Aula 2

Limites: motivações geométrica e cinemática

Objetivos

- Compreender as motivações geométricas e cinemáticas para o conceito de limite.
- Calcular alguns limites simples.

O conceito formal de limite envolve um rigor que, normalmente, para o principiante não pode ser apreciado em toda a sua profundidade, pois o excesso de formalismo, em estudos iniciais, esconde aquilo que é essencial. Em virtude disso, ao introduzirmos o conceito de limite, optamos por dar ênfase às idéias, às técnicas e às aplicações pois, agindo deste modo, incutiremos no aluno neófito no estudo do Cálculo a convicção de que ele está a estudar não apenas algo importante do ponto de vista matemático, como também uma disciplina que permeia as diversas áreas do conhecimento científico e tecnológico. Essas motivações levam o estudante que está a iniciar-se no Cálculo a compreender a sua essência, com a qual poderemos partir para formalizações, após esse início intuitivo, em uma etapa em que o aluno tiver adquirido um mínimo de maturidade.

Comecemos com o problema da tangente.

1 O problema da tangente

Como vimos na aula 1, um dos problemas que motivarão o estudo da derivada é o do traçado de tangentes. Tal questão já era estudada desde a Grécia Antiga conforme nos mostra Euclides no Livro III, Proposição 16, do seu Elementos[1]. Nessa Proposição, Euclides nos mostra que, dado um

[1]Euclid, Euclid's Elements, Great Books of the Western World, Vol. 10

círculo de centro O a reta r passando por um de seus pontos P é tangente ao círculo se o ângulo $\widehat{OPT}$, em que T é um ponto qualquer de r, for reto. Seu argumento é extremamente simples e será reproduzido aqui, à guisa de ilustração. Consideremos, conforme figura 2.1(a), o círculo de centro O e de um determinado raio. Temos que ou a reta r intersecta o círculo em um outro ponto, digamos, Q, ou não. No primeiro caso o segmento $\overline{OQ}$ será igual ao segmento $\overline{OP}$. Se $\widehat{OPQ} = \pi/2$ e, como o triângulo $\triangle OPQ$ é isósceles, teríamos que $\widehat{OQP} = \pi/2$ e chegaríamos a uma contradição. Portanto, $P = Q$ e a reta r é tangente ao círculo no ponto P caso ela seja perpendicular ao raio OP. Veja figura 2.1(b). A partir da construção de retas tangentes pode-se traçar retas normais.

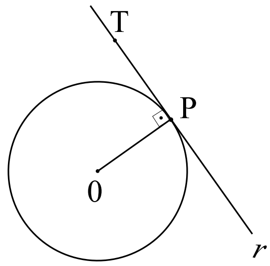


Fig. 2.1(a)

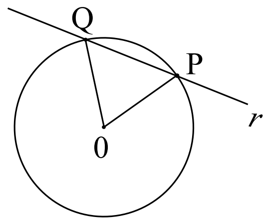


Fig. 2.1(b)

Apolônio de Perga, matemático grego que, com Euclides e Arquimedes, divide a glória de ser considerado um dos gigantes do século III a.C., era matemático notável, além de astrônomo. Sua obra mais conhecida é *Seções Cônicas*, constituída de oito livros e quatrocentas proposições, e deve-se a ele os termos elipse, parábola e hipérbole para designar as seções cônicas.

Já *Apolônio de Perga* (262-190 a.C.), em seu tratado sobre as cônicas, usa métodos similares para provar propriedades sobre as tangentes e normais à parábola, elipse e hipérbole. Também *Arquimedes* (287-212 a.C), em sua obra *Sobre Espirais*, constrói a tangente à chamada *Espiral de Arquimedes*. No entanto, todos os métodos empregados pelos matemáticos supracitados aplicavam-se a casos específicos e, pelo menos nos casos das cônicas, a reta tangente era aquela que intersecava a curva em apenas um ponto. No entanto, como o leitor pode verificar na figura 2.2(a), podemos ter uma reta intersecando uma dada curva em apenas um ponto e tal interseção processando-se de maneira, digamos, transversal. Além disso, uma dada reta poderá encontrar uma curva em mais de um ponto e ser tangente, como é o caso que acontece com a *Espiral de Arquimedes*, ou como na figura 2.2(b).

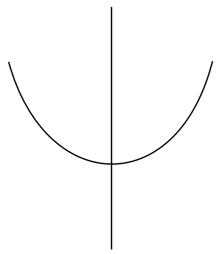


Fig. 2.2(a)

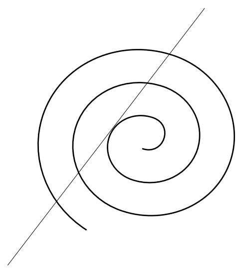


Fig. 2.2(b)

Em vista disso, faz-se mister construir um método geral para a construção de retas tangentes. É o que começaremos a fazer agora, utilizando um processo que nos permitirá introduzir, de maneira bastante ilustrativa, o conceito intuitivo de limite. Comecemos, por comodidade, com um caso bastante particular, mas alertando o estudante que a essência do processo é inteiramente geral.

Exemplo 10. Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Nosso problema consiste em determinar a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em um ponto qualquer $P(x_0, x_0^2)$. Evidentemente, como bem destacamos na introdução, não podemos fazer uso da construção geométrica feita no caso da circunferência, haja vista que o gráfico de f é uma parábola e não temos a noção de centro, raio, etc. Em virtude disso, lançaremos mão de um processo que, a princípio, usará uma aproximação. Mais precisamente, consideremos o ponto $Q(x_0 + h, (x_0 + h)^2)$ pertencente ao gráfico de f. A reta secante determinada por tais pontos possui inclinação m_{PQ} dada por

$$m_{PQ} = \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h}$$

a qual, após as devidas simplificações, adquire a forma

$$m_{PQ} = 2x_0 + h \tag{2.1}$$

Evidentemente, tal número não medirá a inclinação daquilo que esperamos ser a reta tangente à curva no ponto P, ou seja, a reta que nas"proximidades" desse ponto toque a curva em apenas um ponto. Veja figuras 2.3.

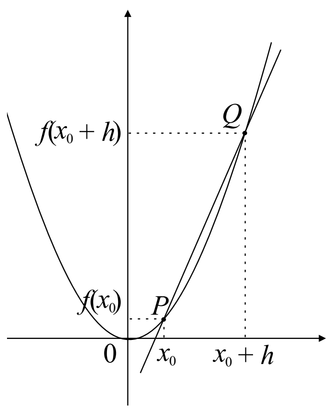


Fig. 2.3(a)

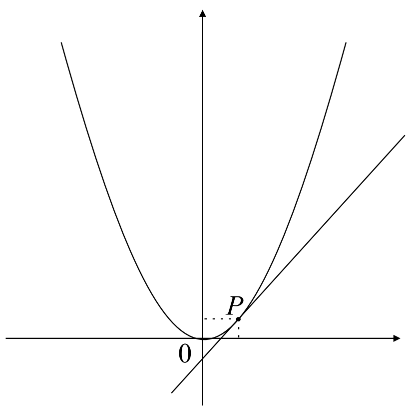


Fig. 2.3(b)

No entanto, quanto mais próximo o ponto P estiver do ponto Q, o que equivale dizer que h estará próximo de zero, a reta secante determinada por P e Q estará próxima de uma posição tangente. Contudo, por menor que seja o valor de h haverá sempre um erro ao aproximar a reta tangente pela reta secante. Contornaremos tal problema fazendo o h *tender a zero* ou, como diz-se no jargão do Cálculo, *tomar o limite da expressão quando* $h \to 0$. Deste modo, a expressão na igualdade (2.1) assume valor $2x_0$, ou mais formalmente

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 2x_0 \tag{2.2}$$

a qual representa a inclinação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(x_0, f(x_0))$.

O objeto estranho

$$\lim_{h \to 0},$$

Com relação ao rigor, vale lembrar a citação: "Rigor é como uma roupa, fica desconfortável se muito folgada ou se muito apertada.

até então desconhecido do aluno egresso do ensino médio, e aqui introduzido de maneira bastante intuitiva, é um divisor de águas entre a Matemática Clássica e a Matemática Moderna, inaugurada por Fermat, Newton, Leibniz, entre outros. Tal objeto será estudado com mais detalhes ao longo do curso, com o rigor sendo colocado de maneira paulatina de modo a não causar traumas pedagógicos no aluno ainda pouco experiente. No entanto, o dito *objeto estranho* tornar-se-á tão íntimo do estudante de Cálculo que qualquer desconforto inicial ao tratar com ele será substituído por uma intimidade extremamente familiar.

A expressão (2.2) é escrita, também, da seguinte maneira. Façamos $x_1 = x_0 + h$ e observemos que fazer h tender a zero é equivalente a fazer o ponto x_1 se aproximar de x_0 e assim o limite expresso na igualdade (2.3) é reescrito como

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Vejamos o que acontece em um caso numérico específico. No exemplo acima, faça $x_0 = 3$ de modo que $y_0 = f(x_0) = 9$ e considere valores de x_1 e seus correspondentes $y_1 = f(x_1)$. Evidentemente, tais valores atribuídos a x_1 devem estar próximos de x_0, ou pela direita ou pela esquerda. Observemos a tabela (2.1) a seguir.

x_1	y_1	$y_1 - y_0$	$x_1 - x_0$	$(y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$
3,01	9,0601	0,0601	0,01	6,01
3,001	9,006001	0,006001	0,001	6,001
3,0001	9,00060001	0,00060001	0,0001	6,0001
2,5	6,25	-2,75	-0,5	5,5
2,9	8,41	-0,59	-0,1	5,9
2,99	8,9401	-0,0599	-0,01	5,99
2,999	8,994001	-0,005999	-0,001	5,999
2,9999	8,99940001	-0,00059999	-0,0001	5,9999

Infere-se dessa tabela que, à medida que x_1 se aproxima de x_0, tanto pela direita como pela esquerda, o valor de $\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ se aproxima de 6. Na notação de limites, tem-se

$$\lim_{x\to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 6.$$

Observemos então que obtivemos a noção de tangente por meios algébricos, sem fazer uso de construções geométricas, como os feitos por Euclides no caso da circunferência.

Deve-se observar que o procedimento que acabamos de descrever, muito embora tenha sido aplicado a um caso específico, possui um caráter geral. Mais precisamente, se tivermos uma função $y = f(x)$, definida em um certo intervalo I de $\mathbb{R}$, e caso queiramos determinar a inclinação da reta tangente ao seu gráfico em um ponto $P(x_0, f(x_0))$ procederemos de modo inteiramente análogo, ou seja, consideraremos um ponto $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$, em que h é um acréscimo, que poderá ser positivo ou negativo, dado à variável x. Assim, a inclinação m_{PQ} da reta secante ao gráfico de f, determinada pelos pontos P e Q, será dada por

$$m_{PQ} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Conseqüentemente, a inclinação da reta tangente será obtida quando fizermos h tender a zero, isto é,

$$m_P = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{2.3}$$

caso tal *limite*, que será chamado derivada de f no ponto x_0, exista. Como dissemos anteriormente, poderemos reescrever a equação (2.3) da seguinte maneira

$$m_P = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Vejamos um exemplo.

Exemplo 11. Seja $f(x) = x^3$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Determinaremos a equação da reta tangente ao gráfico de f em um dado ponto $P = (x_0, x_0^3)$. Para isso, aplicaremos a idéia desenvolvida no exemplo anterior. Com efeito, seja $Q = (x_0 + h, (x_0 + h)^3)$ um ponto do gráfico de f obtido efetuando-se um acréscimo na variável x, e assim teremos a reta que passa por P e Q, secante ao gráfico de f, conforme figuras 2.4.

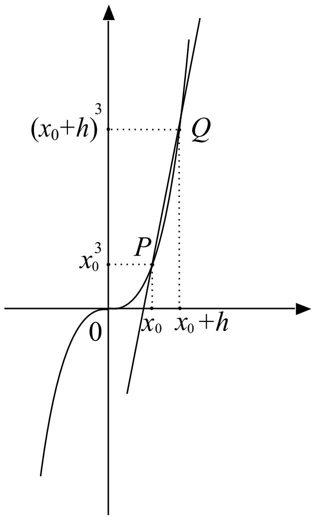


Fig. 2.4(a)

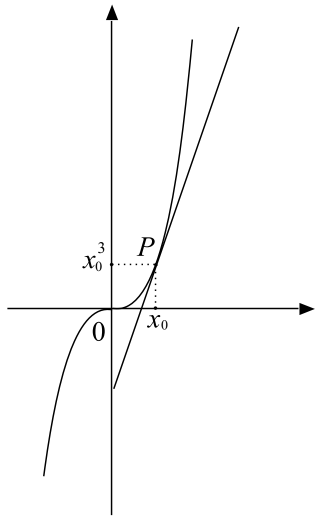


Fig. 2.4(b)

Sua inclinação m_{PQ} será dada por

$$m_{PQ} = \frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{h} = 3x_0^2 + 3x_0 h + h^2. \tag{2.4}$$

Ora, como vimos antes, por menor que seja o valor do acréscimo h, obteremos sempre uma reta secante que, no entanto, tenderá a uma posição limite quando h *tender a zero*, devendo-se ressaltar que o h acima pode ser positivo ou negativo, ou seja, a existência do limite pressupõe que podemos nos aproximar do ponto em questão, tanto pela direita como pela esquerda do ponto x_0. Portanto, em virtude da expressão em (2.4), a reta tangente ao gráfico de f no ponto P terá inclinação

$$m_P = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 3x_0^2.$$

De posse desta inclinação e do ponto $P = (x_0, x_0^3)$ encontrar-se-á facilmente a equação da reta tangente. O leitor está convidado a mostrar que a equação de tal reta tangente é dada por

$$y = 3x_0^2 x - 2x_0^3\,.$$

Exemplo 12. Consideremos a função $f(x) = \sqrt{x}$ que está definida apenas para valores de x maiores do que ou iguais a zero. Determine a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em um ponto qualquer $P(x_0, \sqrt{x_0})$, $x_0 > 0$.

Solução. Supondo $x_0 > 0$, daremos o acréscimo h para obter o ponto $Q(x_0{+}h, \sqrt{x_0 + h})$ ainda sobre o gráfico de f. A inclinação da reta secante que passa por P e Q é dada por

$$m_{PQ} = \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h}\,. \tag{2.5}$$

Como queremos obter a inclinação da reta tangente, devemos fazer o acréscimo tender a zero na expressão acima. No entanto, se assim procedermos, seremos levados a uma expressão indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$. Em vista disso, devemos *levantar a indeterminação*[2], o que será feito por métodos puramente algébricos, já de conhecimento do leitor. Procedamos da seguinte maneira: multipliquemos numerador e denominador na expressão em (2.5) por $\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}$ para obtermos

$$m_{PQ} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} \, .$$

Nesta última expressão podemos fazer o h tender a zero e assim obter a inclinação m da reta tangente ao gráfico de f no ponto P, ou seja,

$$m = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \, .$$

Observemos que o acréscimo h pode ser tanto positivo como negativo desde que, neste último caso, o seu módulo seja suficientemente pequeno, de modo que $x_0 + h$ ainda seja um número positivo.

Feito isso, podemos imediatamente determinar a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, \sqrt{x_0})$, pois já conhecemos a sua inclinação. Um cálculo elementar nos mostra que tal equação é

$$y = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} x + \frac{\sqrt{x_0}}{2} \, .$$

Conseqüentemente a equação da reta normal ao gráfico de f, no mesmo ponto, será

$$y = -2\sqrt{x_0} x + \sqrt{x_0}(1 + 2x_0)$$

O leitor está convidado a analisar o problema quando $x_0 = 0$.

Esperamos que o leitor tenha percebido o processo que consistiu em considerar acréscimos e seus quocientes e depois fazer o acréscimo *tender a zero.* Em um dos Apêndices desta aula reproduziremos algumas observações sobre o método de Descartes para o traçado de tangentes.

Antes de continuarmos, façamos um parêntese para introduzir uma noção inicial sobre *indeterminação.* Notemos que a expressão $\frac{0}{0}$ é desprovida de sentido matemático. Da definição de divisão, $\frac{a}{b} = c$ significa que $a = bc$. Portanto, se escrevêssemos $\frac{0}{0} = x$, essa igualdade significaria que

[2] Observemos que isto ocorreu nos exemplos anteriores. No entanto, como podíamos colocar o h em evidência, no numerador, ele podia ser cancelado com o h do denominador, de modo que a *indeterminação* era levantada automaticamente.

$0\,x = 0$. Ora, todo número x é tal que $0\,x = 0$, por isso se diz que $\frac{0}{0}$ é uma "expressão indeterminada". O mesmo acontece com a expressão 0^0. Veja Lima[3] para mais informações sobre o assunto.

2 O problema da velocidade

Nosso objetivo nesta seção é mostrar a relação que há entre o problema da determinação da reta tangente, vista na seção anterior, com o de calcular a velocidade instantânea, entendida como aquela que o velocímetro de um carro registra a cada instante de seu movimento. Para tal, suponhamos que um móvel esteja se deslocando ao longo de uma reta regido pela equação horária

$$s = s(t) = 3t^2 - 5t + 2$$

em que $s = s(t)$ representa a distância percorrida pelo corpo no tempo t, sendo s medida em metros e t em segundos. Desejamos dar um sentido à noção de velocidade em um determinado instante t. Sabe-se da Física que a velocidade média de uma partícula em um certo lapso de tempo é o quociente entre a distância percorrida e o intervalo de tempo gasto em percorrê-la. Portanto, a velocidade média v_m do móvel no intervalo $[t, t + \Delta t]$ será dada por

$$v_m = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = 6t - 5 + 3\Delta t.$$

Evidentemente, esse valor poderá ser bastante diferente do da velocidade que desejamos determinar se o valor Δt for grande. No entanto, à medida que fizermos o intervalo de tempo usado na experiência bem pequeno, o valor v_m obtido acima ficará cada vez mais próximo do da velocidade instantânea no tempo t. O valor preciso será obtido quando fizermos $\Delta t \to 0$, o que se lê Δt *tende a zero*. Portanto, a velocidade $v(t)$ no instante t será

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = 6t - 5.$$

Como o leitor pode verificar, o procedimento usado neste segundo exemplo segue os mesmos caminhos daqueles percorridos na resolução do problema da tangente, isto é, na impossibilidade de tratarmos diretamente com o problema proposto, faz-se inicialmente uma aproximação à custa de conceitos previamente conhecidos e daí, por um processo de *passagem ao limite*, obtemos o resultado procurado.

[3]Elon Lages Lima, Meu Professor de Matemática e outra histórias, Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, SBM, 1997.

3 Um pouco de generalidade

Utilizando a idéia desenvolvida anteriormente, vejamos agora um procedimento um pouco mais geral, no sentido de que consideraremos uma função qualquer $y = f(x)$ e desejamos verificar o que acontece com os valores de $f(x)$ à medida que x se aproxima de um dado número b. Comecemos com um exemplo específico.

Exemplo 13. Consideremos a função quadrática $f(x) = x^2$ e analisemos o que acontece com os valores de $f(x)$ quando x se aproxima de 2, ou, usando o linguajar matemático, *desejamos calcular o limite de* $f(x)$ *quando* x *tende ao valor* 2. Simbolicamente, este fato é traduzido por

$$\lim_{x \to 2} f(x)\,.$$

Para ver o que acontece com este procedimento dinâmico analisemos a tabela abaixo e à esquerda:

x	$f(x) = x^2$
1,5	2,25
1,6	2,56
1,7	2,89
1,8	3,24
1,9	3,61
1,99	3,9601
1,999	3,996001
1,9999	3,99960001
1,99999	3,99996
1,999999	3,999996
1,9999999	3,9999996

x	$f(x) = x^2$
2,5	6,25
2,4	5,76
2,3	5,29
2,2	4,84
2,1	4,41
2,05	4,2025
2,04	4,1616
2,03	4,1209
2,02	4,0804
2,01	4,0401
2,001	4,004001

Observemos que à medida em que x se aproxima de 2, por valores menores que 2, $f(x)$ fica cada vez mais próximo de 4. Vejamos a tabela à direita em que x se aproxima de 2 por valores maiores do que 2.

Nesse caso também tem-se que os valores de $f(x)$ se aproximam de 4 quando x tende a 2 por valores maiores do que 2. Observando que $f(2) = 4$ somos tentados a concluir que

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} x^2 = 4 = f(2).$$

Isto é o que acontece com quase todas as funções com as quais temos trabalhado até agora. Observemos que o universo das funções conhecidas pelo leitor, embora seja rico, é constituído por funções *bem comportadas*, entre as quais destacamos os polinômios, as funções trigonométricas, a função exponencial, etc. Para esta classe de funções tal fenômeno sempre se verifica, ou seja, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Exemplo 14. Consideremos o caso em que $f(x) = x^2 - 7x^3 + 5$ e observemos que

$$\lim_{x \to 1}(x^2 - 7x^3 + 5) = 1^2 - 7(1^3) + 5 = -1 = f(1)\,.$$

No entanto, nem sempre isto ocorre. Vejamos os seguintes exemplos. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = -x^2 + 6x - 5\,,$$

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x - 5 & \text{se} \quad x \neq 3, \\ 1 & \text{se} \quad x = 3. \end{cases}$$

Claramente, $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = 4$. No entanto, $\lim_{x \to 3} g(x) = 4 \neq 1 = g(3)$. Observemos que o gráfico de f é traçado de modo contínuo, ao passo que o de g possui um determinado salto. Veja figuras 2.5(a) e 2.5(b) a seguir.

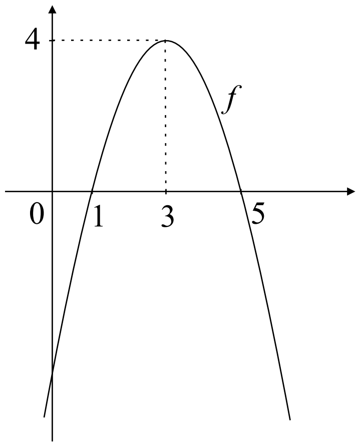


Fig. 2-5(a)

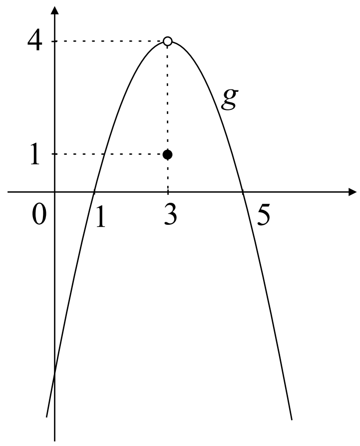


Fig. 2-5(b)

Esses exemplos mostram que é preciso ser bastante cuidadoso ao tratarmos com o conceito de limite. Isso ficará gradativamente claro ao analisarmos determinados exemplos bastante típicos de certos fenômenos. Confira o exemplo a seguir.

Exemplo 15. Consideremos a função dada por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}\,.$$

Como $x = 1$ não pertence ao domínio de f, caso queiramos calcular $\lim_{x \to 1} f(x)$, não podemos, como no caso anterior, atribuir a x o valor 1, pois assim teríamos uma expressão do tipo $\frac{0}{0}$, que é chamada indeterminação, pois não possui valor matemático definido. Contudo, não há motivo para desesperarmos, pois, se $x \neq 1$, pode-se reescrever a expressão da função como

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1},$$

o que nos fornece

$$f(x) = x + 1,\ x \neq 1\,.$$

Assim,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}(x+1) = 2.$$

Neste exemplo, fica evidente que para calcularmos o limite de uma função em determinado ponto, não é necessário que a função esteja definida nele, ou seja, não há a necessidade de que tal ponto pertença ao domínio da função. Basta que a função esteja definida em uma *vizinhança* do referido ponto. No decorrer das lições, outras indeterminações surgirão, entre as quais algumas que não poderão ser levantadas por procedimentos puramente algébricos como o do problema anterior. Um exemplo típico é o da função $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ quando x tende a zero. Tal limite, que é um dos limites fundamentais do cálculo, é dado por

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

e será estudado com detalhes na aula 3.

Nos casos anteriores a função f aproximava-se sempre do mesmo valor, independente da maneira como x tendia ao número a. No entanto, esse não é o caso geral, ou seja, como dissemos anteriormente, a análise das questões relacionadas com limites deve ser tratada de maneira bastante cuidadosa, pois elas estão freqüentemente reservando-nos surpresas. Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 16. Consideremos a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0, \\ 1, & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a qual surge em aplicações práticas como em eletricidade, mecânica, etc. Analisemos o comportamento dessa função quando x estiver próximo de zero. Ora, x pode aproximar-se de zero tanto pela sua direita como pela sua esquerda. Indicaremos tais fatos, respectivamente, por $x \to 0^+$ e $x \to 0^-$. À direita de 0 a função é constante e igual a 1 e assim diremos que o limite da função f quando x se aproxima de 0 pela direita - *limite lateral à direita* - é igual a 1, e escreve-se

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1\,.$$

De maneira análoga, teremos o *limite lateral à esquerda* dado por

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0\,.$$

Quando tal fato acontecer - limites laterais existem mas são distintos - diremos que o limite não existe.

Não esqueçamos a seguinte observação:

O limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe se, e somente se, os limites laterais $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to a^-} f(x)$ existirem e forem iguais.

Observação 1. Deve-se ressaltar que em algumas situações pode-se apenas calcular um dos limites laterais. É o que acontece se a função f estiver definida em intervalos tais como $[a,b], (a,b), [a,\infty), (-\infty, b]$, etc. No ponto a há sentido apenas em falar em limite lateral à direita, enquanto que no ponto b há sentido apenas em falar em limite lateral à esquerda. Veja o que acontece com as funções $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $g(x) = \sqrt{x^2-1}$, $\ln x$, etc.

Exemplo 17. Consideremos um exemplo um pouco mais trabalhoso, pois em Matemática, como de resto em todos os aspectos da vida, nem tudo são flores.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{se} \quad x < 3\,, \\ x^2 - 12\,, & \text{se} \quad x \geq 3. \end{cases}$$

Analisemos alguns limites dessa função.

(a) $\lim_{x\to 4} f(x)$?

Para $x \geq 3$, tem-se que $f(x) = x^2 - 12$, e assim

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4}(x^2 - 12) = 4 = f(4).$$

(b) $\lim_{x\to 2} f(x)$?

Para $x < 3$, tem-se que $f(x) = 1/x$, e assim

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(1/x) = 1/2 = f(2).$$

(c) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$?

Para $x \geq 3$, temos que $f(x) = x^2 - 12$, e assim

$$\lim_{x\to 3^+} = -3 = f(3).$$

(d) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$?

Para $x < 3$, tem-se $f(x) = 1/x$, e assim

$$\lim_{x\to 3^-} = 1/3.$$

Observemos que esse limite não é afetado pelo valor da função no ponto $x = 3$. Portanto, como o estudante já deve ter observado em exemplos anteriores, o limite de uma função em um certo ponto nem sempre está relacionado com o valor da função neste ponto.

(e) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$?

O leitor está convidado a dar uma resposta a essa pergunta!

4 Exercícios resolvidos

1. Calcule $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{x^2-x-12}$.

   Solução. Observemos inicialmente que no cálculo de limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ a variável x se aproxima de a mantendo-se sempre diferente de a. Se tentássemos substituir simplesmente x por 4, chegaríamos a uma indeterminação. No entanto, se $x \neq 4$ podemos realizar os seguintes cálculos

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x^2-x-12} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x+3)(x-4)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{7}\,.$$

2. Dada $f(x) = x^2 - 3x$, calcule $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

   Solução. Como $f(x) = x^2 - 3x$, temos que $f(x+h) = (x+h)^2 - 3(x+h)$ e

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x^2+2hx+h^2-3x-3h)-(x^2-3x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2hx+h^2-3h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(2x+h-3) \\
&= 2x-3
\end{aligned}$$

   O leitor deve observar que em um determinado ponto dos cálculos acima nós levantamos uma indeterminação.

3. Dada $f(x) = \sqrt{5x+1}$, determine $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, quando $x > -\frac{1}{5}$.

   Solução. Inicialmente o estudante deve perguntar-se o porquê da imposição $x > -1/5$. Passemos ao cálculo do limite.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5x+5h+1}-\sqrt{5x+1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5x+5h+1}-\sqrt{5x+1}}{h}\frac{\sqrt{5x+5h+1}+\sqrt{5x+1}}{\sqrt{5x+5h+1}+\sqrt{5x+1}}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(5x+5h+1)-(5x+1)}{h(\sqrt{5x+5h+1}+\sqrt{5x+1})}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{5}{\sqrt{5x+5h+1}+\sqrt{5x+1}}$$
$$= \frac{5}{2\sqrt{5x+1}}\,.$$

A pergunta acima já foi respondida? Pode-se calcular o limite acima quando $x = -\frac{1}{5}$? Justifique sua resposta.

Exemplo 18. Consideremos a função dada por $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ e observemos que o valor $x = 2$ não pertence ao domínio da função. No entanto, podemos analisar o comportamento de f quando x se aproxima de 2. Ora, quando x gradualmente se aproxima de 2, o valor de $(x-2)^2$ se aproxima cada vez mais de zero, por valores positivos, e assim a fração $\dfrac{1}{(x-2)^2}$ assume valores cada vez maiores, tornando-se *infinitamente grande*. Designa-se tal fato escrevendo-se

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty.$$

Foi John Wallis(1616-1703), matemático inglês, quem primeiro introduziu o símbolo ∞ para representar infinito.

Devemos enfatizar que ∞ não é um número. Ele é um símbolo usado para designar algo que se torna maior do que qualquer valor real sempre que x se aproxima de um ponto que poderá, ou não, pertencer ao domínio da função.

Exemplo 19. Relacionado com o que aconteceu no exemplo anterior, mas com uma certa diferença, temos a função

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

cujo domínio é constituído pela totalidade dos números reais exceto o 0. Analisemos o que acontece com o comportamento da função próximo do valor zero. Observemos que x pode se aproximar de zero tanto por valores positivos como por valores negativos.

Suponhamos que $x \to 0^+$, ou seja, x se aproxima de zero por valores positivos. Para tornar a exposição mais clara, admitamos que x assuma valores iguais a $\frac{1}{n}$ em que n varia no conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Evidentemente, $\frac{1}{n}$ se aproxima de zero por valores positivos e $f(\frac{1}{n}) = n$ que se torna infinitamente grande e este fato traduz-se, em termos de limite, como

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty\,.$$

Suponhamos, agora, que x se aproxime de zero pela esquerda, isto é, por valores negativos. Nesse caso, podemos considerar x assumindo valores da forma $x = -\frac{1}{n}$, e assim $f(-\frac{1}{n}) = -n$ que tende para $-\infty$. Traduzindo tal fato em termos de limite, obtém-se

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty\,.$$

Estudaremos, com mais detalhes, tais tipos de limites na aula 3.

5 Exercícios propostos

1. Em cada um dos itens a seguir, determine os pontos $x = a$ para os quais cada denominador é zero. Verifique o que acontece quando $x \to a^-$ e quando $x \to a^-$.

   (a) $f(x) = \frac{3}{x}$

   (b) $f(x) = \frac{x}{x-1}$

   (c) $f(x) = \frac{x-2}{(x-1)(x-3)}$

   (d) $f(x) = \frac{x-2}{(x-1)^2}$

2. Calcule $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h+3} - \sqrt{3}}{h}$.

3. Calcule $\displaystyle\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - x - 12}{x - 4}$.

4. Calcule $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 27x + 36}{x^2 + 3x - 4}$ caso ele exista.

5. Calcule
$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right).$$

6. Encontre os limites abaixo, caso eles existam:

   (a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} |x|$

   (b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x}{x}$

   (c) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{|x|}{x}$

   (d) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x}$

   (e) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$

7. A função

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1, \\ 2x & \text{se} \quad 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

possui limite no ponto $x = 1$? E no ponto $x = 2$?

6 Respostas dos exercícios propostos

1. (a) $a = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{3}{x} = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{3}{x} = -\infty$

   (b) $a = 1$, $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x}{x-1} = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x}{x-1} = -\infty$

   (c) $a = 1$ ou $a = 3$, $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-2}{(x-1)(x-3)} = +\infty$,
   $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x-2}{(x-1)(x-3)} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x-2}{(x-1)(x-3)} = +\infty$ e
   $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x-2}{(x-1)(x-3)} = -\infty$

   (d) $a = 1$, $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-2}{(x-1)^2} = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x-2}{(x-1)^2} = -\infty$

2. $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

3. 7

4. -8

5. $\dfrac{1}{4}$

6. (a) 0

   (b) 1

   (c) 1

   (d) 0

   (e) 1 se $x \to 0^+$ e -1 se $x \to 0^-$

7. O limite não existe em $x = 1$, pois

   $$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 \neq 2 = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

   Em $x = 2$ a função tem limite e $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$.

Nesta aula você aprendeu:

- quais foram as motivações geométricas e cinemáticas do Cálculo;
- a calcular alguns limites simples.

7 Apêndice

Apolônio de Perga

Apolônio (262-190 a.C.) escreveu um tratado, *As Cônicas*, constituído de oito livros. Juntamente com *Os Elementos* de *Euclides* são considerados as melhores obras da antiguidade em seus campos.

Arquimedes

Pier Daniele Napolatini[4], professor de História da Matemática da Universidade de Pisa, refere-se a Arquimedes com palavras que refletem a importância do matemático siracusano para o desenvolvimento da Matemática. Ele nos diz:

> Explicar Arquimedes em poucas páginas é uma tarefa difícil. Será preciso considerar o inventor, o defensor de Siracusa, a genialidade de suas técnicas matemáticas e inserir tudo isso no contexto da ciência helenística e das Guerras Púnicas. Mas ainda não basta. A vida de Arquimedes estendeu-se bem além dos 75 anos que passou neste mundo: se sua figura se tornou um mito, sua obra é uma das raízes mais profundas de nossa Ciência. Aspectos que também precisamos considerar.
>
> E há outro problema. Arquimedes foi um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Era, porém, um matemático grego e, embora a Matemática grega seja a precursora da nossa, é profundamente diversa daquela que praticamos. Assim, não podemos dar uma idéia de sua obra traduzindo os resultados para a nossa linguagem: uma tradução desse tipo transformaria nossa narrativa em um insosso elenco de resultados facilmente dedutíveis mediante o cálculo infinitesimal. Para reconstruir as contribuições de Arquimedes é preciso mergulhar na sua Matemática.

O objetivo deste apêndice é o motivar o leitor a mergulhar na obra do Sábio de Siracusa. Arquimedes nasceu na cidade de Siracusa (c. 287 a.C.), sul da Itália, que, na época, pertencia ao mundo grego, e morreu (c. 212 a.C.) durante o ataque de tropas romanas a Siracusa, comandado pelo general romano Marco Cláudio Marcelo que, segundo consta, por ser profundo admirador de Arquimedes, teria dado ordens expressas para que o poupassem durante a invasão. No entanto, a ordem de Marcelo não foi

[4]Pier Daniele Napolitani, Gênios da Ciência, Arquimedes Pioneiro da Matemática, Scientific American, Nº 7.

cumprida e Arquimedes acabou assassinado por um soldado romano, fato este narrado por Plutarco[5].

Acredita-se que ele tenha estado na Universidade de Alexandria, local onde trabalharam Euclides, Eratóstenes, Aristarco de Samos e Apolônio de Perga, entre outros. Vários de seus trabalhos chegaram até nós e existem suspeitas de que outros se perderam ao longo dos tempos. Tais trabalhos arquimedianos são verdadeiras obras-primas de elegância e rigor matemático e estão coletados, com tradução de Sir Thomas L. Heath, no Volume 10 do Great Books of the Western World. São as seguintes as obras de Arquimedes preservadas até hoje:

1. Sobre a Esfera e o Cilindro.
2. A Medida do Círculo.
3. Sobre Conóides e Esferóides.
4. Sobre as Espirais.
5. Sobre o Equilíbrio dos Planos.
6. O Contador de Areia.
7. A Quadratura da Parábola.
8. Sobre Corpos Flutuantes.
9. O Método.
10. Livro dos Lemas.

Em particular, Arquimedes orgulhava-se de sua obra *Sobre a Esfera e o Cilindro* a ponto de querer que sobre a lápide de seu túmulo ficasse gravada uma esfera inscrita em um cilindro; no que foi atendido pelo general Marcelo, seu adversário, mas admirador.

O túmulo do gênio de Siracusa foi encontrado, em 1965, durante as escavações para a construção de um hotel em Siracusa, no qual surgia a esfera inscrita no cilindro. No trabalho preferido de Arquimedes é demonstrado que se um cone estiver inscrito em um hemisfério, que por sua vez estiver inscrito em um cilindro, os volumes dos sólidos estarão na razão $1 : 2 : 3$.

Para chegar a tal conclusão, Arquimedes deveria conhecer o volume da esfera, algo então desconhecido naquele tempo. Como, então, Arquimedes

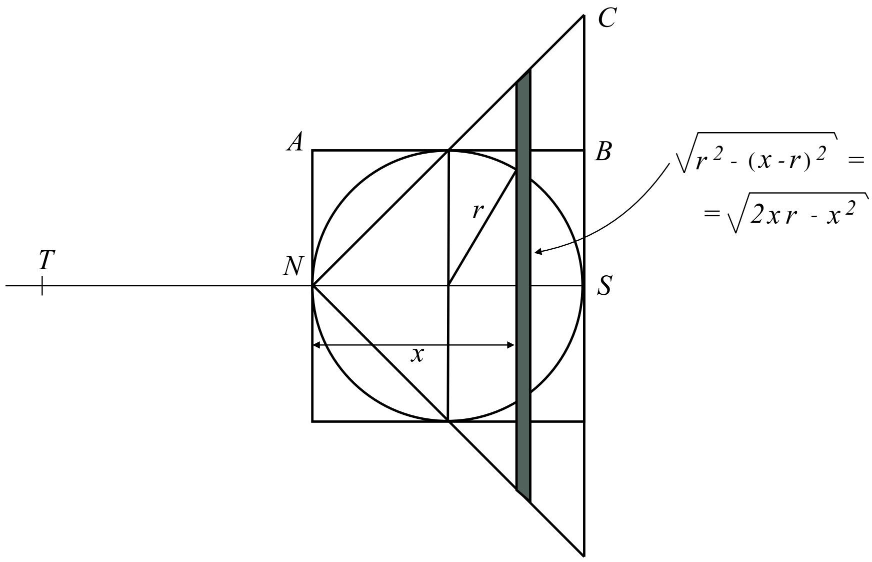
[5] The Lives of the Noble Grecians and Romans, Vol. 13, The Dryden Translation, Great Books of the Western World.

deduziu a fórmula correta do volume da esfera? Isto permaneceu envolto em mistério até 1906 quando o filólogo dinamarquês Johan Ludvig Heiberg, examinando um antigo manuscrito em uma biblioteca de um mosteiro em Constantinopla, hoje Istambul, Turquia, verificou que era um palimpsesto, no qual o texto matemático original havia sido parcialmente apagado.

Palimpsesto. Manuscrito sobre pergaminho que os copistas da Idade Média apagaram, para sobre ele traçarem nova escrita, debaixo da qual a arte tem modernamente conseguido fazer reaparecer em parte os primitivos caracteres. Tal palavra vem de Palimpsestos, de *palin*(de novo) + *psestos*(raspado).

Análises cuidadosas de tal documento revelaram que ele era um dos trabalhos perdidos de Arquimedes, chamado *O Método,* no qual ele explicava seu procedimento para descobrir o volume da esfera. Para atingir tal desiderato Arquimedes procedeu como se segue, no qual usa-se o moderno linguajar matemático. Veja Eves[6].

Seja r o raio da esfera e a situemos de modo que o seu diâmetro horizontal coincida com o eixo ox, com o pólo norte na origem, conforme figura a seguir



Construa o cilindro e o cone de revolução obtido pela rotação do retângulo $NABS$, cuja área é $2r \times r$, e o triângulo NCS em torno do eixo ox. Agora cortemos os três sólidos em fatias verticais a uma distância x de N e com espessura Δx. Os volumes destas fatias são, aproximadamente,

$$\text{Volume da fatia na esfera: } \pi x(2r - x)\Delta x,$$

$$\text{Volume da fatia no cilindro: } \pi r^2 \Delta x,$$

$$\text{Volume da fatia no cone: } \pi x^2 \Delta x,$$

[6]Howard Eves, Great Moments in Mathematics Before 1650, Mathematical Association of America, Dolciani Mathematical Exposition Nº 5(1983).

Relembremos que o momento de um corpo em relação a um ponto é o produto do volume do corpo pela distância do ponto, com relação ao qual estamos calculando o momento, ao centróide do corpo.

Assim, tomemos as correspondentes fatias da esfera e do cone e as penduremos em uma balança virtual com seus centros em T, onde $TN = 2r$. O momento resultante destes dois corpos com relação a N é

$$[\pi x(2r - x)\Delta x + \pi x^2 \Delta x]2r = 4\pi r^2 x \Delta x.$$

Observemos que isto é quatro vezes o momento da fatia do cilindro quando a fatia é deixada no lugar em que ela se encontra originalmente. Adicionando um grande número de fatias colocadas justapostas encontramos

$$2r[\text{Volume da Esfera} + \text{Volume do Cone}] = 4r[\text{Volume do Cilindro}]$$

ou, equivalentemente,

$$2r\left[\text{Volume da Esfera} + \frac{8\pi r^3}{3}\right] = 8\pi r^4,$$

ou

$$\text{Volume da Esfera} = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Este foi o método descrito por Arquimedes para descobrir o volume da esfera. Contudo, a consciência matemática de Arquimedes não permitia que ele considerasse tal procedimento como sendo uma demonstração. Posteriormente ele forneceu uma demonstração usando o *Método de Exaustão*, que é a essência do método de integração conhecido do Cálculo Integral que será visto na aula 9.

O método de Descartes para o traçado de tangentes

O Cálculo Diferencial e Integral, denominado em priscas eras Cálculo Infinitesimal, tem como personagens principais gigantes como Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz que, independentes um do outro, desenvolveram grande parte daquilo que se estuda nos cursos de Cálculo de Uma Variável. No entanto, o Cálculo não se originou nem se exauriu com Newton e Leibniz. Na verdade, seus pontos basilares, a derivada e a integral, repousam sobre problemas que remontam à Grécia Antiga, relacionados, respectivamente, com traçados de tangentes e cálculos de áreas, a chamada quadratura dos gregos de antanho.

No concernente à determinação de tangentes, normalmente aprende-se nos cursos elementares que a reta tangente a uma curva é aquela que a interseca em apenas um ponto. Tal fato é verdadeiro se, por exemplo, a curva considerada for uma circunferência. Veja figura 2.6(a). No entanto, de maneira geral, tal assertiva não é verdadeira, conforme indicam as figuras 2.6(b) e 2.6(c).

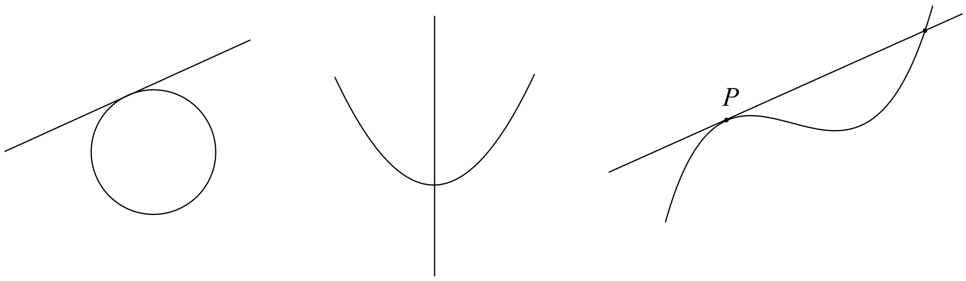


Fig. 2.6(a) Fig. 2.6(b) Fig. 2.6(c)

Na figura 2.6(b) a posição da reta não condiz com aquilo que se espera de uma reta tangente, muito embora ela intersecte a curva em apenas um ponto. Já na figura 2.6(c) a reta intersecta a curva em dois pontos mas ela *tangencia* a curva em P.

Portanto, faz-se mister definir de maneira precisa o que vem a ser reta tangente a uma curva por um dado ponto, a fim de evitar dubiedades como as expostas acima. Vários esforços foram feitos neste sentido, no entanto, somente com o advento do Cálculo Diferencial e seu subjacente conceito de limite, conseguiu-se tal desiderato.

Nosso objetivo neste apêndice é o de descrever o procedimento de Descartes para o traçado de tangentes. Antes, porém, façamos a devida apresentação do astro principal deste episódio da História da Matemática.

René Descartes(1596-1650)

René du Perron Descartes nasceu a 31 de março de 1596 em La Haye (atualmente La Haye-Descartes), França, uma pequena cidade a 250 km de Paris. Aos oito anos de idade ingressou em uma escola Jesuíta em La Flèche onde recebeu uma educação moderna em Matemática e Física, incluindo-se aí recentes descobertas astronômicas realizadas por Galileu. Posteriormente, graduou-se em Direito pela Universidade de Poitier em 1616, aos vinte anos de idade, mas nunca chegou a exercer a profissão de advogado preferindo, ao longo de dez anos, viajar pela Europa. Neste período ele teve suas primeiras idéias sobre a *ciência maravilhosa* que veio a tornar-se a Geometria Analítica.

Descartes mudou-se para a Holanda em 1628, lugar onde viveu durante 20 anos. Lá, por volta de 1634, completou um trabalho científico intitulado Le Monde. Em 1637 apareceu a sua obra maior, o Discours de La Méthode, que continha como apêndices La Dioptrique, Les Meteores e La Géometrie. Em 1649 foi à Suécia, convidado que fora pela Rainha Cristina, ambiciosa patrona das artes, que cultivava o sestro de manter em sua corte prestigiosos intelectuais e homens de ciência. No entanto, tal rainha, no vigor de seus 23 anos de idade, tinha o singularíssimo costume de receber as lições do mestre Descartes às 5h da manhã em uma fria biblioteca cujas janelas eram mantidas abertas. A frágil saúde de Descartes não resistiu a tal intempérie; alguns meses depois, o consagrado autor da La Géometrie foi abatido por uma pneumonia que ceifou sua vida a 11 de fevereiro de 1650.

Descartes e o Método da Subnormal

Como dissemos na introdução, um problema central nos cursos iniciais de Cálculo é o do traçado de tangentes a curvas descritas por equações. No século XVII tais problemas não eram descritos desta maneira pois as equações de retas não eram tópicos ainda plenamente desenvolvidos. Tal problema era refraseado da seguinte maneira:

> Encontrar a subnormal por um dado ponto de uma curva, isto é, o comprimento do segmento sobre o eixo x entre a abscissa de um ponto sobre a curva e a intersecção da normal com o eixo x

Na figura 2.7 a subnormal mede $v - x$.

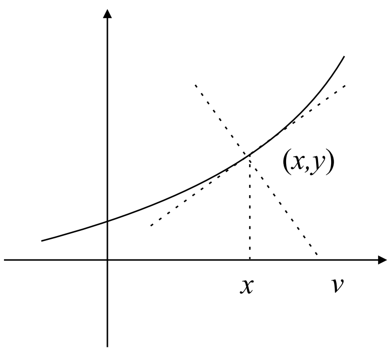


Fig. 2.7

Apresentaremos a seguir o método introduzido por Descartes para encontrar a subnormal. Por questões meramente didáticas consideraremos o caso específico da parábola $y^2 = 2x$, muito embora o procedimento seja válido para outras curvas.

Suponhamos que na figura 2.8 a curva seja a parábola de equação $y^2 = 2x$ e queiramos traçar a reta tangente a ela pelo ponto $C = (x_0, y_0)$. Evidentemente tal tangente ficará determinada caso saibamos traçar a normal à curva no ponto C.

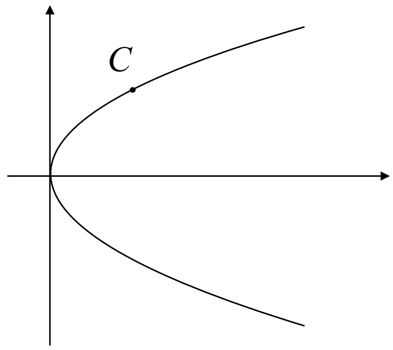


Fig. 2.8

Consideremos o círculo com centro $P = (v, 0)$ e raio $r > 0$ que passa pelo ponto (x_0, y_0) pertencente à parábola e cuja equação é dada por

$$(v - x)^2 + y^2 = r^2 \, .$$

Desde que (x_0, y_0) pertence à parábola temos que $y_0^2 = 2x_0$ e assim obtém-se

$$(v - x_0)^2 + 2x_0 = r^2 \, ,$$

donde

$$x_0^2 + 2(1 - v)x_0 + v^2 - r^2 = 0 \, .$$

que é uma equação do 2º grau em x_0. Dependendo do valor de r, tal equação poderá ter uma ou duas soluções. Observemos que para cada solução $x_0 \neq 0$ há dois valores de y_0 associados, pois $y_0 = \pm\sqrt{2x_0}$. Vide figuras 2.9(a) e 2.9(b).

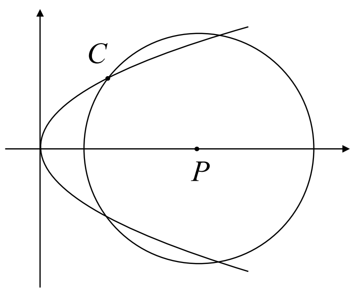


Fig. 2.9(a)

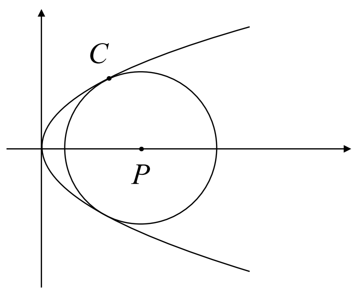


Fig. 2.9(b)

Se o seu discriminante for positivo, a circunferência intersecará a parábola em quatro pontos, conforme figura 2.9(a). Como estamos interessados em obter a subnormal, devemos impor a condição de que o discriminante seja nulo, isto é, a raiz da equação será dupla e a interseção da circunferência com a parábola dar-se-á em apenas dois pontos. Teremos então

$$v - x_0 = 1$$

o que nos diz que a subnormal de uma parábola é constante, fato esse bem conhecido entre os matemáticos contemporâneos de Descartes. Para construir a normal passando por $C = (x_0, y_0)$ projetamos tal ponto sobre o eixo ox e deslocamos uma unidade para a direita para obter $v = x_0 + 1$. A reta passando por $C = (x_0, y_0)$ e $P = (x_0 + 1, 0)$ é normal à parábola por C e daí podemos facilmente construir a reta tangente.

Como é dito por Rickey[7], Descartes orgulhava-se bastante por ter produzido este resultado, sobre o qual ele diz:

> Eu utilizei um método geral para desenhar uma linha reta fazendo ângulos retos com uma curva em um ponto arbitrariamente escolhido sobre ela. E ouso dizer que esse não apenas é o mais útil e mais geral problema em Geometria que eu conheço, mas também o que eu mais fazia questão de saber[8].

Evidentemente o método de Descartes não é o mais geral, coisa que ocorreu somente com o advento do Cálculo Diferencial (a primeira manifestação realmente clara do método diferencial é encontrada em idéias de Fermat, expostas em 1629[9]). No entanto, a técnica descrita acima mostra-se particularmente interessante pela elegância e criatividade demonstrada por Descartes, como também pelo fato de que ela pode ser apresentada no ensino médio, haja vista que ela pressupõe apenas o domínio de tópicos elementares tais como equações do 2º grau, Geometria Analítica, etc. Isso mostra que tópicos historicamente relevantes podem, e devem, ser apresentados desde os níveis mais elementares do ensino da Matemática, contribuindo para diminuir o marasmo e a mesmice que com muita freqüência submete o ensino da Matemática a um mero receituário de fórmulas, o que incentiva o trabalho puramente mecânico em detrimento da criatividade, que é (ou deveria ser) o fio condutor da relação ensino-aprendizagem.

O Método Axiomático

Pode-se dizer que a evolução do pensamento matemático possui duas fases distintas, a saber:

Na primeira delas temos a descoberta, em que a intuição desempenha um papel fundamental, na qual os fenômenos são, digamos, descobertos.

---

[7] V. Frederic Rickey, Isaac Newton: Man, Myth and Mathematics, College Mathematics Journal, 60, Nov. 1987, 362-389.

[8] René Descartes, The Geometry, Great Books of the Western World, Encyclopaedia Britannica, INC., 1996.

[9] Howard Eves, Introdução à História da Matemática, Editora da UNICAMP, 3ª Edição, 2002.

Admite-se, guiados pela experiência, imaginação, intuição, etc., que determinados fatos são verdadeiros. Isto foi feito, por exemplo, por egípcios, babilônios, chineses e indianos, assim como é feito no dia-a-dia, nos processos pedagógicos e científicos. No entanto, ficaríamos apenas no campo da especulação, no talvez, se não pudéssemos comprovar que tais conjecturas sejam verdadeiras. Aí, devemos passar para a próxima etapa.

Na segunda etapa do pensamento matemático surge a demonstração, que é a construção lógica das verdades, vislumbradas pelos processos descritos anteriormente. Demonstrar uma proposição é deduzi-la, aplicando princípios da lógica formal, de outras proposições já admitidas.

Em A Experiência Matemática[10] é feita a seguinte colocação:

> Diz-se que a primeira demonstração na história da Matemática foi dada por Tales de Mileto (c. 600 a.C.). Ele demonstrou que o diâmetro de um círculo o divide em duas partes iguais. Ora, isso é uma afirmativa tão simples que parece evidente por si própria. A genialidade, nesse caso, foi perceber que uma demonstração mais do que simples pedantismo é possível e necessária. O que torna uma demonstração mais do que simples pedantismo são suas aplicações a situações onde as afirmativas são muito menos transparentes. Na opinião de alguns, o nome do jogo da Matemática é demonstração; sem demonstração, nada de Matemática.

Alguns autores costumavam - e há alguns que ainda costumam - empregar as iniciais C. Q. D. no final das demonstrações, o que significa Como Queríamos Demonstrar. Em latim as iniciais são Q. E. D. o que significa Quod Erat Demonstrandum. Atualmente, há a tendência de usar os símbolos ■ ou □ ao final de uma demonstração.

A demonstração tem por fim estabelecer uma cadeia entre os postulados e os teoremas, mediante um cálculo do qual se exclui qualquer arbitrariedade.

Uma teoria dedutiva consiste, em suma, do seguinte esquema: na base, um grupo de símbolos primeiros, ligados entre si por um grupo de proposições primeiras; partindo desse corpo de premissas, um mecanismo lógico que extrai as conseqüências chamadas teoremas.

Muito embora Tales seja considerado o primeiro matemático ao qual se atribui uma demonstração, coube a Euclides de Alexandria, em seus Elementos (composto por treze volumes), construir o primeiro sistema lógico-dedutivo aplicado inicialmente na Matemática, e posteriormente usado em outros ramos da Ciência. Os seis primeiros livros de Os Elementos são sobre Geometria plana elementar, os três seguintes sobre teoria dos números, o Livro X sobre incomensuráveis e os três últimos versam principalmente sobre geometria no espaço. Não há introdução ou preâmbulo, e o primeiro livro começa abruptamente com uma lista de vinte e três definições. A deficiência, aqui, é que algumas definições não definem, pois não há um

---

[10] Philip J. Davis e Reuben Hersch, A Experiência Matemática, 3ª Edição, Francisco Alves,1986.

conjunto prévio de elementos não-definidos em termos dos quais os outros sejam definidos. Como exemplo, vejamos algumas destas definições:

Com relação à impossibilidade de definir certas coisas, lembremos da canção "Ontem ao luar", de Catulo da Paixão Cearence (1863-1946), na qual tem-se o seguinte verso: "Como definir o que só sei sentir?"

1. Definição 1. Um ponto é aquilo que não tem partes.

2. Definição 2. Uma reta é um comprimento sem largura.

3. Definição 5. Uma superfície é aquilo que possui somente comprimento e largura.

Assim, as "definições" acima realmente não definem, pois uma definição deve ser expressa em termos de coisas estabelecidas previamente que sejam mais bem conhecidas do que as coisas definidas. Outra falha no sistema de Euclides é a circularidade das definições. Mais precisamente, vejamos o que acontece nos exemplos a seguir. A Definição 3 estabelece:

> As extremidades de uma reta são pontos.

Enquanto que na Definição 4, Euclides nos diz:

> Uma linha reta é uma linha que jaz igualmente com os pontos sobre ela.

Como se vê, além do aspecto confuso da Definição 4, temos que para definir reta ele usa a noção de ponto, e na Definição 3 ele usa o conceito de reta, que não foi definido previamente.

Em seguida às definições, Euclides fornece uma lista de cinco postulados (ou axiomas) e cinco noções comuns. Vejamos alguns exemplos.

POSTULADOS

Seja postulado o seguinte

1. Traçar uma reta de qualquer ponto a outro ponto.

2. Prolongar uma reta finita continuamente em uma linha reta.

3. Descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.

4. Que todos os ângulos retos são iguais.

5. Que, se uma reta cortando duas retas faz ângulos interiores de um mesmo lado menores que dois ângulos retos, as duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram desse lado em que os ângulos são menores do que dois ângulos retos.

NOÇÕES COMUNS

1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si.
2. Se iguais são somados a iguais, os totais são iguais.
3. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
4. O todo é maior do que a parte

A partir daí ele possui condições de demonstrar algumas Proposições ou Teoremas. Citemos alguns exemplos.

Proposição 1. Livro I. Sobre um dado segmento de reta construir um triângulo eqüilátero.

Proposição 10. Livro I. Dividir um segmento de reta ao meio.

Proposição 5. Livro III. Se dois círculos se intersectam, eles não possuem o mesmo centro.

Como se viu acima, muito embora o sistema de Euclides apresentasse uma revolução na Matemática, havia falhas naquilo que ele se propôs a fazer e que foram, ao longo dos tempos, corrigidas. Aceita-se, desse modo, um sistema lógico-dedutivo como sendo composto por:

1. Noções não-definidas ou primitivas.
2. Definições.
3. Postulados ou axiomas.
4. Proposições ou teoremas.

Deve-se ressaltar que esta estrutura tem sido usada em áreas fora da Matemática, como Física e Filosofia. Em Física, Newton a usou em seu *Principia Mathematica* que começa com uma lista de definições.

Definição I. A quantidade de matéria é a medida desta, oriunda conjuntamente de sua densidade e grandeza.

Definição II. A quantidade de movimento é a medida desta, provinda conjuntamente da velocidade e da quantidade de matéria.

Escólio. 1. Comentário destinado a tornar inteligível um autor clássico; esclarecimento. 2. Explicação ou interpretação de um texto.

Definição V. A força centrípeta é aquela pela qual o corpo é atraído ou impelido ou sofre tendência a algum ponto, como o centro.

Em seguida às definições vem um escólio e logo depois alguns axiomas ou leis do movimento.

Lei I. Todo corpo permanece em seu estado de repouso ou de movimento uniforme em linha reta, a menos que seja obrigado a mudar seu estado por forças impressas nele.

Lei II. A mudança do movimento é proporcional à força motriz impressa nele, e se faz segundo a linha reta pela qual se imprime essa força.

Temos as Proposições como:

Proposição 2. Todo corpo que se move em qualquer linha curva descrita em um plano, e por um raio que tenha por referência um ponto que esteja imóvel ou movendo-se de maneira retilínea e uniforme, descreve sobre esse ponto áreas proporcionais ao tempo e é influenciado por uma força centrípeta direcionada para esse ponto.

Já em Filosofia, Baruch Spinoza, em sua *Ética*, usa o método axiomático para fazer a sua exposição. Vejamos, como exemplo, alguns conceitos por ele abordados.

Definição II. Diz-se que uma coisa é finita no seu gênero quando pode ser limitada por outra coisa da mesma natureza.

Por exemplo: Um corpo diz-se que é finito porque sempre podemos conceber outro que lhe seja maior.

Definição III. Por substância entendo o que existe em si e por si é concebido, isto é, aquilo cujo conceito não carece de outra coisa do qual deva ser formado.

Definição V. Por modo entendo as afecções da substância, isto é, o que existe noutra coisa pela qual também é concebido.

Definição VI. Por Deus entendo o ente absolutamente, isto é, uma substância que consta de infinitos atributos, cada um dos quais exprime uma essência eterna e infinita.

Axioma I. Tudo o que existe, existe em si ou noutra coisa.

Proposição I. A substância é por natureza anterior às suas afecções.

Demonstração. É evidente pelas definições 2 e 3.

Proposição XI. Deus, ou, por outras palavras, a substância que consta de infinitos atributos, cada um dos quais exprime uma essência eterna e infinita, existe necessariamente.

Demonstração. Se negas isto, concebe, se te for possível, que Deus não existe e, portanto (Axioma 7), a sua essência não envolve a existência. Ora, isto (Proposição 7) é absurdo; por conseguinte, Deus existe. □

Vejam que a demonstração de Spinoza é por contradição!

Outra demonstração de Spinoza é

Proposição XLV. O ódio nunca pode ser bom.

Contradição

A princípio, um teorema é uma sentença matemática condicional 'Se P, então Q' ou implicativa '$P \Longrightarrow Q'$ cuja validade é garantida por uma demonstração. Chamamos P de hipótese e Q de tese. Dentre os vários tipos de demonstração temos a demonstração por contradição ou por redução ao absurdo que consiste na seguinte equivalência

$$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow ((P \wedge \sim Q) \Longrightarrow (R \wedge \sim R))$$

em que $\sim R$ é a negação de R. Observemos que $R \wedge \sim R$ é um absurdo, isto é, em Matemática uma afirmação e sua negação não podem acontecer simultanemante.