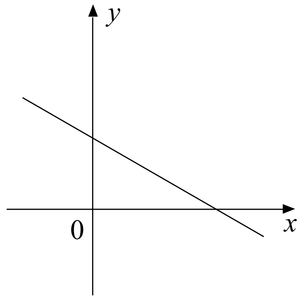


Fig.1.7(c)

Robert Hooke (1635-1703) matemático e físico inglês mais conhecido por sua Lei da Elasticidade, mas também, entre outras coisas, inventou o pêndulo cônico e realizou pesquisas sobre a lei de atração de corpos que, somente mais tarde, foi desenvolvida por Newton.

Funções deste tipo surgem em várias situações físicas e do dia-a-dia. Um dos exemplos mais conhecidos é o que ocorre em elasticidade linear, traduzida pela *Lei de Hooke*, dada por $f(x) = -kx$ em que x designa a magnitude da deformação de um corpo elástico - dentro dos limites de elasticidade - e $k > 0$ é a constante de elasticidade do corpo. As figuras 1.8(a), 1.8(b) e 1.8(c) representam um corpo elástico sendo deformado.

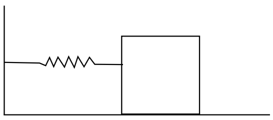


Fig. 1.8(a)

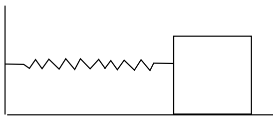


Fig. 1.8(b)

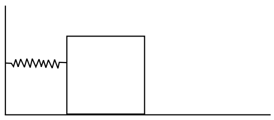


Fig. 1.8(c)

Uma outra situação interessante na qual surge uma função afim é no estudo do movimento retilíneo uniforme. Suponhamos que um corpo se desloque em uma trajetória retilínea com velocidade constante v. Designando por $x(t)$ a distância percorrida pelo referido corpo em um tempo t teremos

$$x(t) = x_0 + vt$$

em que x_0 designa a posição inicial do corpo. O gráfico da função $x(t)$ é dado pela semi-reta e é representado pela figura 1.9, na qual v, do ponto de vista geométrico, significa a inclinação da semi-reta. Deve-se observar que o gráfico da função $x(t)$ é uma semi-reta, pois a variável independente t, por representar o tempo, é maior do que ou igual a zero.

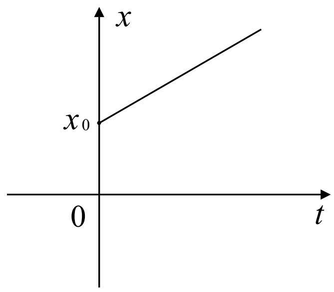


Fig. 1.9

Exemplo 3. Medida de temperatura

Nos países que adotam o sistema métrico decimal, como é o caso do Brasil, a temperatura ambiente é sempre medida em graus centígrados (ou graus Celsios) designada por ^{0}C. Outros países, entre os quais os Estados Unidos, por não adotarem o sistema métrico decimal, medem a temperatura em graus Farenheit (^{0}F). Para relacionar a temperatura em graus Celsios e Farenheit, usa-se a expressão

$$\frac{C}{5} = \frac{F - 32}{9}$$

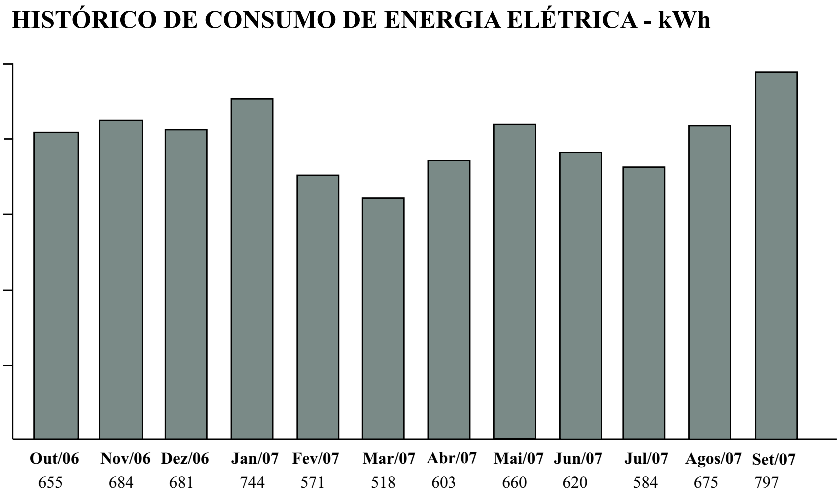
Assim,

$$C = \frac{5}{9}F - \frac{150}{9}$$

que é uma função afim.

Exemplo 4. Conta de luz

Nas contas de energia elétrica emitidas mensalmente por determinadas concessionárias, existe um quadro, designado por *histórico de consumo de energia elétrica* - kWh, o qual descreve o consumo de energia elétrica de cada residência, nos últimos doze meses. No gráfico desse quadro tem-se a figura



MÉDIA DOS 3 ÚLTIMOS CONSUMOS DE ENERGIA 685,33 kWh

que mostra o quanto foi gasto de energia elétrica de outubro de 2006 a setembro de 2007. Assim, temos uma função do conjunto {outubro/2006, novembro/2006, dezembro/2006, janeiro/2007, fevereiro/2007, março/2007, abriu/2007, maio/2007, junho/2007, julho/2007, agosto/2007, setembro/2007}. A cada um desses meses está associado um número, que é o consumo referente ao mês correspondente. Desse modo

$$\begin{array}{rcl}
\text{outubro/2006} & \longmapsto & 655 \\
\text{novembro/2006} & \longmapsto & 684 \\
\text{dezembro/2006} & \longmapsto & 681 \\
\text{janeiro/2007} & \longmapsto & 744 \\
\text{fevereiro/2007} & \longmapsto & 571 \\
\text{março/2007} & \longmapsto & 518 \\
\text{abril/2007} & \longmapsto & 603 \\
\text{maio/2007} & \longmapsto & 660 \\
\text{junho/2007} & \longmapsto & 620 \\
\text{julho/2007} & \longmapsto & 584 \\
\text{agosto/2007} & \longmapsto & 675 \\
\text{setembro/2007} & \longmapsto & 797
\end{array}$$

o que define uma função.

Exemplo 5. Alguns exemplos de funções da Geometria

Considere um quadrado de lado x. Sua área é dada por x^2 e designando-a por $A(x)$, teremos $A(x) = x^2$, definindo, assim, uma função que nos permite calcular a área de um quadrado conhecendo-se o seu lado. Evidentemente, o domínio da função A - o conjunto de todos os possíveis valores que podem ser atribuídos à variável x - é o conjunto dos números reais positivos, haja vista que tal variável representa o lado de um quadrado. Claramente, se x cresce a área $A(x)$ também cresce e, por este motivo, diz-se que tal função é crescente.

Inversamente, dado um quadrado com uma determinada área A, encontramos um único número positivo x que representa o seu lado e assim $x = \sqrt{A}$, o que nos diz que o lado de um quadrado é função de sua área. Veja as figuras 1.10 nas quais estão representados os gráficos das funções acima.

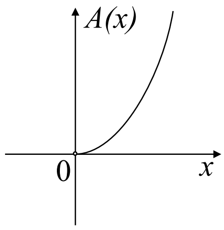


Fig. 1.10(a)

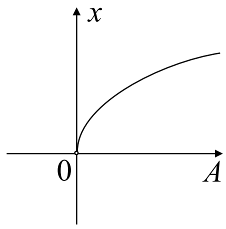


Fig. 1.10(b)

Outro exemplo geométrico de função é o da área do círculo com relação ao seu raio. Como é sabido da geometria elementar, a área de um círculo de raio r é dada por πr^2 e, designando por $S(r)$ tal área, teremos $S(r) = \pi r^2$, em que r, evidentemente, é um número maior que zero. Esta função possui um comportamento semelhante ao da que define a área do quadrado em função de seu lado.

Na verdade, os exemplos acima são casos particulares da função

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c,$$

em que a, b e c são constantes reais e x é a variável que, mais geralmente, pode assumir qualquer valor real. No entanto, nos casos específicos acima a variável independente é sempre positiva.

Exemplo 6. Forma implícita

Nos casos anteriores tivemos exemplos de funções nas quais a variável dependente y encontrava-se escrita explicitamente como função de x. Entretanto, nem sempre isto acontece. Consideremos, à guisa de exemplo, a equação $x^2 + y^2 = 4$ que, como sabemos da Geometria Analítica, descreve uma circunferência com centro no ponto $(0, 0)$ e de raio 2. Caso queiramos explicitar o valor de y em função de x teremos $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$ e assim, para cada valor admissível de x, correspondem dois valores simétricos de y, o que viola o conceito de função. Portanto, para cada valor de x pertencente ao intervalo $[-2, 2]$ teremos um valor $y = \sqrt{4 - x^2}$ e o seu simétrico $y = -\sqrt{4 - x^2}$, o que nos leva a concluir que a relação acima define duas funções que são representadas, respectivamente, pelas partes superior e pela inferior da circunferência. Em ambos os casos, o domínio é o intervalo $[-2, 2]$ e as imagens são, respectivamente, os intervalos $[0, 2]$ e $[-2, 0]$. Veja as figuras 1.11.

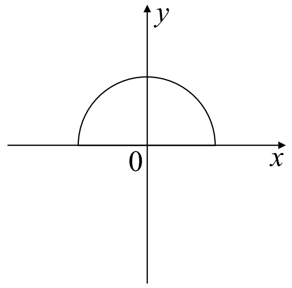


Fig. 1.11(a)

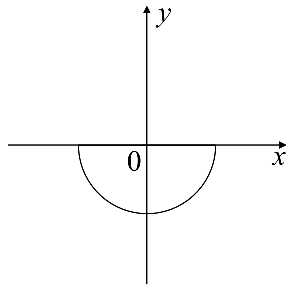


Fig. 1.11(b)

No entanto, deve-se observar que existem relações envolvendo as variáveis x e y que, por serem bastantes complicadas, não nos permitem fazer a manipulação acima para explicitar y em função de x, mesmo obtendo dois valores de y para cada x. Tente explicitar y como função de x, ou x como função de y, nas expressões abaixo:

$$x^2y + y^3x^4 + 3\sqrt{x}y^{1/3} = 9$$

ou

$$\sqrt{x + y^2 + \sqrt{x+y}} + \frac{x+y}{x^2+y^2} = x^4.$$

Exemplo 7. Funções de várias variáveis

Um cidadão chamado Devenildo Falidus tomou um empréstimo a juros de taxa 10% ao mês. Ao final do primeiro mês, a dívida de Devenildo será de

$$\text{R\$ } 10.000,00 + 1.000,00 = \text{R\$ } 11.000,00$$

Ao final do segundo mês, supondo que a dívida tenha sido rolada por mais um mês, esta será de

$$\text{R\$ } 11.000,00 + 110,00 = \text{R\$ } 11.100,00$$

Como as finanças do Sr. Falidus continuaram em péssimas condições, a dívida foi rolada por mais um mês, de modo que, ao término do terceiro mês, sua dívida era de

$$\text{R\$ } 11.100,00 + 111,00 = \text{R\$ } 11.210,00$$

O endividado senhor, assustado com o crescimento do seu débito, resolveu aprender um pouco de Matemática Financeira e ficou pasmado com o resultado obtido. Mas precisamente, Devenildo supôs que tivesse uma dívida inicial C_0 a taxa de i, mensal. Ao final do primeiro mês sua dívida C_1 será

$$C_1 = C_0 + iC_0 = (1+i)C_0$$

Ao final do segundo mês sua dívida C_2 será

$$\begin{aligned} C_2 &= C_1 + iC_1 \\ &= (i+i)C_0 + (1+i)C_0 \\ &= (1+i)(1+i)C_0 \\ &= (1+i)^2 C_0 \end{aligned}$$

prosseguindo dessa maneira, sua dívida C_n ao final do n-ésimo mês será

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

ou seja, provavelmente Devenildo Falidus continuará falido.

Observemos que obtemos uma função que a cada mês nos fornece o valor da dívida contraída a taxa i com juros compostos. Da próxima vez que alguém for solicitar um empréstimo, pense no drama de Devenildo.

Exemplo 8. Funções de várias variáveis

Existem casos, que não serão estudados de imediato, mas devem ser citados, em que as funções dependem de mais de uma variável independente. Por exemplo, considerando-se um triângulo retângulo cujos catetos medem x e y, a sua hipotenusa z medirá $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, ou seja, a hipotenusa depende de duas variáveis que podem percorrer livremente todos os números reais positivos.

Se x e y representarem lados de um retângulo, a sua área z será dada por $z = xy$ e novamente temos uma função de duas variáveis. No caso em que x, y e z representarem os lados de um paralelepípedo, o seu volume V será $V = xyz$, o que nos mostra que tal volume é uma função de três variáveis.

Outros exemplos de funções deste tipo serão estudados oportunamente.

Antes de partirmos para a descrição de outros exemplos, introduziremos alguns conceitos que farão parte do nosso cotidiano.

Função injetiva ou injetora. Uma função $f : X \to Y$ é dita injetiva ou injetora se $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, implicar que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

As funções $f(x) = x^2, x \geq 0$, $g(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$ e $h(x) = ax + b$, em que a e b são constantes reais com $a \neq 0$, são típicos exemplos de funções injetivas. Tente justificar isso. Por outro lado $f_1(x) = x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$, $g_1(x) = \cos(x)$ e $h_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ não são injetivas.

Veja as figuras a seguir em que você terá uma noção geométrica sobre a injetividade.

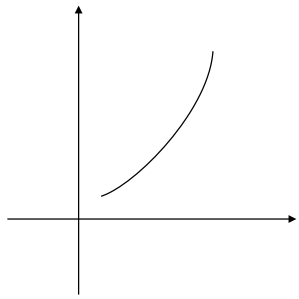


Fig. 1.12(a)

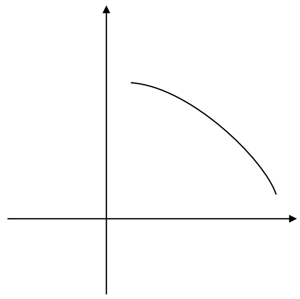


Fig. 1.12(b)

Função sobrejetiva ou sobrejetora. Uma função $f : X \to Y$ é dita sobrejetiva ou sobrejetora se, para cada $y \in Y$, existir $x \in X$ tal que $y = f(x)$.

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$, para todo $x \in \mathbb{R}$, é sobrejetiva.

A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \cos(x)$ não é sobrejetiva. No entanto, se a considerarmos dada por $g : [0, \pi] \to [-1, 1]$ ela será sobrejetiva.

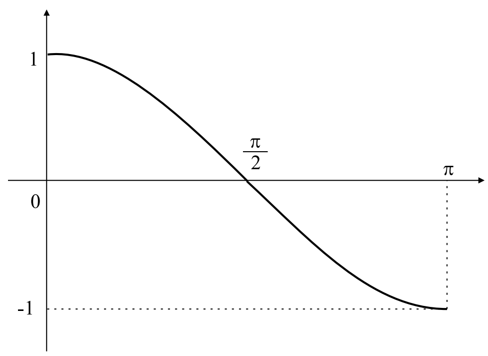


Fig. 1.13

Função bijetiva ou bijetora. Uma função $f : X \to Y$ que seja, simultaneamente, injetiva e sobrejetiva é chamada bijetiva ou bijetora (também usa-se o termo bijeção).

Este é o caso de $f(x) = x^3$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Não insistiremos mais com outros exemplos, pois eles surgirão naturalmente ao longo do curso.

Neste último caso (função bijetiva) pode-se definir uma função $f^{-1} : Y \to X$, chamada função inversa de $f : X \to Y$, da seguinte maneira:

$$x = f^{-1}(y) \text{ se, e somente se, } y = f(x).$$

Com relação ao "se, e somente se" desta definição e várias outras coisas usuais em Matemática, veja Morais Filho[2].

Exemplo 9. A função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = x^3$ é injetiva e sobrejetiva, ou seja, é uma bijeção, e sua inversa é dada por $F^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F^{-1}(x) = x^{1/3}$.

A função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

é injetora mas não é sobrejetora.

Se considerarmos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada pela mesma expressão acima, isto é,

$$g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

ela não será nem injetiva e nem sobrejetiva.

Observe que a função f é diferente da função g pois, mesmo sendo definidas por expressões semelhantes, seus domínios são distintos.

Tomemos, agora, a função $h : [0, +\infty) \to (0, 1]$ dada por

$$h(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

tem-se que ela é injetiva e sobrejetiva e, portanto, admite uma inversa. Determine uma expressão para tal inversa.

3 Exercícios resolvidos

1. Suponhamos que um carro esteja em movimento retilíneo uniforme com velocidade constante igual a 60km/h. Supondo que a posição do corpo no instante $t = 0$ é $x_0 = 100$km, ache uma equação para x em função de t e faça um gráfico da posição *versus* tempo.

   Solução. Desde que no instante $t = 0$ o corpo se encontra na posição $x_0 = 100$km, segue-se que a distância percorrida pelo corpo em um tempo t será $x(t) - 100$ e, desse modo, a velocidade (constante) $v = 60$km/h será expressa por

   $$60 = \frac{x(t) - 100}{t}$$

   e daí teremos

   $$x(t) = 100 + 60t.$$

   O gráfico desta equação é a reta esboçada na figura 1.14.

[2]Daniel Cordeiro de Morais Filho, Um Convite à Matemática, 2ª edição, Campina Grande, EDUFCG, 2007.

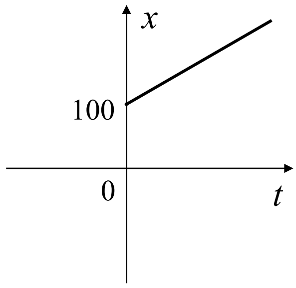


Fig. 1.14

2. Determine os domínios das funções a seguir. Deve-se observar que, ao dizermos domínio de uma função dada por uma expressão, queremos dizer, na maioria das vezes, encontrar o seu domínio maximal.

   (a) $y = \sqrt{4 - x^2}$,

   (b) $y = \dfrac{1}{x^2 - 9}$,

   (c) $y = \dfrac{x}{x^2 + 4}$.

   Solução.

   (a) Como y é um número real, $4 - x^2 \geq 0$, ou $x^2 \leq 4$. Conseqüentemente, o domínio desta função é o intervalo $-2 \leq x \leq 2$.

   (b) A função é dada por uma fração cujo denominador é $x^2 - 9$ o qual deve ser diferente de zero. Portanto, o domínio dessa função é constituído pelos valores de $x \in \mathbb{R}$ que sejam diferentes de ± 3.

   (c) Como $x^2 + 4 \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, o domínio é o conjunto de todos os números reais.

3. Se $f(x) = x^2 + 2x$, calcule $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ e interprete o resultado.

   Solução. Calculemos, inicialmente, o quociente acima:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{[(a+h)^2 + 2(a+h)] - (a^2 + 2a)}{h} = 2a + 2 + h.$$

   Vejamos, agora, a interpretação geométrica. Sobre o gráfico de f (veja fig. 1.15), localize os pontos P e Q cujas abscissas são, respectivamente, a e $a + h$. A ordenada de P é $f(a)$ e a de Q é $f(a + h)$.

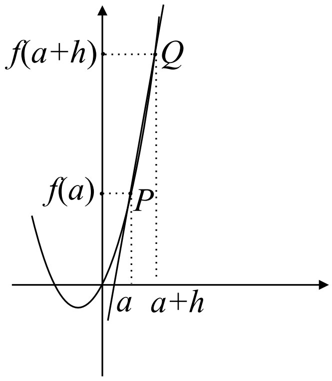


Fig. 1.15

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\text{diferença das ordenadas}}{\text{diferença das abscissas}}\\ &= \text{inclinação da reta } PQ.\end{aligned}$$

4. De cada um dos cantos de um quadrado de papelão, de 12 cm de lado, veja figura 1.16, são removidos quadrados cujos lados possuem comprimentos iguais a x cm e, a seguir, os retângulos remanescentes são dobrados para cima de modo que seja formada uma caixa sem tampa. Expresse o volume V da caixa, em cm^3, como uma função de x.

   Solução. A caixa possui base quadrada cujo lado mede $12 - 2x$ e altura x. Veja figura 1.16.

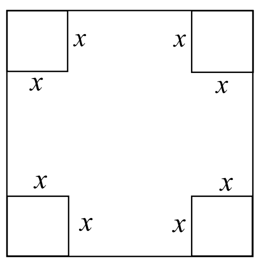


Fig. 1.16

O volume da caixa é dado por $V = x(12 - 2x)^2 = 4x(6 - x)^2$. O domínio da função $V = V(x)$ é o intervalo $0 < x < 6$, haja que vista que V deve ter sempre valor positivo. Veja figura 1.17.

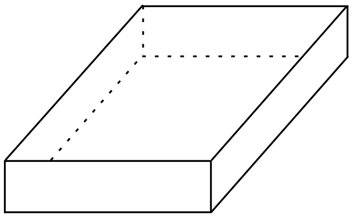


Fig. 1.17

4 Exercícios propostos

1. Em cada um dos itens abaixo, determine o domínio e a imagem da função correspondente.

   (a) $f_1(x) = 4 - x^2$
   (b) $f_2(x) = -2\sqrt{x}$
   (c) $f_3(x) = |x - 1|$
   (d) $f_4(x) = [2x] =$ o maior inteiro $\leq 2x$
   (e) $f_5(x) = |x| - 2x$
   (f) $f_6(x) = \frac{|x|}{x}$

2. Em um jogo de futebol o goleiro do *Paysandu Sport Club* bate um tiro de meta. A bola sobe e desce na intermediária do time adversário. Considere a função que a cada instante (desde a batida do tiro de meta) associa a altura em que a bola se encontrava naquele instante. Tal função é injetora? Justifique sua resposta.

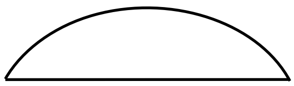


Fig. 1.18

3. Dada a função
$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$
calcule os seus valores em $x = 0, 1, 2, -2, 1 + h, -2 + h, a/b$.

4. Dada a função
$$f(x) = \frac{x-1}{x+1},$$
calcule $f(\frac{1}{1+x}), f(\frac{1}{1-x}), f(-x), f(\frac{1}{x})$. Mostre que $f(1/x) = -f(x)$ e $f(f(x)) = -1/x$.

5. Mostre que a função
$$y = f(x) = \frac{x+2}{2x-1}$$
coincide com a sua inversa.

6. Dada a função
$$y = f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$
definida para todo x real, verifique que sua inversa é a função
$$x = g(y) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}},$$
definida para $|y| < 1$.

7. Sabendo-se que à temperatura de 25^oC, o volume V (em cm^3) de certa quantidade de gás é dado pela lei: $V = \frac{36}{P}$, em que P é a pressão do gás (em atm), determine o volume de tal massa gasosa às pressões 3, 4 e 5 atm.

8. Suponhamos que em uma determinada cidade existia, no ano de 2000, 500.000 ratos e, no período 2000-2003, a população desse roedor tenha aumentado, anualmente, 40%. Considere a função que fornece tal população de ratos na dependência do tempo. Determine:

   a) a lei dessa função   b) um esboço do gráfico dessa função.

9. Colocando numa panela 500g de água, inicialmente a 50^oC, sua temperatura vai caindo até atingir a temperatura ambiente de 20^oC. Supondo que este resfriamento seja processado de acordo com a lei
$$T = T(t) = 20 + 30 \cdot 10^{-t}$$
em que $T = T(t)$ é a temperatura da água, em ^{o}C, t horas após o início da experiência, faça um esboço do gráfico da temperatura da água em função do tempo.

5 Respostas dos exercícios propostos

1. Exercício 1.

   (a) Domínio: $\mathbb{R}$. Imagem: $(-\infty, 4]$

   (b) Domínio: $[0, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$. Imagem: $(-\infty, 0]$

   (c) Domínio: $\mathbb{R}$. Imagem: $[0, \infty)$

   (d) Domínio: $\mathbb{R}$. Imagem: $\mathbb{Z}$

   (e) Domínio: $\mathbb{R}$. Imagem: $\mathbb{R}$

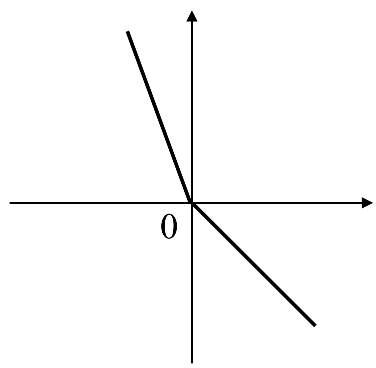


Fig. 1.19

   (f) Domínio: $\mathbb{R} - \{0\}$. Imagem: $\{-1, 1\}$

2. Exercício 2

   Basta observar o gráfico da figura 1.18.

3. Exercício 3.

$$-1, 0, 1/3, 3, \frac{h}{2+h}, \frac{-3+h}{-1+h}, \frac{a-b}{a+b}$$

4. Exercício 4.

$$-\frac{x}{2+x}, \frac{x}{2-x}, \frac{-x-1}{-x+1}, \frac{1-x}{1+x}$$

5. Exercício 5.

   Basta explicitar x em função de y e verificar que $x = \frac{y+2}{2y-1}$

6. Exercício 6.

   Proceda como no exercício anterior.

7. Exercício 7.

   12, 9, 36/5

8. Exercício 8.

$$f(t) = 500000\left(\frac{7}{5}\right)^{(t-2000)}$$

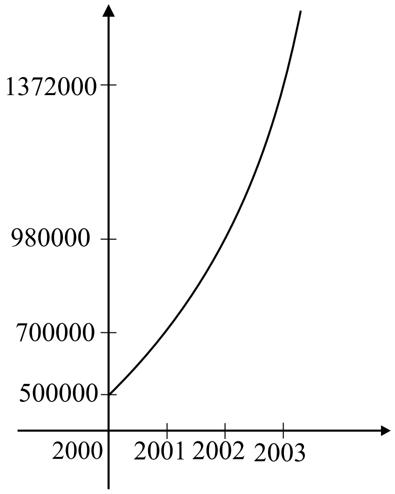


Fig. 1.20

9. Exercício 9.

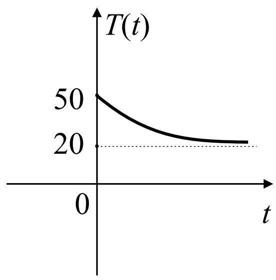


Fig. 1.21

Nesta aula você aprendeu:

- quais foram os principais problemas que motivaram o desenvolvimento do Cálculo;
- o conceito de função.

6 Apêndice

A Matemática e suas origens

A influência dos gregos antigos na sociedade ocidental é algo sobejamente conhecido. Da Filosofia ao Teatro, passando pela Matemática, Medicina, História, Mitologia, Física. Enfim, em todas as áreas do conhecimento, temos o refinamento intelectual da Grécia Antiga a inspirar o desenvolvimento das mais variadas aventuras do espírito humano. Na Matemática, em particular, a obra grega é profundamente seminal. Evidentemente, a Matemática não começou com os gregos antigos. As origens da Matemática seguramente se perdem nas brumas da aurora da humanidade. O ser humano, desde o mais primitivo, ao abrir os olhos se dá conta das diversas formas espaciais; ao deslocar-se entre duas posições, ele o faz de forma a minimizar o seu esforço, escolhendo a distância mais curta. E, assim, esse nosso ancestral estava a desenvolver uma forma primitiva de Geometria intuitiva. No entanto, a utilização da Matemática de uma forma deliberada talvez tenha sido realizada pela primeira vez associada a processos de contagem que estavam relacionados a problemas práticos. Veja Corrêa-Almeida[3].

Seminal. Inspirador, profícuo, proveitoso.

Neste sentido, relacionar os elementos de uma determinada coleção ao número de dedos das mãos e dos pés pode ter sido a primeira tentativa de fazer uma contagem. Porém, se o conjunto a ser contado fosse muito grande, esse método tornar-se-ia impraticável. Nesse caso, o homem primitivo poderia valer-se de um conjunto de pedrinhas e colocá-lo em correspondência, por exemplo, com os componentes de um rebanho.

Assim fazia o personagem Polifemo, o gigante de apenas um olho da Odisséia[4], do escritor grego Homero[5]. O gigante, morador da ilha de Cyclops, após ter sido cegado por Ulisses, postava-se todas as manhãs à entrada de uma caverna, tocando cada ovelha que dali saísse, associando-a a uma pedrinha. Ao final da tarde, cada ovelha que retornasse era novamente relacionada a uma pedrinha do conjunto obtido pela manhã; caso esse último fosse completamente exaurido, o gigante estaria seguro de que seu rebanho teria retornado integralmente à caverna.

Homero (século VIII a.C.) um poeta grego (segundo a tradição era cego) que escreveu duas obras primas da literatura: Ilíada e Odisséia. Esta última descreve as aventuras de Ulisses (em grego, Odysseus).

Esses processos precisavam ser registrados e, para isso, o homem necessitava criar símbolos de modo que os dados coletados não se perdessem. A princípio, esses registros eram efetivados fazendo marcas em bastões ou em pedaços de ossos. Sobre isso transcrevemos, a seguir, um trecho de Boyer[6], pág 3:

[3]Francisco Julio S. A. Corrêa e Arthur C. Almeida, Papiro Rhind e as Frações Unitárias, Revista do Professor de Matemática-SBM, $N^{\underline{o}}$ 35, 1997,2-8.

[4]Homero, Odisséia, Abril Cultural, 1979.

[5]Pierce Vidal-Naquet, O Mundo de Homero, Companhia das Letras, 2002.

[6]Carl B. Boyer, História da Matemática, Edgard Blücher, 1974.

> Poucos desses registros existem hoje, mas na Checoslováquia foi achado um osso de lobo com profundas incisões, em número de cinqüenta e cinco; estavam dispostas em duas séries, com vinte e cinco numa e trinta na outra, com os riscos em cada série dispostos em grupos de cinco. Tais descobertas arqueológicas fornecem provas de que a idéia de número é muito mais antiga do que progressos tecnológicos como o uso de metais ou de veículos de rodas. Precede a civilização e a escrita, no sentido usual da palavra, pois artefatos com significado numérico, tais como o osso anteriormente descrito, vêm de um período de cerca de trinta mil anos atrás.

Vê-se assim que a pré-história da Matemática recua no tempo para muito antes de Homero, cujas obras datam do século VIII a.C.

Deve-se ressaltar que o desenvolvimento da Matemática acompanha *pari passu* o da sociedade em geral. Em virtude disso é que os povos razoavelmente desenvolvidos tiveram que incrementar um aparato matemático que possibilitasse fazer face aos desafios que o progresso suscitava.

Isso foi, em particular, o que ocorreu com os antigos egípcios que desenvolveram, assim como babilônios, indianos e chineses, uma Matemática bastante sofisticada.

O historiador Heródoto, assim como outros intelectuais gregos, viajou por vários lugares, entre os quais o Egito, e, sobre um certo rei egípcio de nome Sesóstris, Heródoto nos diz:

Heródoto (C. 484 - C. 425 a.C.) foi um historiador que escreveu a obra-prima Histórias.

> Esse rei realizou a partilha das terras, concedendo a cada egípcio uma porção igual, com a condição de lhe ser pago todos os anos um certo tributo; se o rio carregava alguma parte do lote de alguém, o prejudicado ia procurar o rei e expor-lhe o acontecido. O soberano enviava agrimensores ao local para determinar a redução sofrida pelo lote, passando o dono a pagar um tributo proporcional à porção restante. Eis, segundo me parece, a origem da Geometria, que teria passado desse país para a Grécia.

Platão, em sua obra *Fedro*, também atribui aos egípcios a criação da Matemática. Mais precisamente, ele diz:

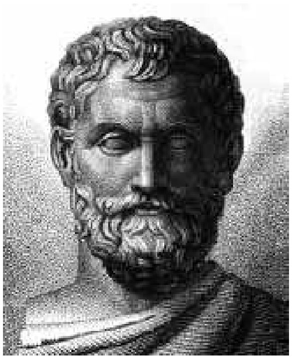
Platão (428 - 347 a.C.), cujo verdadeiro nome era Aristócles, foi um filósofo grego fundador da Academia e autor da monumental A República.

> Na cidade egípcia de Náucratis, existiu um antigo e famoso deus, cujo nome era Thoth; o pássaro chamado íbis lhe era consagrado e ele foi inventor de muitas artes, tais como a Aritmética, a arte de calcular, a Geometria, a Astronomia e os dados, mas sua maior descoberta foi o uso das letras.

Aristóteles, por sua vez, sugere que a Matemática tenha origem egípcia como conseqüência da ascensão de uma classe sacerdotal, que dispunha de tempo suficiente para o estudo, contrastando, assim, com a tese de Heródoto, que apontava origens práticas para a Matemática.

Aristóteles (384/383 - 322 a.C.) foi, talvez a mente filosófica mais universal dos gregos. Dante Alighieri o definiu como o "mestre daqueles que sabem".

Independentemente da finalidade com que a Matemática surgiu, Heródoto, Platão e Aristóteles localizam sua origem no Egito, embora todos concordem com a afirmação de que a prática matemática se deu antes da civilização egípcia. Porém, a Matemática egípcia, assim como de resto todas as suas contemporâneas, tinham, ao que parece, objetivos meramente pragmáticos. É o que se deduz de seus papiros ainda hoje conservados em várias bibliotecas americanas e européias. Vejamos algumas observações sobre o Papiro de Rhind ou de Ahmes.



Tales de Mileto

No inverno de 1858, o jovem antiquário escocês A. Henry Rhind, de passagem por Luxor, cidade egípcia às margens do Nilo, adquiriu um papiro (30cm de altura e 5m de comprimento) que havia sido encontrado nas ruínas de uma antiga edificação em tebas. Com a morte de Rhind, ocorrida cinco anos após, vitimado por tuberculose, o seu papiro foi adquirido pelo Museu Britânico.

Esse documento, que passou a ser chamado *Papiro de Rhind*, foi escrito por volta de 1700 a.C. por um escriba chamado Ahmes, Ah-mose (sendo por isso também conhecido como *Papiro de Ahmes*), por solicitação de um certo rei Hyksos que reinou no Egito em algum período entre 1788 e 1580 a.C. Ahmes relata que o material provém de um outro manuscrito produzido em alguma época entre 2000 e 1800 a.C. Assim, o documento mais antigo da Matemática tem cerca de 4000 anos, sendo Ahmes a primeira figura da Matemática registrada na História.

Algumas datas são escritas como 'c. 230 a.C.', por exemplo, 'Eudoxo (c. 400-347)'. Este **c.** indica que a data não é exata, refere-se a um período aproximado. O **c.** vem da palavra latina *circa*, que quer dizer 'aproximadamente', 'por volta de'. Veja Daniel C. de Morais Filho, Como Escrever um Texto Matemática.

Geometria é um substantivo derivado do grego e composto de geo, que significa terra, e metron que significa medida, ou seja, etimologicamente, Geometria significa medida de terras, o que vem ao encontro do que se disse previamente sobre a medida de terras efetuada pelos egípcios.

O *Papiro Rhind* é uma coleção ou, mais precisamente, um manual, contendo problemas práticos de natureza aritmética, algébrica e geométrica com instruções para soluções, sem que haja vestígio de demonstrações ou formalismos, coisas só registradas muito tempo depois pelos gregos, a partir de Tales.

Tales de Mileto (c. 546 a.C.), considerado o pai da Geometria Demonstrativa, foi um dos sete sábios da antiguidade.

Tendo dedicado parte de sua vida ao ofício de mercador, tornou-se suficientemente rico para devotar-se posteriormente ao estudo e às viagens. De suas visitas ao Egito levou a Mileto os conhecimentos de Geometria adquiridos pelos egípcios, tendo conquistado o respeito de seus concidadãos não apenas como matemático mas também como estadista, conselheiro, engenheiro, homem de negócios, filósofo e astrônomo.

É conhecido como o primeiro matemático cujo nome está ligado a teoremas, por isso mesmo o seu epíteto de pai da Geometria Demonstrativa (ou dedutiva, ou sistemática) que desaguou em *Os Elementos* de Euclides, obra na qual é sistematizada a Matemática nos moldes que a conhecemos nos dias de hoje. A Tales de Mileto são creditadas as demonstrações dos seguintes resultados:

1. Qualquer diâmetro de um círculo divide-o em duas partes iguais.
2. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
3. Ângulos opostos pelo vértice são iguais.
4. Se dois triângulos têm dois ângulos e um lado em cada um deles, respectivamente, iguais, então esses triângulos são congruentes.
5. Um ângulo inscrito num semicírculo é reto (veja figura 1.22).

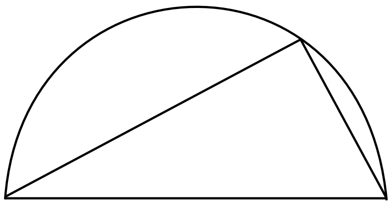
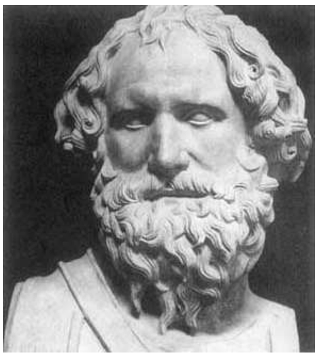


Fig. 1.22

A postura inaugurada por Tales de Mileto é uma das pedras angulares da Matemática. Observe que o resultado 1 descrito linhas atrás é extremamente óbvio. Contudo, mais importante do que o próprio resultado foi a percepção de Tales de que ele podia (ou deveria) ser demonstrado.

Arquimedes



Arquimedes, que viveu e morreu em Siracusa, cidade localizada na ilha da Sicília, atualmente pertencente à Itália, muito embora não tenha aí nascido, foi, provavelmente, o maior matemático da antiguidade clássica.

Além da Quadratura da Parábola, Arquimedes escreveu outras obras importantes, entre as quais destacamos: *Sobre a Esfera e o Cilindro, Sobre Espirais, Sobre Equilíbrio de Corpos Planos*, etc. A obra de Arquimedes que mais o aproxima do Cálculo que começaremos a estudar é a Quadratura da Parábola, na qual se encontram as raízes do Cálculo Integral, pois o que ele fez foi aproximar um segmento de parábola por triângulos nela inscritos e assim exaurindo-a de modo que os triângulos a preenchessem. É evidente que por mais que aumentemos o número de triângulos inscritos, sempre a área total da parábola será maior que a área da totalidade de triângulos inscritos e aí é que entra em cena o conceito de integral, com a sua subjacente noção de limite para justificar as passagens do número finito de triângulos para o cálculo preciso da área. Tornaremos as idéias acima mais precisas no estudo da Integral.

Com relação a Arquimedes, o matemático inglês do século XX, G. H. Hardy disse: "Arquimedes será lembrado quando Ésquilo já tiver sido esquecido, porque as línguas morrem, mas as idéias matemáticas não". De maneira semelhante Voltaire observou: "havia mais imaginação na cabeça de Arquimedes do que na de Homero". Veja Eves[7].

Sobre os filósofos citados aqui, e vários outros, o leitor pode consultar a excelente obra de Reale-Antiseri[8].

Fermat

Uma conjectura é um conjunto de idéias que, em conjunto, constitui uma hipótese. Uma conjectura pode ser falsa ou verdadeira. Um exemplo típico é o Último Teorema de Fermat que, antes de ser demonstrado, era apenas uma conjectura. Uma conjectura famosa é a chamada conjectura de Goldbach: "Todo número par maior do que 2 pode ser escrito como a soma de dois números primos".

Diofanto de Alexandria (c. 250 a.C.) foi um matemático grego que escreveu três trabalhos: Aritmética, Sobre Números Poligonais e Porismas, que tiveram grande importância para o desenvolvimento da Álgebra e da Teoria dos Números.

Pierre de Fermat (1601-1650), matemático francês, que no dizer de Laplace foi o verdadeiro inventor do Cálculo Diferencial, era advogado, formado em Toulouse, o qual, além de suas contribuições para o desenvolvimento do Cálculo e da Geometria Analítica, deixou como legado um problema, chamado *Último Teorema de Fermat*, formulado em 1630, que foi alvo da atenção de vários matemáticos, profissionais ou amadores, o

[7]Howard Eves, Introdução à História da Matemática, 3ª Edição, Editora UNICAMP, 2002.

[8]Giovanini Reale e Dario Antiseri, História da Filosofia, vol. I, Edição Paulinas 1990.

qual foi resolvido completamente por Andrew Wiles, apenas em 1995, ou seja, mais de três séculos depois de ter sido conjecturado. Tal conjectura foi enunciada por Fermat à margem de seu exemplar da Aritmética de Diofanto, obra traduzida por Bachet, ao lado do Problem 8 do Livro II:

> Dado um número quadrado, dividi-lo em dois quadrados.

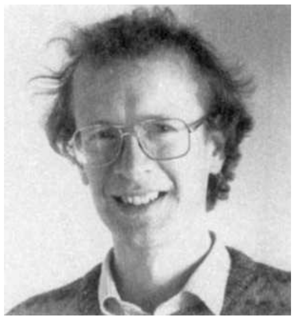
Na nota marginal de Fermat lê-se,

> Dividir um cubo em dois cubos, uma quarta potência ou, em geral, uma potência qualquer em duas potências da mesma denominação acima da segunda é impossível, e eu seguramente encontrei uma prova admirável desse fato, mas a margem é demasiado estreita para contê-la.

Um Porisma é uma proposição que expressa uma condição que se traduz num certo problema solúvel, tendo o problema então infinitas soluções. Vide Eves, para mais detalhes.

Será sempre um mistério saber se Fermat estava blefando ou não. A verdade é que tal problema foi alvo da atenção de vários eminentes matemáticos. Reproduzamos, abaixo, o que é dito por Eves[9], em um livro escrito antes do trabalho de Andrew Wiles:

> Será sempre um enigma saber se Fermat tinha ou não, realmente, uma demonstração correta de sua afirmação. O fato é que, desde então, muitos dos mais brilhantes matemáticos empenharam seu talento na resolução do problema, mas a conjectura geral ainda permanece aberta. Em algum lugar Fermat demonstrou o caso $n = 4$; e Euler forneceu uma prova (depois melhorada por outros) para $n = 3$. Por volta de 1825, Legendre e Dirichlet demonstraram independentemente o caso $n = 5$; o teorema foi provado em 1839 por Lamé para $n = 7$. O matemático alemão E. Kummer (1810-1893) empreendeu avanços significativos no estudo do problema. Em 1843 submeteu uma pretensa prova do teorema a Dirichlet que localizou nela um erro de raciocínio. Kummer retornou então ao problema com vigor renovado e, em poucos anos, depois de desenvolver um importante aliado na álgebra superior, um assunto chamado teoria dos ideais, deduziu condições de insolubilidade muito gerais para a relação de Fermat. Quase todos os progressos subseqüentes na resolução do problema basearam-se nas investigações de Kummer. Sabe-se agora que o último "teorema" de Fermat é efetivamente verdadeiro para $n < 125.000$ e para muitos outros valores especiais de n. Em 1908 o matemático alemão Paul Wolfskehl legou 100.000 marcos à Academia de Ciências de Göttingen como prêmio para



Andrew Wiles, matemático inglês que concluiu a demonstração do Último Teorema de Fermat, seguindo o improvável caminho inicialmente apontado pelos japoneses Yutaka Taniyama e Goro Shimura.

[9]Howard Eves, Introdução à História da Matemática, Tradução de Hygino H. Domingues, Coleção Repertórios, Editora da UNICAMP.

a primeira demonstração completa do "teorema". O resultado foi uma avalanche de supostas provas motivadas pela glória e pelo dinheiro; inclusive, desde então, o problema tem obcecado amadores, como o da trissecção do ângulo e o da quadratura do círculo. O último "teorema" de Fermat ganhou a distinção de ser o problema matemático com maior número de demonstrações incorretas publicadas.

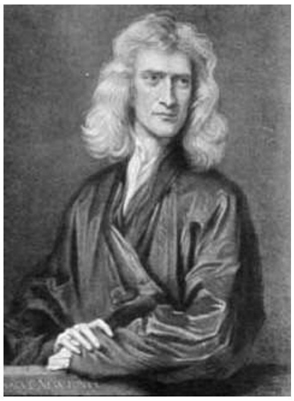
Euclides

Euclides em "A Escola de Atenas", detalhe de afresco pintado por Rafael.

Euclides (fl. 300 a.C.), matemático grego, cuja obra principal, conhecida como Os Elementos, é uma coletânea constituída de 13 volumes que envolvem geometria plana, proporções, Aritmética, teoria das proporções e geometria espacial. Estudou em Atenas e provavelmente foi discípulo de Platão. Foi contratado como um dos matemáticos do Museum de Alexandria, se constituindo em um dos primeiros matemáticos profissionais de que se tem conhecimento sendo que o Museum deve ter sido uma das primeiras, senão a primeira, Universidade em toda a História da humanidade, pois lá cultivava-se o ensino e a pesquisa, que são atividades que caracterizam as modernas Universidades. Deve-se ressaltar que nem todos os resultados de Os Elementos são devidos a Euclides. Esta sua obra é, também, uma compilação de vários resultados obtidos até então.

No entanto, a obra de Euclides foi fundamental para o desenvolvimento da Matemática e ela é, depois da Bíblia, o livro mais editado em todo o mundo.

Isaac Newton

Existem alguns gigantes da Ciência sobre os quais as informações não podem se restringir a meras notas marginais. Precisamos nos alongar um pouco mais para podermos fornecer uma idéia que não seja muito imprecisa sobre suas vidas e, principalmente, suas obras. Este é o caso de Isaac Newton.

Isaac Newton nasceu, prematuramente, no dia de Natal de 1642, no mesmo ano da morte de Galileu Galilei (1564-1642), também uma das figuras mais proeminentes da Ciência, em Woolsthorpe, cerca de 90 km de Cambridge.

Newton estudou em escolas locais até os doze anos de idade, quando então deslocou-se 11km ao norte, até Grantham, onde residiu com o boticário local. Quatro anos depois, em 1658, retornou à casa materna (seu pai faleceu em outubro de 1642, antes, portanto, do nascimento de Newton).

Em 1661, aos dezoito anos de idade, matriculou-se no Trinity College, a mais famosa faculdade da Universidade de Cambridge. No verão de 1665, virtualmente quase todos abandonaram a Universidade em virtude da peste bubônica. No mês de março de 1666 a Universidade conclama estudantes e professores sob o argumento de que a peste havia sido debelada. Mas, em junho deste mesmo ano, verificou-se que este não era o caso. A praga ainda estava presente e novamente a Universidade esvaziou-se; o retorno ocorreu somente na primavera de 1667. Em particular, Newton havia partido para Woolsthorpe em agosto de 1665.

Quando retornou para Cambridge ele já havia escrito o seu tratado sobre Cálculo, o qual foi concluído em maio de 1666.

Tornou-se Professor Lucasiano (título esse em homenagem a Henry Lucas, fundador do cargo) em 29 de outubro de 1669, com apenas vinte e seis anos de idade, tendo sucedido a Isaac Barrow (1630-1677). Esse cargo forneceu a Newton segurança, independência intelectual e um bom salário. Durante os primeiros dezessete anos de seu cargo como professor, ele depositava de três a dez trabalhos de pesquisa por ano, mas depois disso nada mais foi depositado.

Foi diretor da Casa da Moeda, dedicou-se à Alquimia e possuía um temperamento extremamente difícil, vivendo praticamente recluso. Em James Gleick[10] é dito:

> Descartes era um sonhador; Newton um sábio. Descartes experimentou a poesia e o amor; Newton, não. Voltaire, filósofo francês, que se encontrava em Londres por ocasião do funeral de Newton, nos diz:
>
> "No curso de uma vida tão longa, ele não teve paixões nem fraquezas; nunca chegou perto de uma mulher. E isso me foi confirmado pelo médico e pelo cirurgião que presenciaram sua morte".

Morreu em 1727 deixando-nos um legado, talvez o mais importante da Ciência, no qual se inclui os estudos sobre o Cálculo Diferencial e Integral, a Lei da Gravitação Universal, Ótica e vários outros que têm norteado o desenvolvimento científico e tecnológico. Afirmou certa vez que havia conseguido enxergar mais longe por ter ficado em pé sobre ombros de gigantes, frase esta não original pois em Jacques Le Goff[11] encontra-se a seguinte citação de Bernard de Chartres, ainda na Idade Média:

> Somos anões carregados nos ombros de gigantes. Assim vemos mais longe do que eles, não porque nossa visão seja mais aguda ou nossa estatura mais elevada, mas porque eles nos carregam alto e nos levantam acima de sua altura gigantesca . . .

[10] James Gleick, Isaac Newton, Uma Biografia, Companhia das Letras, 2003.
[11] Jacques Le Goff, Os Intelectuais na Idade Média, José Olympio, Editores.