Aula 4

Funções contínuas

Objetivos

- Estudar o conceito de funções contínuas.
- Estudar máximos e mínimos de funções contínuas.

Nas aulas anteriores tivemos a oportunidade de deparar funções cujos comportamentos eram os mais diversos possíveis. Em alguns casos os gráficos podiam ser traçados sem que a caneta fosse tirada do papel, ou seja, o desenho era feito de maneira *contínua*. Em outras situações o traçado do gráfico tinha de ser feito de modo que a caneta, em um ou mais pontos, tinha que ser momentaneamente erguida do papel a fim de que o traçado pudesse continuar. Em alguns exemplos, o comportamento tornava-se mais grave, de tal maneira que o salto da caneta tinha de ser ilimitado. Na presente aula introduziremos um pouco de rigor nessas afirmações.

1 Funções contínuas: definição e exemplos

A não-existência de *saltos* nos traçados dos gráficos de certas funções é traduzida na linguagem dos matemáticos como continuidade, sendo este fato expresso da seguinte maneira:

Definição 1. Uma função $f(x)$ é *contínua* em um ponto $x = a$ se:

1. $f(a)$ é definida, ou seja, pode-se calcular o valor de f no ponto $x = a$;
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe;
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Vejamos o que estas condições significam.

- Condição (1) significa que o ponto que está sendo considerado pertence ao domínio da função. Se, por exemplo, considerarmos a função $f(x) = \sqrt{x}$ não se pode falar em continuidade, por exemplo, no ponto $x = -4$.

- Condição (2) implica que os limites laterais, caso os dois possam ser calculados, existem e são iguais.

- Condição (3) nos diz que se aproximarmos x de a o valor de $f(x)$ se aproximará de $f(a)$.

Devemos enfatizar que em todos os exemplos considerados neste texto as funções sempre têm como domínio um intervalo ou uma união de intervalos.

Vejamos alguns exemplos nos quais uma ou mais das condições acima podem falhar.

Exemplo 27. Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0, \\ 1, & \text{se} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

O leitor pode verificar facilmente que as condições que definem a continuidade são inteiramente satisfeitas em todos os pontos $x \neq 0$. No entanto os limites laterais em zero existem mas são distintos, o que viola a condição (2). De fato,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \neq \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 = f(0).$$

Veja a figura 4.1 na qual é esboçado o gráfico desta função.

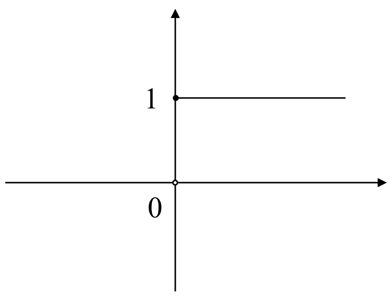

Fig. 4.1

Exemplo 28. Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{se} \quad x < 1, \\ x - 1, & \text{se} \quad x > 1, \\ 1, & \text{se} \quad x = 1. \end{cases}$$

Claramente, a função f é contínua em todos os pontos $x \neq 1$. No entanto,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 0 \neq 1 = f(1),$$

ou seja, muito embora o limite no ponto $x = 1$ exista, ele é diferente do valor da função neste ponto e assim a condição (3) não é satisfeita. Observemos a figura 4.2, em que está representado o gráfico desta função.

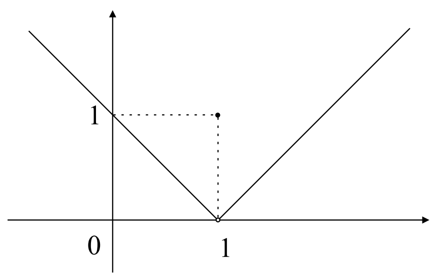

Fig.4.2

Outros exemplos serão discutidos ao final da lição. As funções usuais, que o leitor conhece desde os tempos do ensino fundamental e do médio, tais como funções polinomiais, sen, cos, ln, exp, etc. são todas contínuas, além de combinações *bem comportadas* destas funções. Devemos, porém, tomar cuidados quando considerarmos o quociente de funções, pois quando o denominador se anula poderemos ter problemas com a existência do limite assim como com a continuidade. No caso em que tivermos uma função de forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

em que $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios, diz-se que f é uma função racional e não estará definida nos pontos que são raízes de $q(x)$. O mesmo ocorre com funções trigonométricas cujas definições envolvam quocientes. É o que ocorre com tg, sec, cotg, cossec, etc.

Observação 2. De acordo com a definição 1, falar em continuidade somente faz sentido em pontos que pertençam ao domínio da função. Contudo, existem casos em que, consagrados pelo uso na literatura matemática, pode-se falar em descontinuidade mesmo em pontos que não pertençam ao domínio da função considerada. Isso é o que acontece, por exemplo, com as funções

$$\frac{|x|}{x} \quad \text{e} \quad \frac{1}{x}.$$

No primeiro caso, diz-se que a função possui uma descontinuidade de salto e no segundo, a função *explode* em $x = 0$ e dizemos também que tal função é descontínua neste ponto. Veja as figuras 4.3(a) e (b).

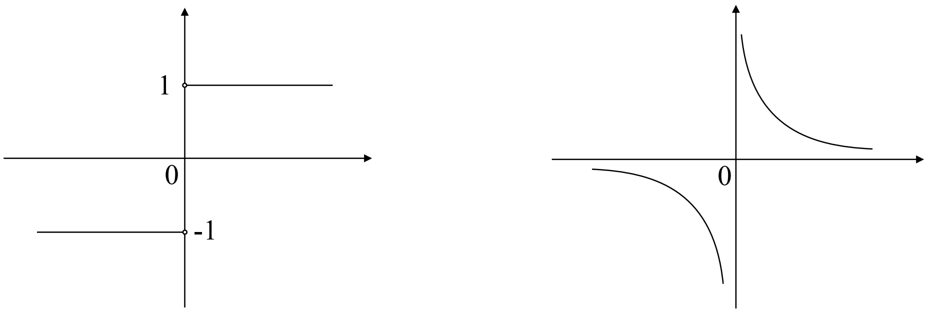

Fig. 4.3(a) Fig. 4.3(b)

Exemplo 29. Consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq -1, \\ x+1, & \text{se } -1 < x \leq 0, \\ x^2, & \text{se } 0 < x < 1, \\ 1, & \text{se } x = 1, \\ \dfrac{1}{2-x}, & \text{se } 1 < x \end{cases}$$

cujo gráfico está representado na figura 4.4. Essa função é definida em todos os pontos de $\mathbb{R}$, exceto em $x = 2$, em virtude da presença do termo $\frac{1}{2-x}$. As funções usadas na definição de f, $0, x+1, x^2$ e $\frac{1}{2-x}$ são todas contínuas nos pontos em que estão definidas. À vista disso, devemos estudar a continuidade de $f(x)$ somente naqueles pontos em que há mudanças na expressão de tal função, ou seja, em $x = -1, 0$ e 1.

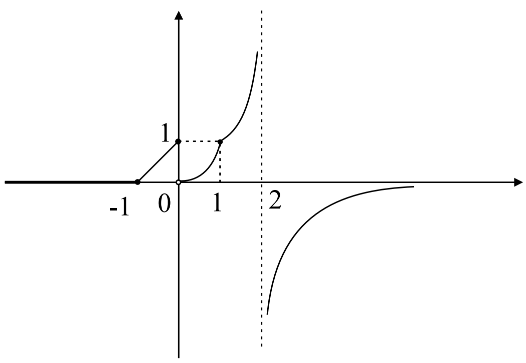

Fig. 4.4

Em $x = -1$,

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} 0 = 0$$

e

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x+1) = -1+1 = 0$$

Dessa forma, os limites laterais são iguais, o que acarreta a existência do limite em $x = 1$. Além disso, o valor da função em $x = -1$ é zero implicando que

$$\lim_{x\to -1} f(x) = 0 = f(-1)$$

o que nos mostra que a função $f(x)$ satisfaz as três condições exigidas para a continuidade no ponto $x = -1$.

Em $x = 0$,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x+1) = 1$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0.$$

Verifica-se, então, que ambos os limites laterais existem mas são distintos. Segue-se que o limite em $x = 0$ não existe, o que nos leva a concluir que a função não é contínua neste ponto.

Vejamos o comportamento de $f(x)$ em $x = 1$. Observemos que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1$$

e

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{2-x} = 1\,.$$

Decorre então que os limites laterais existem e são iguais. Logo $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existe e é igual a 1. Além disso, $f(1) = 1$. Assim, a função $f(x)$ é contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}$, exceto em $x = 0$ e $x = 2$.

Exemplo 30. Analisemos a continuidade da função

$$f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}\,.$$

Observemos que há um problema em $x = 2$, ou seja, a função não é aí definida. Além disso, ela pode ser reescrita na forma

$$\frac{|x-2|}{x-2} = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x-2} & \text{se} \quad x-2 > 0 \\[2ex] \dfrac{-(x-2)}{x-2} & \text{se} \quad x-2 < 0 \end{cases}$$

a qual, simplificada mais uma vez, fornecerá

$$\frac{|x-2|}{x-2} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x-2 > 0 \\ -1 & \text{se} \quad x-2 < 0 \end{cases}$$

Conseqüentemente tal função será contínua em todos os pontos de $\mathbb{R} - \{2\}$ e terá uma descontinuidade em $x = 2$, onde ela dá um salto, ou seja,

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} = -1$$

enquanto

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} = 1$$

o que nos diz que o salto em $x = 2$ é de duas unidades. Veja a figura 4.5.

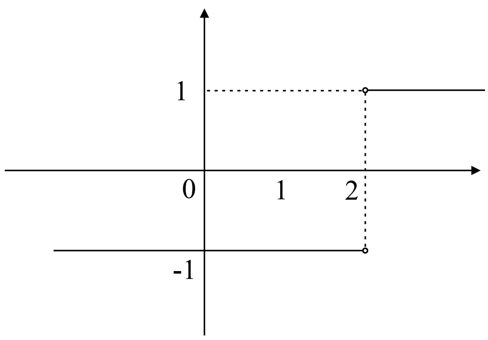

Fig. 4.5

Observação 3. As funções contínuas podem ser operadas algebricamente e tais operações são governadas pelas seguintes regras:

Se as funções $f(x)$ e $g(x)$ são ambas contínuas em um ponto x_0 de seu domínios, então a soma $f(x) + g(x)$, a diferença $f(x) - g(x)$, o produto $f(x)g(x)$ e o quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$, desde que $g(x) \neq 0$ no caso do quociente, são funções contínuas em x_0.

Exemplo 31. Todo polinômio

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

é contínuo, pois cada uma das funções $a_k x^k$, $k = 1, \ldots, n$ é contínua.

Exemplo 32. Toda função racional

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n}$$

é contínua nos pontos em que a função $Q(x)$ seja diferente de zero.

Um problema central no Cálculo Diferencial e Integral é o do estudo de máximos e mínimos de funções contínuas definidas em intervalos, o qual, combinado com a noção de derivada, constitui um capítulo marcante da Matemática. Vejamos um dos teoremas mais importante do Cálculo cuja demonstração foge ao escopo de um curso inicial de Cálculo, mas será feita com detalhes em aulas referentes à Análise.

Teorema 1. *Se f for uma função contínua em um intervalo fechado $I = [a, b]$, então a imagem de f é um intervalo.*

Esse teorema afirma que o conjunto de valores atingidos por $f(x)$ quando x varia em todo o I é também um intervalo.

No caso em que f é constante o intervalo imagem de f se reduz a um ponto. Se o intervalo I for aberto a sua imagem por meio de uma função contínua pode ser qualquer outro tipo de intervalo, conforme mostram os exemplos a seguir.

Exemplo 33. Consideremos a função $f(x) = \cos x$ definida no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. A imagem por f deste intervalo é o intervalo fechado $[-1, 1]$.

Considerando agora a restrição de cos ao intervalo aberto $(0, \frac{\pi}{2})$, sua imagem é o intervalo aberto $(-1, 1)$.

Tomando ainda uma restrição de cos ao intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, temos que sua imagem é o intervalo semi-aberto $(0, 1]$.

Exemplo 34. Consideremos o polinômio cúbico

$$p(x) = x^3 - x.$$

Ao tomarmos x restrito ao intervalo aberto $(-1, 1)$ verifica-se que a imagem de tal intervalo pelo polinômio p é o intervalo fechado $[-\frac{2\sqrt{3}}{9}, \frac{2\sqrt{3}}{9}]$. Se considerarmos o intervalo fechado $[-1, 1]$, a sua imagem por p também é o intervalo fechado $[-\frac{2\sqrt{3}}{9}, \frac{2\sqrt{3}}{9}]$. Confira estas afirmações e teste outros intervalos.

Veja as figuras abaixo nas quais são dadas visualizações geométricas de várias situações que podem ocorrer.

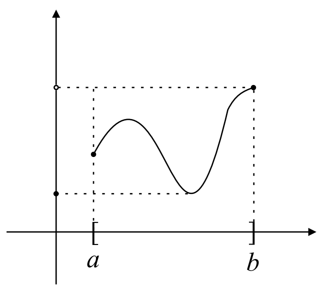

Fig. 4.6(a)

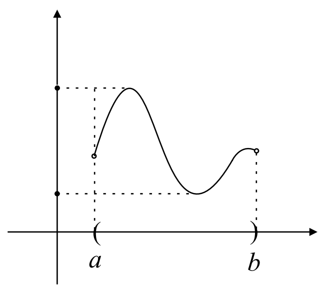

Fig. 4.6(b)

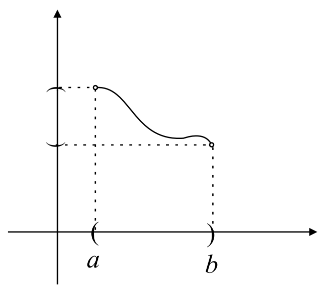

Fig. 4.6(c)

2 Máximos e mínimos

Seja f uma função definida em um intervalo I, e suponhamos que exista um ponto $p \in I$ tal que $f(x) \leq f(p)$, para todo $x \in I$. Então $f(p)$ é chamado *máximo* de f em I, e dizemos que f *atinge máximo* no ponto p. Analogamente, suponhamos que exista um ponto $q \in I$ tal que $f(x) \geq f(q)$ para todo $x \in I$. Então $f(q)$ é chamado *mínimo* de f em I e diz-se que f *atinge mínimo* no ponto q. Observemos que f pode atingir máximo ou mínimo em vários pontos de I. Veja as figuras abaixo, nas quais várias situações são ilustradas.

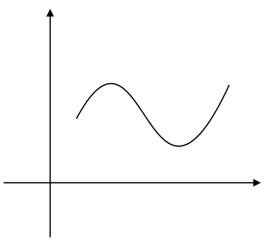

Fig. 4.7(a)

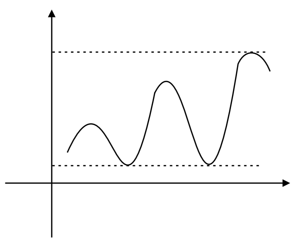

Fig. 4.7(b)

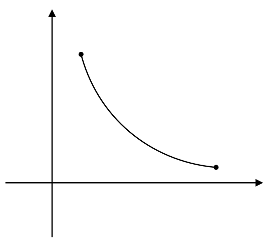

Fig. 4.7(c)

A palavra *extremo* refere-se tanto a máximo como a mínimo e o termo *valor extremo* refere-se tanto ao valor máximo como ao valor mínimo.

Exemplo 35. Consideremos $I = [-1, 1]$ e a função $f(x) = x^2$ definida nele. Neste caso o valor máximo de f em I é igual a 1, sendo que ele é atingido nos pontos $x = -1$ e $x = -1$. Por outro lado, o seu valor mínimo é igual a 0 e é atingido em $x = 0$.

No mesmo intervalo, a função $g(x) = x^3$ possui máximo igual a 1, atingido em $x = 1$ e valor mínimo igual a -1, atingido em $x = -1$.

A função constante $h(x) = k$ possui máximo e mínimo igual a k atingidos em todos os pontos de seu domínio.

Já a função $l(x) = x$, definida no intervalo aberto $(0, 1)$, não atinge nem máximo nem mínimo.

Nos exercícios, outros exemplos serão desenvolvidos.

Temos o seguinte teorema, cuja demonstração será omitida em virtude dos objetivos do curso.

Teorema 2. *Se f for uma função contínua em um intervalo fechado $I = [a, b]$, então I contém pontos p e q tais que*

$$f(q) \leq f(x) \leq f(p), \quad \textit{para todo} \ \ x \in I.$$

Em outras palavras, esse teorema afirma que f atinge máximo e mínimo em I, nos pontos p e q, respectivamente.

Suponhamos que f seja como no teorema 2. Sejam M o máximo de f em I e m o mínimo de f em I. O teorema acima nos diz que o gráfico de f atinge o seu valor mais alto no ponto $P = (p, M)$ e o ponto mais baixo no ponto $Q = (q, m)$. Veja a figura 4.8.

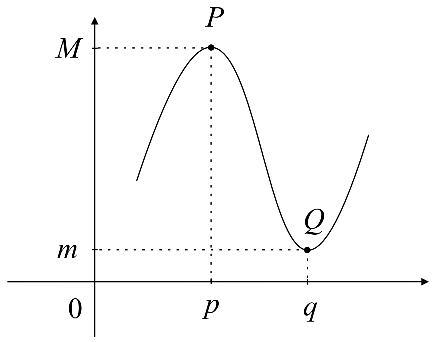

Fig.4.8

Um dos teoremas mais importantes no estudo de funções contínuas é o chamado *Teorema do Valor Intermediário de Lagrange*, enunciado abaixo:

Joseph Louis Lagrange (1736-1813) nasceu em Turim, Itália. Matemático da mais alta estirpe, a ponto de Napoleão Bonaparte tê-lo cunhado com a frase: *Lagrange é a pirâmide mais alta das ciências matemáticas.* Trabalhou em Análise, Teoria dos Números, Álgebra, Mecânica Analítica etc., tendo publicado obras primas da Matemática tais como *Thèorie des Fonctions Analytiques Contenant les Principes du Calcul Différentiel, Traité de Résolution des Équations Numériques de Tous Degrés e Mácanique Analytique.* Veja apêndice ao final desta aula em que se vê mais detalhes sobre a vida de Lagrange. Foi um dos matemáticos da Revolução Francesa e um dos membros de uma comissão formada pela Académie de Sciences para a reforma do sistema de pesos e medidas.

Teorema 3. *Se f for uma função contínua definida em um intervalo I, que não necessita ser fechado, e se f assume diferentes valores $f(\alpha)$ e $f(\beta)$ em dois pontos α e β de I, então f atinge todos os valores entre $f(\alpha)$ e $f(\beta)$, correspondentes a pontos entre α e β.*

Mais precisamente, suponhamos que $f(\alpha) < f(\beta)$. Se $f(\alpha) < y < f(\beta)$, então o teorema anterior afirma que existirá $x \in I$ tal que $f(x) = y$. Conclusão análoga será verdadeira se $f(\alpha) > f(\beta)$.

Tal teorema em geral é enunciado em uma forma um pouco diferente, mas equivalente, daquela exposta no Teorema 3, conforme podemos ver a seguir.

Teorema 4. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(a) < 0 < f(b)$ ou $f(a) > 0 > f(b)$. Então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Aplicação 1. Como uma aplicação simples, mas importante, do Teorema do Valor Intermediário vejamos a questão da existência de raízes de polinômios de grau ímpar. Consideremos o polinômio de grau ímpar

$$p(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \cdots + a_1x + a_0$$

em que $a_{2n+1} \neq 0$. Consideremos o caso em que $a_{2n+1} > 0$. Se $a_{2n+1} < 0$, o procedimento será análogo. Reescrevamos o polinômio $p(x)$, para $x \neq 0$, da seguinte maneira

$$p(x) = x^{2n+1}\left(a_{2n+1} + a_{2n}\frac{x^{2n}}{x^{2n+1}} + \cdots + a_1\frac{x}{x^{2n+1}} + a_0\frac{1}{x^{2n+1}}\right)$$

donde

$$p(x) = x^{2n+1}\left(a_{2n+1} + a_{2n}\frac{1}{x} + \cdots + a_1\frac{1}{x^{2n}} + a_0\frac{1}{x^{2n+1}}\right).$$

Suponhamos que $x \to +\infty$. Assim, os termos $a_{2n}\frac{1}{x}, \ldots, a_1\frac{1}{x^{2n}}, a_0\frac{1}{x^{2n+1}}$ tenderão a zero. Como $x^{2n+1} \to +\infty$ teremos $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$. Raciocinando de maneira análoga, e como $x^{2n+1} \to -\infty$ quando $x \to -\infty$, teremos que $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$. Conseqüentemente, existem $a < b$ tais que

$$f(a) < 0 < f(b).$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Observação 4. A aplicação precedente é apenas um caso particular de um teorema bastante geral chamado *Teorema Fundamental da Álgebra*, cujo enunciado é o seguinte e cuja primeira demonstração é devida a Gauss:

Carl Friedrich Gauss(1777-1855) foi um dos mais geniais matemáticos que a história já registrou. Seus trabalhos são fundamentais em todas as áreas da Matemática. Suas contribuições se espraiaram pela Análise, Álgebra, Geometria Diferencial, Teoria dos Números, etc. Dedicaremos parte do apêndice a ele, ao final desta Aula.

Teorema 5. *Todo polinômio de grau n possui n raízes reais ou complexas.*

Tornemos mais preciso o que afirma o *Teorema Fundamental da Álgebra*. Consideremos o polinômio

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

em que os coeficientes $a_j, j = 1, 2, \ldots, n$ são números complexos com $a_n \neq 0$ e a variável z também é complexa. Relembremos que um número complexo é uma expressão da forma $z = a + ib$ em que $a, b \in \mathbb{R}$ e i é a unidade imaginária definida por $i^2 = -1$ ou $i = \sqrt{-1}$. O número a é chamado parte real de z, designado por $a = \text{Re } z$, e b é chamado parte imaginária de z, designada por $b = \text{Im } z$. Veja Apêndice sobre números complexos. Sejam $z_1, z_2, \ldots, z_n$ as raízes do polinômio p cujas existências são garantidas pelo *Teorema Fundamental da Álgebra.* Temos, então, uma decomposição de p dada por

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)$$

em que algumas das raízes podem ser repetidas. Deve-se ressaltar que a demonstração deste importante teorema é usualmente vista em cursos de *Variáveis Complexas* e uma demonstração dele pode ser encontrada em Knop[1]. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 36.

(a) O polinômio $p(x) = x^2 - 5x + 6$ possui duas raízes reais e distintas dadas por 2 e 3 sendo decomposto na forma $p(x) = (x - 2)(x - 3)$.

[1] Konrad Knop, Theory of Functions, Part I, Elements of the General Theory of Analytic Functions, Dover Publications.

(b) O polinômio $p(x) = x^2 - 2x + 1$ possui duas raízes reais e iguais a 1 e sua decomposição é $p(x) = (x-1)(x-1) = (x-1)^2$.

(c) O polinômio $p(z) = z^2 + 1$ não possui raízes reais, mas possui duas raízes complexas que são i e $-i$, sendo decomposto como $p(z) = (z-i)(z+i)$.

(d) O polinômio $p(z) = z^3 - 2z^2 + 2z$ possui as raízes $0, 1-i$ e $1+i$ e sua decomposição é

$$p(z) = z(z-(1+i))(z-(1-i))$$

3 Exercícios resolvidos

1. Encontre os extremos, caso existam, da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ no intervalo:

   (a) $(0,1)$

   Solução. Observemos que a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é decrescente e tende para $+\infty$ quando $x \to 0^+$. Portanto, f não atinge máximo. Além disso, ela decresce se aproximando de 1 quando $x \to 1^-$. Em virtude disso, f também não atinge mínimo.

   (b) $(0,1]$

   Solução. No intervalo $(0,1]$ a função não possui máximo pelo mesmo motivo do caso (a). Como 1 pertence ao intervalo ao intervalo $(0,1]$ temos que o mínimo de f é atingido em $x=1$, pois f é decrescente, e assim seu mínimo é $f(1) = 1$.

   (c) $[1,2]$

   Solução. Como a função f é decrescente e o intervalo acima contém suas extremidades, o valor máximo de f é atingido em $x = 1$ e vale $f(1) = 1$ e o seu valor mínimo é atingido em $x = 2$ e vale $f(2) = \dfrac{1}{2}$.

   (d) $(0,\infty)$

   Solução. A função f não atinge máximo em $(0,\infty)$ e não atinge mínimo pois $f(x) > 0$, para todo $x > 0$, e $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Exercícios propostos

1. Que escolha para $f(0)$ fará com que a função

$$f(x) = \frac{5x^2 - 3x}{2x} \quad (x \neq 0)$$

   seja contínua em $x = 0$?

2. A função
$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x & \text{se} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$
é contínua no intervalo $0 \leq x \leq 2$? E no intervalo $0 \leq x \leq 1$? E em $0 < x < 2$?

3. Encontre os extremos, caso existam, da função $f(x) = [x]$, em que $[x]$ representa o maior inteiro menor do que ou igual a x, nos intervalos:

   (a) $(0,1)$; (b) $(0,1]$; (c) $(-1,0]$; (d) $(0,\infty)$; (e) $(-\infty,\infty)$.

4. Verifique que, se uma função f é crescente em um intervalo fechado $I = [a,b]$, então f possui extremos globais em I, mesmo que f seja descontínua. Localize os pontos onde f atinge os extremos. O que se pode dizer se f for decrescente?

5. Se f é contínua em um intervalo I e se f atinge valores $f(\alpha)$ e $f(\beta)$ com sinais opostos, em dois pontos α e β de I, então f é igual a zero em algum ponto entre α e β. Tal afirmação é verdadeira ou falsa? Justifique.

6. A função
$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se} \quad -1 \leq x < 0 \\ x - 1 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$
é contínua? Ela aplica o intervalo fechado $-1 \leq x \leq 1$ em um intervalo fechado?

7. Dê exemplo de uma função contínua definida em um intervalo limitado, mas que sua imagem seja um intervalo não-limitado.

8. Dê exemplo de uma função contínua, definida em um intervalo não-limitado, cuja imagem seja um intervalo limitado.

9. Dê um exemplo de uma função contínua definida em um intervalo aberto e cuja imagem seja:

   (a) Um intervalo aberto; (b) Um intervalo semi-aberto; (c) Um intervalo fechado.

Respostas dos exercícios propostos

1. $-\dfrac{3}{2}$
2. A função não é contínua em nenhum dos intervalos mencionados.
3. (a) 0
   (b) 0 e 1
   (c) -1 e 0
   (d) 0
   (e) não existem extremos.
4. Se f é crescente em $[a, b]$, então $f(a)$ é o valor mínimo de f em $[a, b]$ e $f(b)$ é o valor máximo de f em $[a, b]$. Se é decrescente em $[a, b]$, então $f(a)$ é o valor máximo de f em $[a, b]$ e $f(b)$ é o valor mínimo de f em $[a, b]$.
5. Verdadeira, em virtude do teorema do valor intermediário.
6. A resposta para as duas perguntas é *não*.
7. $f(x) = \operatorname{tg} x$ definida em $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$.
8. $f(x) = \operatorname{sen} x$ definida em $[0, +\infty)$
9. (a) $f(x) = x$ definida em $(0, 1)$.
   (b) $f(x) = x^2$ definida em $(-1, 1)$.
   (c) $f(x) = \operatorname{sen} x$ definida em $(0, 2\pi)$.

Nesta aula você aprendeu:

- o que é uma função contínua;
- a identificar máximos e mínimos de funções contínuas.

4 Apêndice

Carl Friedrich Gauss

Carl Friedrich Gauss nasceu em 1777 em Brunswick, Alemanha, e morreu em 1855, aos setenta e oito anos, após uma profícua vida dedicada, principalmente, à Matemática, que ele intitulava como *A Rainha de todas as Ciências.* Filho de um jardineiro e pedreiro, seu pai desejava que ele fosse um pedreiro, também. No entanto, semelhante a Mozart na Música, de quem se diz que escreveu o seu primeiro minueto aos quatro anos de idade, Gauss mostrou-se um menino prodígio desde tenra idade, o que fez com que se desviasse do desígnio profissional ideado por seu pai. Diz-se que, aos três anos de idade, chegou a apontar um erro de cálculo cometido pelo seu pai. Outro episódio interessante ocorreu no colégio em que estudava quando, para manter a criançada ocupada durante alguns minutos, o professor determinou que cada estudante, entre eles Gauss, calculasse a soma de todos os números naturas de 1 até 100. Sem muita delonga, Gauss apresentou o resultado para o mestre-escola enquanto os seus condiscípulos debruçavam-se sobre suas carteiras em cálculos demorados. O que Gauss deve ter feito? Observemos que a soma

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 46 + 47 + 48 + 49 + 50+$$

$$51 + 52 + 53 + 54 + 55 + \cdots + 96 + 97 + 98 + 99 + 100$$

pode ser escrita na forma

$$(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + (4 + 97) + (5 + 96) + \cdots +$$

$$(46 + 55) + (47 + 54) + (48 + 53) + (49 + 52) + (50 + 51)$$

de modo que cada termo entre parênteses é igual a 101 e existem cinqüenta parcelas deste tipo. Então a soma requerida pelo professor do garoto Gauss é $50 \times 101 = 5050$. O talento mostrado por Gauss chamou a atenção do Duque de Brunswick que, mesmo sob protestos dos pais do garoto, enviou-o para o *Collegium Carolinum* e, em 1795, para *Göttingen*, local este destinado a um futuro glorioso. Inicialmente indeciso entre Filologia e Matemática, enfim decidiu-se, para sorte nossa, por essa última. Iniciou sua carreira acadêmica em Brunswick e após recusar a oferta de uma posição na Academia de São Petersburgo, Gauss foi indicado, em 1807, como o primeiro diretor do novo Observatório de Göttingen, local onde permaneceu, sempre dedicado aos estudos, com uma vida simples, feliz, abençoado com uma boa saúde, até o seu falecimento aos 78 anos.

Sua obra matemática é bastante volumosa, comparável à de Euler. No entanto, enquanto Euler era prolixo em seus escritos, Gauss caracterizava-se pela austeridade com que escrevia seus trabalhos. Em sua tese de doutorado, publicada em 1799, Gauss provou o *Teorema Fundamental da*

Álgebra, já citado nesta aula, cuja demonstração havia sido perseguida por matemáticos da estirpe de D'Alembert, Euler, Lagrange e Laplace. Muito embora suas criações permeiem todas as áreas da Matemática, na *Teoria dos Números*, ao que parece, ele encontrava um prazer maior do que nas outras áreas, chegando a dizer *Matemática, a Rainha das Ciências, e Aritmética, a Rainha da Matemática*, sendo que a sua obra central nesta área é a *Disquisitiones Arithmeticae.* Enveredou, também, pela Astronomia tendo publicado, em 1809, um trabalho central intitulado *Theoria Motus Corporum Coelestium.* Em Geometria Diferencial também teve papel destacado, principalmente com sua obra *Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas*, publicada em 1827, que foi motivada pelos seus estudos sobre geodésicas na superfície terrestre. Para mais detalhes sobre a vida e obra de Gauss, o leitor pode acessar o excelente site *www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Gauss.html.*

Joseph-Louis Lagrange

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), muito embora tenha nascido em Turim, era descendente de uma ilustre família parisiense, tendo ele mesmo se tornado um cidadão de Paris. Iniciou sua vida em Turim, posteriormente mudou-se para Berlim e, finalmente, estabeleceu-se em Paris, onde sua fama se consolidou. Sua genialidade revelou-se desde cedo, sendo que na escola já mostrava refinamento intelectual mostrando interesse por clássicos da literatura como Homero e Virgílio. Aos dezesseis anos de idade tornou-se Professor de Matemática da Escola Real de Artilharia de Turim. Aos dezenove anos resolveu o famoso problema isoperimétrico, já citado na aula 1, e, ao mesmo tempo, criava o *Cálculo das Variações*, uma das mais nobres áreas da Análise Matemática e objeto de intensa atividade de pesquisa até os nossos dias, que consiste, *grosso modo*, em determinar máximos e mínimos de funções cujos domínios são constituídos de funções. Sua obra fundamental foi *Mécanique Analítica*, produzida em Berlim mas publicada em Paris, na qual unificou a Mecânica Geral e a transformou, no dizer de Hamilton, outro eminente matemático, *em uma espécie de poema científico.*

"Tenho sempre observado que as pretensões das pessoas são inversamente proporcionais aos seus méritos; este é um dos axiomas da moral."
Joseph-Louis Lagrange

Números Complexos

A evolução dos conjuntos numéricos é um dos capítulos mais marcantes da Matemática. O ser humano, em seu estágio mais primitivo, usava, de maneira inconsciente, a noção de número natural para efetuar contagem. Em um estágio mais evoluído, os nossos ancestrais necessitavam não apenas contar mas também medir. Daí surge o conceito de número racional que são, esencialmente, as frações que conhecemos desde o ensino fundamental. No entanto, na evolução da Matemática e de suas aplicações surgem problemas em que o conjunto dos números racionais são insuficientes, fato este que já era do conhecimento dos pitagóricos nos idos do século VI a.C. O problema com o qual os pitagóricos se defrontaram era de (tentar) encontrar um número racional r tal que $r^2 = 2$. Como veremos na aula 1 de Análise, não existe tal número racional e daí construiu-se o conjunto dos números reais, mais precisamente o Corpo dos Números Reais, que é um conjunto numérico, munido com as operações de adição e multiplicação tão conhecidas do leitor, que está em correspondência biunívoca com a reta, que é um ente geométrico. Porém, o conjunto dos números reais ainda é insuficiente e daí surge o conceito de *Número Complexo.* Não nos deteremos nas motivações históricas das origens dos números complexos, remetendo o leitor ao excelente capítulo do livro, não mais editado, de Imenes-Trotta-Jakubovic.[2]

Inicialmente, introduz-se a unidade imaginária definida como sendo o número i definido por

$$i^2 = -1.$$

Claramente, essa unidade imaginária não é nenhum dos números reais que conhecemos.

Chamaremos de números complexos aos números da forma $z = a + bi$, em que $a, b \in \mathbb{R}$ e i é unidade imaginária. O conjunto dos números complexos será designado por $\mathbb{C}$.

O número real a é chamado parte real do número complexo z, designado por $a = \mathrm{Re}(z)$, e o número real b é chamado parte imaginária do número complexo z, designado por $b = \mathrm{Im}(z)$.

Dados dois números complexos $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$, diz-se que $z_1 = z_2$ se $a_1 = a_2$ e $b_1 = b_2$.

Da mesma maneira com o que acontece com os números reais, podemos introduzir duas operações (adição e multiplicação) no conjunto dos números complexos, da seguinte maneira.

Dados dois números complexos $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$, define-se a operação de adição como sendo aquela que a tais números complexos associa um terceiro número complexo $z_1 + z_2$, chamado soma de z_1 e z_2, dado por

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i.$$

Define-se a operação de multiplicação como sendo aquela que a tais números complexos associa um outro número complexo $z_1 z_2$, chamado produto de z_1 e z_2, dado por

$$z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

[2] L.M.P. Imenes, J. Jakubovic e F. Trotta, Matemática Aplicada, Vol. 3, Editora Moderna LTDA.

Tais operações possuem propriedades semelhantes às da adição e multiplicação dos números reais, quais sejam, comutatividade, associatividade, distributividade, existência de zero, existência de inverso, etc.

À custa da operação de multiplicação, podemos definir divisão de números complexos. Mais precisamente, dados dois números complexos z_1 e $z_2, z_2 \neq 0$ como acima, define-se o quociente $\frac{z_1}{z_2}$ como sendo o número complexo $z = a + bi$ dado por

$$z_1 = zz_2.$$

Vejamos um exemplo. Consideremos o quociente $\frac{3-i}{5-2i}$ e vejamos como proceder. Multiplicando numerador e denominador deste quociente por $5 + 2i$, que é chamado complexo conjugado de $5 - 2i$, obtemos

$$\frac{3-i}{5-2i} = \frac{3-i}{5-2i} \cdot \frac{5+2i}{5+2i} = \frac{17+i}{29} = \frac{17}{19} + \frac{1}{29}i.$$

Outra operação importante é a radiciação, que consiste no seguinte: Dado um número complexo ω, encontrar os números complexos z tais que $z^n = \omega$. Neste caso escreve-se $z = \sqrt[n]{\omega}$.

Existe uma representação geométrica para o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ que consiste no seguinte. Dado um número complexo $z = a + bi$ associamos a ele o par ordenado (a, b), que é um elemento do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Reciprocamente, dado um ponto (a, b) do plano, associamos a ele o número complexo $z = a + bi$. Deste modo, existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos e o plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ que, assim, é a representação geométrica dos números complexos.