Aula 3

Limite trigonométrico fundamental e limites infinitos

Objetivos

- Estudar o limite trigonométrico fundamental $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.
- Estudar os limites infinitos.
- Estudar os limites no infinito.

Esta aula será dedicada ao estudo de alguns limites importantes, chamados limites fundamentais, e limites envolvendo o infinito.

Não sei o que pareço aos olhos do mundo, mas, para mim, fui apenas um garoto brincando na praia, entretido em descobrir de vez em quando um pedregulho mais liso ou uma concha mais bonita que o normal, enquanto o grande oceano da verdade estendia-se à minha frente totalmente desconhecido. (Isaac Newton)

1 Limite trigonométrico fundamental

Analisaremos, inicialmente, o comportamento da função

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

nas proximidades do ponto $x = 0$, observando que tal ponto não pertence ao seu domínio. Caso tentemos substituir o valor $x = 0$ na expressão que a define obtemos a indeterminação $\frac{0}{0}$. Assim, para *levantarmos* a indeterminação, ou seja, para avaliarmos precisamente o comportamento da função acima para valores de x próximos de zero, lançaremos mão de conceitos elementares de *Geometria* e de *Trigonometria*, os quais são do conhecimento do estudante desde os níveis fundamental e médio.

Trigonometria é uma palavra formada por dois componentes gregos. O primeiro, *trigon,* significa triângulo, a segunda é *metron*, que significa medida. Assim, literalmente, Trigonometria significa medida de triângulos.

Consideremos a figura 3.1 em que construímos um sistema cartesiano de eixos ortogonais e o círculo trigonométrico. Nesta figura, o valor de x é a medida, em radianos, do ângulo central $A\widehat{O}P$. Observemos que a área do triângulo $\triangle OPA$ é menor do que a área do setor circular $\sphericalangle OPA$ que, por sua vez, é menor que a área do triângulo $\triangle OTA$.

Radiano (rad) é uma unidade de medida de ângulo e corresponde, em um círculo, ao ângulo central subentendido por um arco de comprimento igual ao raio do círculo.

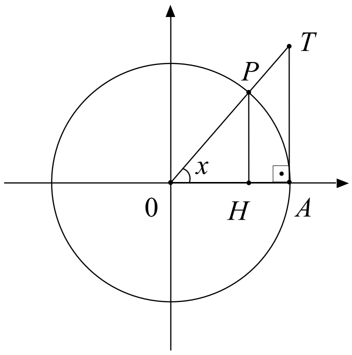

Fig.3.1

Na figura ao lado, as medidas dos segmentos de reta OH e HP são respectivamente o cosseno e o seno do ângulo x.

A área S_1 do triângulo $\triangle OPA$ é $S_1 = \dfrac{\overline{OA}\cdot\overline{PH}}{2}$, em que H é a projeção ortogonal do ponto P sobre o eixo x. Mas, $\operatorname{sen} x = \dfrac{\overline{PH}}{\overline{OP}} = \dfrac{\overline{PH}}{\overline{OA}}$ e assim $\overline{PH} = \overline{OA}\cdot\operatorname{sen} x$, o que implica $S_1 = \dfrac{\overline{OA}^2\cdot\operatorname{sen} x}{2}$. A área do setor circular $\sphericalangle OPA$ é $S_2 = \dfrac{x}{2}\cdot\overline{OA}^2$, a área do triângulo $\triangle OTA$ é $S_3 = \dfrac{\overline{OA}\cdot\overline{TA}}{2}$ e, pelo fato de $\operatorname{tg} x = \dfrac{\overline{TA}}{\overline{OA}}$, teremos $\overline{TA} = \overline{OA}\cdot\operatorname{tg} x$, o que implica

$$S_3 = \frac{\overline{OA}^2\cdot\operatorname{tg} x}{2}.$$

Como $S_1 < S_2 < S_3$, teremos $\dfrac{\overline{OA}^2\cdot\operatorname{sen} x}{2} < \dfrac{x}{2}\cdot\overline{OA}^2 < \dfrac{\overline{OA}^2\cdot\operatorname{tg} x}{2}$. Dividindo cada um dos membros da desigualdade acima por $\overline{OA}^2$ e multiplicando por dois, teremos,

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$$

e admitindo que x seja positivo, obteremos:

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} > \frac{1}{x} > \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} > \frac{1}{x} > \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}.$$

Como dissemos acima, estamos considerando x positivo e como pretendemos estudar o comportamento da função próximo de $x = 0$, podemos supor $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, o que acarreta $\operatorname{sen} x > 0$. Multiplicando cada membro da desigualdade acima por $\operatorname{sen} x$, teremos:

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$$

Ora, quando x se aproxima de zero, o valor de $\cos x$ se aproxima de 1, pois $\cos 0 = 1$.

Este é um fato que pode ser provado rigorosamente mas, devido aos objetivos de um curso inicial de Cálculo, admiti-lo-emos como intuitivamente óbvio.

Assim, o valor de $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ fica limitado entre $\cos x$, que tende a 1, e o valor constante 1. Deste modo, podemos concluir que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1\,.$$

Todo o procedimento acima poderá ser desenvolvido, com as devidas modificações, se os valores de x forem negativos, o que mostrará que $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ também tenderá a 1 sob estas circunstâncias. No primeiro caso (quando x se aproxima de zero por valores positivos) indica-se o limite por

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

e no segundo por

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

os quais são chamados, respectivamente, de limite lateral à direita e limite lateral à esquerda. Já que eles são iguais, diremos simplesmente limite e omitiremos os sinais $+$ e $-$.

Exemplo 20. A partir do limite fundamental, vamos calcular um outro limite, a saber

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0\,. \tag{3.1}$$

Para isto, procedamos da seguinte maneira. Consideremos a expressão $\dfrac{1 - \cos x}{x}$ e multipliquemos o seu numerador e o seu denominador por $1 + \cos x$ para obtermos

$$\frac{1 - \cos x}{x} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x} = \frac{1 - \cos^2 x}{x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \operatorname{sen} x$$

Ora, o último termo da expressão acima é o produto de dois fatores, um dos quais tende a 1 e o outro tende a zero. Antecipando que o *limite do produto é produto dos limites*, teremos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

Caso o leitor tenha apreendido a essência do que foi exposto até agora, poderá partir para os exemplos que serão listados a seguir. Caso contrário, deverá repassar o conteúdo desta lição para dirimir as dúvidas que porventura persistirem.

2 O problema do comprimento e da área

Nos exemplos relacionados com o traçado de tangentes e com a velocidade instantânea estudamos casos que nos levaram, diretamente, à definição de derivada. Abordaremos a seguir um caso de limite que servirá para motivar o conceito de integral. Muito embora esta última venha a ser estudada somente na aula 8, acreditamos que o desenvolvimento a seguir será bastante ilustrativo.

O termo integral é proveniente do Latim *integrare*, que significa "produzir o total". Como veremos, calcular uma integral é, *grosso modo*, calcular uma área a partir da soma de infinitas parcelas, cada uma delas representando a área de uma figura conhecida.

Suponhamos que queiramos calcular o comprimento de uma circunferência de raio R. Considerando que estamos a trabalhar com uma figura curvilínea e até o momento sabemos apenas fazer medidas de figuras retilíneas, faremos uma aproximação do círculo por polígonos nele inscritos e que *tendam* a ele. Mais precisamente, consideremos as figuras 3.2 nas quais estão esboçados círculos de raio R dividido em três, quatro, cinco, seis, ... partes iguais.

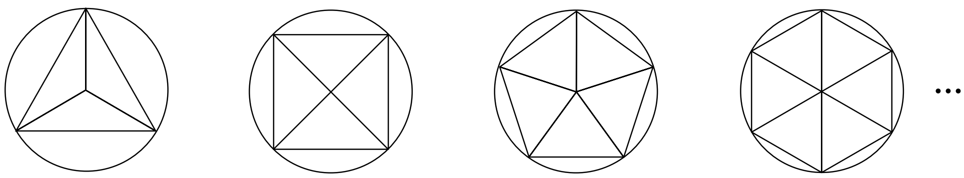

Fig. 3.2(a) Fig.3.2(b) Fig.3.2(c) Fig.3.2(d)

Admitamos então que o círculo esteja dividido em n partes por meio de um polígono regular de n lados. Cada lado desse polígono determina um ângulo central de que mede $\frac{2\pi}{n}$ e assim cada lado do polígono medirá

$$2R\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

o que nos leva a

$$L_n = 2\,R\,n\,\mathrm{sen}\,\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

como sendo o perímetro do polígono regular inscrito no círculo. Evidentemente, qualquer que seja o valor de n, e por maior que ele seja, o valor de L_n sempre será menor do que o comprimento da circunferência. No entanto, à medida que o número de lados n cresce, o polígono *tende* à circunferência, de modo que, quando n *tender ao infinito*, o comprimento L_n *tenderá ao comprimento da circunferência*. Observemos que nesse caso cada lado do polígono terá seu comprimento tendendo a zero.

Notemos que

$$L_n = 2\pi R\,\frac{\mathrm{sen}\,\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\left(\frac{\pi}{n}\right)}\,.$$

Considerando que $\dfrac{\pi}{n}$ tende a zero quando n tende ao infinito e usando o limite fundamental estudado anteriormente, obteremos o comprimento L da circunferência como sendo

$$L = \lim_{n \to +\infty} L_n = 2\pi R \lim_{n \to +\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\left(\frac{\pi}{n}\right)} = 2\pi R$$

em virtude do limite fundamental $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

Assim, obtivemos o comprimento do círculo à custa de comprimentos de polígonos obtidos por meio da Geometria Euclidiana Elementar, juntamente com um processo de limite que fez com que o círculo fosse exaurido por polígonos regulares. Essa é a essência do método de integração que teve suas bases lançadas na Grécia Antiga por Arquimedes.

Um procedimento semelhante pode ser usado para calcular a área do círculo. Com as notações introduzidas para determinar o comprimento do polígono inscrito no círculo, tem-se que a área do polígono de n lados inscrito no círculo é dada por

$$S_n = \pi R^2 \cdot \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Agora, observemos que $\frac{\pi}{n} \to 0$ se $n \to +\infty$, de modo que

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} \to 1.$$

Também,

$$\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \to 1$$

pois $\frac{\pi}{n} \to 0$.

Argumentando como no caso do cálculo do comprimento, tem-se que a área do círculo é obtida fazendo-se o número de lados do polígono inscrito tender para o infinto ($n \to +\infty$). Desse modo, designando por S a área do círculo, teremos

$$S = \lim_{n \to +\infty} S_n = \pi R^2 \cdot \lim_{\frac{\pi}{n} \to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} \cdot \lim_{\frac{\pi}{n} \to 0} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi R^2.$$

Na aula 2 aprendemos algumas noções básicas sobre limites nos quais os termos envolvidos eram sempre finitos. Veremos, a seguir, situações em que há tendência ao infinito.

3 Limites infinitos e limites no infinito

Comecemos com um exemplo proveniente da Física.

Robert Boyle (1627-1691) foi um físico e matemático irlandês. Ele fez importantes contribuições à Física e à Química, sendo mais conhecido por sua lei (também chamada Lei de Mariotte) que descreve o comportamento de um gás perfeito, e que apareceu em um apêndice escrito em 1662 para o seu trabalho *New Experiments Physio-Mechanicall, Touching the Spring of the Air and Its Effects*(1660).

Edme Mariotte (1620-1684) foi um físico francês que ingressou na carreira eclesiástica. No entanto, sua fama é decorrente da lei dos gases perfeitos, publicada em um ensaio sobre a natureza do ar, em 1676.

Exemplo 21. Sob temperatura constante, o volume de certa massa de gás é função da pressão a que está submetido. Mais precisamente, temos uma lei, descoberta pelo físico e filósofo inglês Boyle, em 1662, comprovada e aperfeiçoada pelo físico francês Mariotte, em 1676, cujo enunciado é:

> *O volume de uma certa massa gasosa é inversamente proporcional à pressão a que ele está submetido, isto é, o produto da pressão pelo volume é constante, quando sua temperatura permanece constante.*

Temos, assim, que a Lei de Boyle-Mariotte pode ser expressa matematicamente por $P \cdot V = k$ em que P é a pressão a que o gás está submetido, V é o seu volume e k é a constante de proporcionalidade, desde que a temperatura seja mantida constante.

Essa lei pode ser mais bem apreciada se a visualizarmos em um gráfico cartesiano em que no eixo horizontal marcam-se os valores de P e no eixo vertical indicam-se os valores correspondentes de V, conforme figura 3.3. Para isso, escreve-se a expressão acima na forma $V = \dfrac{k}{P}$

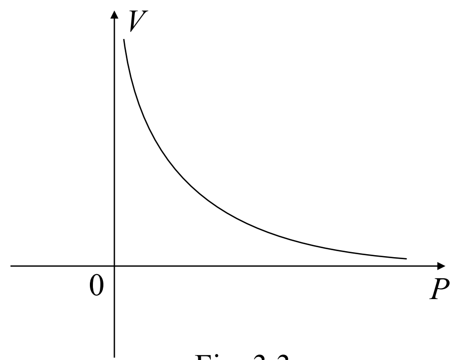

Fig. 3.3

na qual, evidentemente, os valores de P (e conseguintemente os de V) são sempre positivos, haja vista que ele representa os valores da pressão exercida sobre o gás. Assim, V é função de P e com relação a ela temos duas questões a serem esclarecidas:

1. O que se pode dizer sobre o comportamento de V quando P se *aproxima de zero*?

2. O que acontece com V quando P se torna *muito grande*? O que (no linguajar matemático) é traduzido como P *tende ao infinito*.

No tocante à primeira pergunta, temos que quando P diminui, *tendendo a zero*, escrevemos $P \to 0^+$ para indicar que a aproximação é feita por valores positivos, ou seja, pela direita, o valor de V se torna tão grande quanto se queira. Se, por exemplo, o valor de k for igual a um, teremos a seguinte tabela para os valores de V correspondentes aos de P.

P	V
1	1
0,1	10
0,01	10^2
0,001	10^3
0,0001	10^4
0,00001	10^5
0,000001	10^6
0,0000001	10^7
0,00000001	10^8

Portanto, à medida que $P \to 0^+$, os valores de V tendem ao infinito e escreve-se:

$$\lim_{P\to 0^+} V = \lim_{P\to 0^+} \frac{1}{P} = +\infty.$$

Devemos observar que $+\infty$ não é um número; ele indica que o valor de $\dfrac{1}{P}$ torna-se arbitrariamente grande sempre que P tender a zero.

No que se refere ao segundo questionamento, nota-se que ele é a antítese do primeiro. De fato, supondo ainda $k = 1$, podemos construir a seguinte tabela

P	V
1	1
10	0,1
10^2	0,01
10^3	0,001
10^4	0,0001
10^5	0,00001
10^6	0,000001
10^7	0,0000001
10^8	0,00000001

Destarte, quando $P \to +\infty$, teremos que $V \to 0$, e escreve-se

$$\lim_{P\to +\infty} \frac{1}{P} = 0\,.$$

Nos casos acima, diz-se que os eixos x e y são assíntotas do gráfico de $V = \dfrac{k}{P}$.

Vejamos um outro exemplo em que podemos visualizar os conceitos introduzidos acima.

Exemplo 22. Consideremos uma lente delgada, convergente, de distância focal f (nas lentes convergentes, $f > 0$). Seja e o eixo principal desta lente. Vide figura 3.4.

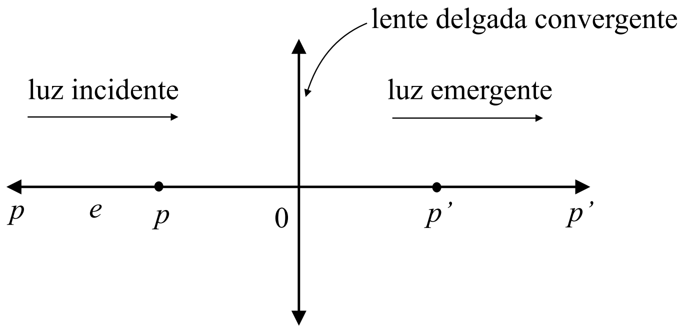

Fig. 3.4

Consideremos um objeto P situado em e, e seja P' a sua imagem através da lente. As abscissas p de P e p' de P', tomadas em relação ao centro óptico O da lente, são relacionadas por meio da *Lei de Gauss*:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

donde se segue que

$$p' = \frac{f}{p - f}\,.$$

Daí

$$p' = \frac{fp}{1 - \frac{f}{p}}$$

é uma função cujo comportamento em muito se assemelha à do exemplo anterior. No presente caso existe uma diferença, pois o valor da variável p não pode assumir apenas o valor igual a f, o qual é positivo. Por isso podemos fazer p tender a f tanto por valores que lhe sejam menores como também por aqueles que lhe são maiores. Portanto, faz sentido falar em limite lateral à esquerda ou à direita de f, assim como se pode fazer p tender a $-\infty$. O leitor deve analisar o gráfico na figura 3.5, que fornece uma descrição do comportamento de p' como função de p. Temos então os seguintes limites:

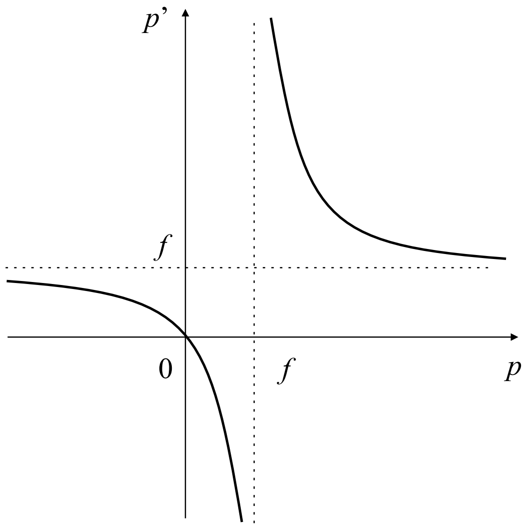

Fig. 3.5

$$\lim_{p\to\pm\infty} \frac{f}{1-\frac{f}{p}} = f$$

$$\lim_{p\to f^+} \frac{f}{1-\frac{f}{p}} = +\infty$$

e

$$\lim_{p\to f^-} \frac{f}{1-\frac{f}{p}} = -\infty.$$

Neste caso o eixo horizontal $p' = 0$ é uma assíntota horizontal, ao passo que a reta $p = f$ é uma assíntota vertical[1].

De maneira geral, usa-se a notação

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

para indicar que, quando x se aproxima de a, o valor de $f(x)$ torna-se menor do que qualquer valor negativo dado.

Analogamente,

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

para designar o fato de que, quando x se aproxima de a, o valor de $f(x)$ torna-se maior do que qualquer valor positivo dado.

Estas observações podem ser estendidas para limites laterais, de maneira óbvia.

[1] F. Trotta, L. M. P. Imenes e J. Jakuboric, Matemática Aplicada, Vol. 3, Editora Moderna LTDA (1980).

De maneira similar, a notação

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$$

é usada para designar que $f(x)$ se aproxima de A quando $x \to +\infty$. O leitor está convidado a dar uma interpretação para $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$

Devemos deixar claro que todos os conceitos envolvendo limites, que até agora foram introduzidos de maneira bastante intuitiva, haja vista os objetivos imediatos do curso, podem ser abordados de maneira rigorosa, conforme é feito no Apêndice desta aula. Um estudo sistemático de limites será realizado nas aulas dedicadas à Análise Real.

Os exemplos e exercícios resolvidos, descritos a seguir, servirão para o leitor fixar mais firmemente as noções de limite. Procuraremos abordar as diversas situações relacionadas com o processo de limites no infinito e limites infinitos.

4 Exercícios resolvidos

1. Calcule $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{1}{(x-3)^2}$.

   Solução. Quando $x \to 3$, tanto pela direita quanto pela esquerda, o valor $(x-3)^2$ permanece positivo e se aproxima de zero. Portanto, $\dfrac{1}{(x-3)^2}$ torna-se maior que qualquer valor positivo dado e, assim, $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{1}{(x-3)^2} = +\infty$.

2. Determine, se possível, $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{x-1}$.

   Solução. Observemos inicialmente que, ao contrário do que aconteceu no caso anterior, o denominador $x-1$ poderá ser positivo ou negativo conforme x se aproxime de 1 pela direita ou pela esquerda. Se x se aproximar de 1 pela direita, teremos que $x-1$ se aproxima de zero por valores positivos e assim $\dfrac{1}{x-1}$ torna-se infinitamente grande. Designa-se tal fato por

   $$\lim_{x\to1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty\,.$$

   Caso contrário, ou seja, se x se aproxima de 1 pela esquerda, o valor $x-1$ se aproxima de zero por valores negativos, de modo que a fração $\dfrac{1}{x-1}$ torna-se menor do que qualquer valor negativo pré-fixado. Traduz-se este fenômeno escrevendo-se

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty\,.$$

3. Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 + 8x^2 - 15x + 3)$.

   Solução. Observemos que
   $2x^5 - 3x^4 + 7x^3 + 8x^2 - 15x + 3 = x^5\left(2 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{7}{x^2} + \dfrac{8}{x^3} - \dfrac{15}{x^4} + \dfrac{3}{x^5}\right)$.

   Mas $\dfrac{3}{x}$, $\dfrac{7}{x^2}$, $\dfrac{8}{x^3}$, $\dfrac{15}{x^4}$ e $\dfrac{3}{x^5}$ tendem a zero quando $x \to +\infty$ e daí teremos que $\left(2 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{7}{x^2} + \dfrac{8}{x^3} - \dfrac{15}{x^4} + \dfrac{3}{x^5}\right)$ se aproxima de 2. Ora, como x^5 tende a $+\infty$ quando $x \to +\infty$ concluímos que

   $$\lim_{x\to+\infty}(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 + 8x^2 - 15x + 3) = +\infty.$$

   O que acontece quando $x \to -\infty$?

4. Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+5}{x^2 - 7x + 1}$.

   Solução. Observemos que numerador e denominador tendem a $+\infty$, de modo que teríamos uma indeterminação do tipo $\dfrac{+\infty}{+\infty}$.

   Como levantar tal indeterminação? Dividamos numerador e denominador por x^2, a mais alta potência do denominador de modo a obtermos

   $$\begin{aligned}
   \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2}} &= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x}\right) + \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{7}{x}\right) + \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)} \\
   &= \frac{0+0}{1-0+0} \\
   &= \frac{0}{1} \\
   &= 0\,.
   \end{aligned}$$

5. Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3 - 4x + 5}{3x^3 + 5}$.

   Solução. Inicialmente observemos que numerador e denominador tendem para $+\infty$. Dividamos por x^3 o numerador e o denominador dessa expressão. Assim

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-4x+5}{3x^3+5} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2-\left(\dfrac{4}{x^2}\right)+\left(\dfrac{5}{x^3}\right)}{3+\left(\dfrac{5}{x^3}\right)}\\ &= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}2-\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4}{x^2}\right)+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}3+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5}{x^3}\right)}\\ &= \frac{2-0+0}{3+0}\\ &= \frac{2}{3}\,.\end{aligned}$$

6. Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^5-1}{3x^3+7}$.

   Solução. Tanto o numerador como o denominador tendem para $+\infty$, logo temos uma indeterminação. Vamos levantar a indeterminação como segue

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^5-1}{3x^3+7} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^5(4-\frac{1}{x^5})}{x^3(3+\frac{7}{x^3})}\\ &= \lim_{x\to+\infty}x^2\frac{4-\frac{1}{x^5}}{3+\frac{7}{x^3}}\,.\end{aligned}$$

   Como, quando $x\to+\infty$, x^2 tende para $+\infty$ e $\dfrac{4-\frac{1}{x^5}}{3+\frac{7}{x^3}}$ tende para $\dfrac{4}{3}$, temos que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^5-1}{3x^3+7}=+\infty\,.$

7. Calcule $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3}{x-2}$.

   Solução. Quando x tende a 2 pela direita ($x\to2^+$), $x-2$ se aproxima de zero e é positivo; portanto, $\dfrac{3}{x-2}$ tende a $+\infty$. Contudo, quando x tende a 2 pela esquerda ($x\to2^-$), $x-2$ tende a zero por valores negativos e assim $\dfrac{3}{x-2}$ tende a $-\infty$. Nesse caso dizemos que o limite $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3}{x-2}$ não existe.

5 Exercícios propostos

1. Calcule os limites.

   (a) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4x)$

   (b) $\lim\limits_{x\to -1}(x^3+2x^2-3x-4)$

   (c) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$

   (d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

   (e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$

2. Calcule os limites.

   (a) $\lim\limits_{x\to -\infty}(3x^4-x^2+x-7)$

   (b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x+5}{x^2-7x+3}$

   (c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^3-4x+2}{7x^3+5}$

   (d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4x^5-1}{3x^3+7}$

   (e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4x-1}{\sqrt{x^2+2}}$

   (f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4x-1}{\sqrt{x^2+2}}$

   (g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{7x-4}{\sqrt{x^3+5}}$

   (h) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^3+2}{\sqrt{x^4-2}}$

   (i) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5}}{3x^2-2}$

   (j) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x+3}{4x-5}$

   (l) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2+1}{6+x-3x^2}$

   (m) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{x^2+5}$

6 Respostas dos exercícios propostos

1. (a) -4
   (b) 0
   (c) $3x^2$
   (d) 2
   (e) 0
2. (a) $+\infty$
   (b) 0
   (c) $\frac{3}{4}$
   (d) $+\infty$
   (e) 4
   (f) -4
   (g) 0
   (h) $-\infty$
   (i) 0
   (j) $\frac{1}{2}$
   (l) $-\frac{2}{3}$
   (m) 0

Nesta aula você aprendeu:

- a calcular os limites $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ e $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$;
- a calcular limites infinitos e limites no infinito.

7 Apêndice

Limites via ϵ e δ

As noções sobre limites, introduzidas previamente de maneira bastante intuitiva, podem ser formalizadas da seguinte maneira, em que supomos as funções sempre definidas em intervalos, a fim de evitar adentrar em conceitos como o de ponto de acumulação.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida em um certo intervalo I da reta real $\mathbb{R}$. Diz-se que $\lim_{x\to a} f(x) = l$, em que a pertence ao intervalo I ou é uma de suas extremidades, se, dado um número positivo ϵ, normalmente considerado bem pequeno, existir um número positivo δ (que em geral depende de a e de ϵ), tal que $|f(x) - l| < \epsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$. Escolhido ϵ, encontra-se um δ tal que sempre que $x \neq a$, $x \in I$ está no intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, então $f(x)$ está no intervalo $(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$. Observemos que o ponto a não precisa pertencer ao domínio I de f. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 23. Mostremos, usando ϵ e δ, que

$$\lim_{x\to 2}(4x - 5) = 3.$$

Para isso, tomemos ϵ um número positivo arbitrário. Devemos encontrar um $\delta > 0$ tal que, $|(4x - 5) - 3| < \epsilon$ sempre que $0 < |x - 2| < \delta$. Inicialmente notemos que $|(4x - 5) - 3| = |4x - 8| = 4|x - 2|$. Tomando $\delta = \frac{\epsilon}{4}$ e se tivermos $0 < |x - 2| < \delta$, obteremos

$$|(4x - 5) - 3| = 4|x - 2| < 4\delta = \epsilon$$

o que mostra que $\lim_{x\to 2}(4x - 5) = 3$.

Observemos que quando $x \to a$ esta aproximação pode ser feita tanto pela direita como pela esquerda, ou seja, tanto por valores maiores do que a como por valores menores do que a. Para que o limite exista, o valor do qual $f(x)$ se aproxima deve ser independente destas aproximações laterais, ressalvando o caso em que a é um extremo do intervalo I, situação essa em que existe apenas uma possibilidade de aproximação por valores pertencentes a I. Estudemos o exemplo abaixo.

Exemplo 24. A função $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ possui o intervalo $-3 \leq x \leq 3$ como seu domínio. Se a for qualquer número no intervalo $(-3, 3)$, então $\lim_{x\to a} \sqrt{9 - x^2}$ existe e é igual a $\sqrt{9 - a^2}$. Considere agora $a = 3$. Tomemos x se aproximando de 3 pela esquerda; então $\lim_{x\to 3^-} \sqrt{9 - x^2} = 0$. Para $x > 3$, $\sqrt{9 - x^2}$ não está definida. Portanto,

$$\lim_{x\to 3^-} \sqrt{9 - x^2} = \lim_{x\to 3} \sqrt{9 - x^2} = 0$$

Analogamente,

$$\lim_{x\to -3^+} \sqrt{9-x^2} = \lim_{x\to 3} \sqrt{9-x^2} = 0.$$

No caso em que tivermos limite infinito, ou seja,

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

temos a seguinte definição em termos rigorosos.

Diz-se que

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

se, e somente se, dado qualquer número positivo M, existe $\delta > 0$ tal que, $f(x) > M$ sempre que $0 < |x-a| < \delta$. Analogamente, define-se

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty\,.$$

Exemplo 25. Usemos ϵ e δ para mostrar que $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x) = 10$.

Seja $\epsilon > 0$. Observemos que $(x-2)^2 = x^2-4x+4$, e assim $x^2+3x-10 = (x-2)^2+7x-14 = (x-2)^2+7(x-2)$. Logo $|(x^2+3x)-10| = |(x-2)^2+7(x-2)| \leq |x-2|^2+7|x-2|$. Tomando δ como sendo o mínimo entre 1 e $\dfrac{\epsilon}{8}$, então $\delta^2 \leq \delta$. Portanto, $0 < |x-2| < \delta$ implica $|(x^2+3x)-10| < \delta^2+7\delta \leq \delta+7\delta = 8\delta \leq \epsilon$ e assim

$$\lim_{x\to 2}(x^2+3x) = 10.$$

Exemplo 26. Mostremos que se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B \neq 0$, existe um número positivo δ tal que $0 < |x-a| < \delta$ implica que $|f(x)| > \dfrac{|B|}{2}$.

Seja $\epsilon = \dfrac{|B|}{2}$. Obtemos um número $\delta > 0$ tal que $0 < |x-a| < \delta$ implica $|f(x)-B| < \dfrac{|B|}{2}$. Agora, se $0 < |x-a| < \delta$ teremos

$$|B| = |f(x)+(B-f(x))| \leq |f(x)|+|B-f(x)| < |f(x)| + \frac{|B|}{2}$$

e, portanto,

$$\frac{|B|}{2} < |f(x)|$$

Deixemos a cargo do leitor as seguintes tarefas.

1. Para $f(x) = 5x-6$, encontre $\delta > 0$ tal que, sempre que $0 < |x-4| < \delta$, então $|f(x)-14| < \epsilon$, quando $\epsilon = \dfrac{1}{2}$ e quando $\epsilon = 0,001$.

2. Use ϵ e δ para mostrar que

   (a) $\lim\limits_{x \to 3} 5x = 15$

   (b) $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$

   (c) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 3x + 5) = 3$

Leibniz

Como já tivemos ocasião de citar, o Cálculo Diferencial e Integral tem como personagens principais Newton e Leibniz. Sobre Newton já tivemos a oportunidade de falar. Façamos algumas observações sobre Leibniz.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) foi um matemático alemão nascido em Leipzig. Aos quinze anos entrou para a Universidade de Leipzig para estudar Direito tendo obtido o seu doutorado aos vinte anos de idade. Após a conclusão do seu doutorado em Direito, Leibniz viajou por vários países - França, Inglaterra, Holanda, etc - tendo contato com um mundo que fervilhava de idéias em todos os campos do conhecimento. Leibniz relacionou-se com vários dos seus contemporâneos que se mantinham na linha de frente das revoluções que se processavam, em particular, em Matemática e Física. Manteve intercâmbio com Huygens e correspondia-se com Newton.

Ao chegar a Paris, em 1672, seus conhecimentos matemáticos eram apenas rudimentares, incluindo-se aí partes da obra de Euclides mas, sob a orientação de Huygens, iniciou-se em Matemática de nível superior que o levou à criação do Cálculo Diferencial e Integral.

Na verdade, Leibniz foi o primeiro a publicar um trabalho em Cálculo Diferencial de maneira inteligível e com notações até hoje usadas, coisa que o coloca mais próximo de nós do que Newton. Tal trabalho apareceu no jornal *Acta Eruditorum* em um artigo intitulado *Um Novo Método para Máximos e Mínimos assim como para Tangentes, e que não é restrito para quantidades fracionais ou irracionais, e um notável tipo de Cálculo para isso.* Leibniz publicou uma exposição concisa do seu Cálculo Diferencial que ele diz ser datada de 1676. Apesar de alguns pontos obscuros e alguns descuidos, tal trabalho se mostrou um marco no desenvolvimento do Cálculo que estava a nascer. Várias das notações e regras para cálculo de derivadas, que até hoje são usadas, estavam contidas nesse artigo. Apenas para dar uma ligeira noção do conteúdo desse trabalho de Leibniz, vejamos alguns exemplos de regras de derivação deduzidas por ele, e que serão estudadas na aula 5:

Acta Eruditorum foi um jornal fundado em 1682 por Leibniz e Otto Mencke, do qual Leibniz foi editor-chefe.

1. Se a for uma constante, então $da = 0$.
2. $d(ax) = adx$.
3. $d(w - y + z) = dw - dy + dz$.
4. $d(x^n) = nx^{n-1}dx$ em que n é um número natural.
5. $d\left(\dfrac{1}{x^n}\right) = -\dfrac{ndx}{x^{n+1}}$.
6. $d(\sqrt[b]{x^a}) = \dfrac{a}{b}\sqrt[b]{x^{a-b}}dx$.
7. $d(uv) = udv + vdu$.
8. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.