Aula 6

A derivada: propriedades e aplicações

Objetivos

- Estudar o teorema do valor médio e algumas aplicações.
- Estudar a concavidade e pontos de inflexão de uma função.

Na aula 5 estudamos as propriedades básicas da derivada. Nesta aula introduziremos alguns resultados que nos permitirão fazer aplicações importantes, como o estudo de máximos e mínimos de funções, que constituem um dos aspectos essenciais do Cálculo Diferencial, entre outras. Veremos a relação entre máximos e mínimos de funções deriváveis em intervalos, relacionando-os com os resultados obtidos na aula 4.

1 O teorema do valor médio

Os resultados centrais desta aula serão os Teorema de Rolle e o Teorema do Valor Médio e alguns fatos deles decorrentes. Veja no Apêndice alguns fatos sobre a vida e obra de Rolle. Comecemos com o

Teorema 9. (Teorema de Rolle) *Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b). Suponhamos que $f(a) = f(b) = k$. Então existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Inicialmente relembremos que, sendo f contínua no intervalo $[a, b]$, ela atingirá máximo e mínimo nesse intervalo. Se f for constante, então $f'(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$ e o teorema está demonstrado. Suponhamos que f não seja constante. Então existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) > k$ ou $f(x_0) < k$. Se $f(x_0) > k$, a função f atingirá máximo em um ponto $c \in (a,b)$ tal que $f(c) > k$. Portanto, $f(c+h) \leq f(c)$ para todo h tal que $c+h \in [a,b]$. Suponhamos $h > 0$. Assim,

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$$

e daí

$$f'(c) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$$

Analogamente, considerando $h < 0$, obtém-se

$$f'(c) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$$

e pela unicidade da derivada concluímos que $f'(c) = 0$.

O outro caso, em que temos $f(x_0) < k$, é demonstrado de maneira análoga. $\square$

Este teorema possui uma interpretação geométrica simples e interessante. Ele nos diz que, se os pontos extremos do gráfico da função

$$y = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

possuem as mesmas ordenadas, ou seja, $f(a) = f(b)$, então a inclinação da reta tangente a esta curva é igual a zero em algum ponto do intervalo (a,b), isto é, em tal ponto a reta tangente ao gráfico é horizontal. Esta situação é ilustrada nas figuras 6.1(a), 6.1(b) e 6.1(c).

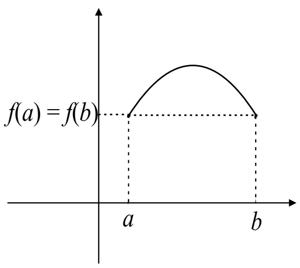

Fig.6.1(a)

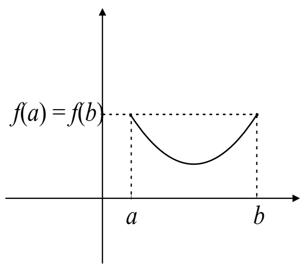

Fig. 6.1(b)

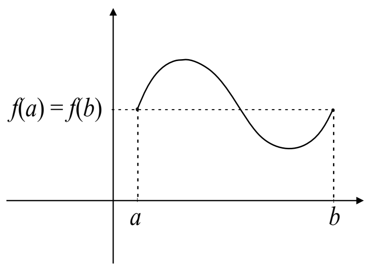

Fig. 6.1(c)

Seja f uma função definida em um certo intervalo aberto I. Se f for derivável em $c \in I$ e $f'(c) = 0$, então diz-se que c é *ponto crítico* de f. Em alguns textos, os pontos em que a função deixa de ser derivável também são chamados críticos.

(a) A função $f(x) = x^2$ possui derivada $f'(x) = 2x$ e 0 é o único ponto no qual f' se anula, ou seja, 0 é o único ponto crítico de f.

(b) A função $f(x) = ax + b, a \neq 0$ não possui pontos críticos, pois $f'(x) = a \neq 0$.

(c) A função $f(x) = x^3$ possui apenas 0 como ponto crítico, pois é o único ponto que anula a derivada $f'(x) = 3x^2$ de f.

(d) A função $f(x) = \cos x$ possui uma infinidade de pontos críticos em $\mathbb{R}$, pois sendo $\cos'(x) = -\text{sen}\, x$ tem-se que $\text{sen}\, x$ se anula em qualquer valor $x = n\pi$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Quando $f(a) \neq f(b)$ não podemos afirmar que em algum ponto de (a, b) a reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ seja horizontal. No entanto, pode-se concluir que em algum ponto intermediário do gráfico de $y = f(x)$ a reta tangente possui inclinação igual à da corda que liga os pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$, isto é, a reta tangente em algum ponto gráfico da referida função possui inclinação igual a

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

conforme mostram as figuras 6.2(a) e 6.2(b).

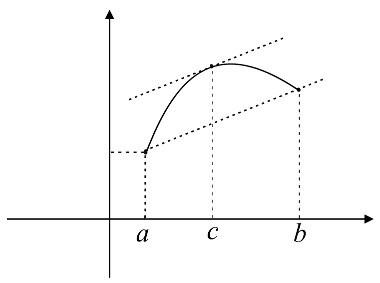

Fig.6.2(a)

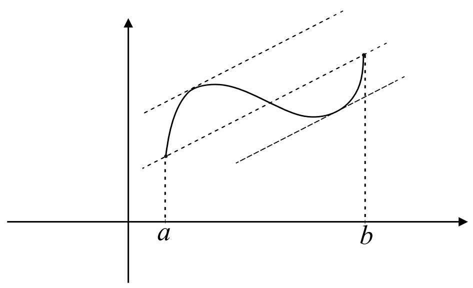

Fig. 6.2(b)

Traduzimos formalmente tal fato por meio do teorema a seguir.

Teorema 10. (Teorema do valor médio de Lagrange) *Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b). Então existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Demonstração. Consideremos a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) - f(a)$$

que é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) pois é a soma de funções contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b). Além disso, é fácil ver que $g(a) = g(b) = 0$. Pode-se então usar o *Teorema de Rolle* para garantir a existência de $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Como

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

tem-se que $g'(c) = 0$ é equivalente a

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

o que conclui a demonstração do teorema. $\square$

2 Aplicações do teorema do valor médio

1. Se f for uma função derivável em um intervalo I e se sua derivada se anula em todos os pontos de I, então f será constante em I.

   De fato, seja x_0 um ponto arbitrário, porém fixado, de I. Seja x um ponto qualquer de I e consideremos o intervalo cujos extremos sejam x_0 e x. Aplicando o *teorema do valor médio* a f neste intervalo, obteremos

   $$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$$

   para algum ponto c pertencente a I. Mas, por hipótese, $f'(c) = 0$ e assim $f(x) - f(x_0) = 0$ e daí segue-se que $f(x) = f(x_0)$, para todo $x \in I$, o que mostra ser f constante.

   Se f não estiver definida em um intervalo, a conclusão acima não é verdadeira. Para ver isso considere a função $f : (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

   $$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x \in (-\infty, 0) \\ 1 & \text{se} \quad x \in (0, \infty). \end{cases}$$

   Tal função é derivável e sua derivada é identicamente nula em seu domínio, no entanto, ela não é constante. Veja figura 6.3.

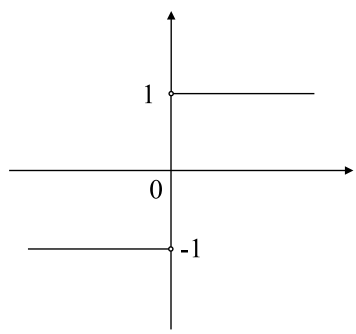

Fig. 6.3

2. Se f for uma função derivável em um intervalo I e se $f'(x) > 0$ em todos os pontos no interior do intervalo I, então f será crescente em I, ou seja, se $x_1, x_2 \in I$ e $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$.

Com efeito, sejam x_1 e x_2 como acima e apliquemos o *teorema do valor médio* à função f no intervalo $[x_1, x_2]$. Portanto, existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Como $f'(c)$ e $(x_2 - x_1)$ são ambos positivos, segue-se que $f(x_2) - f(x_1)$ também é positivo e daí $f(x_2) > f(x_1)$, ou seja, f é crescente. Veja figuras 6.4(a) e 6.4(b).

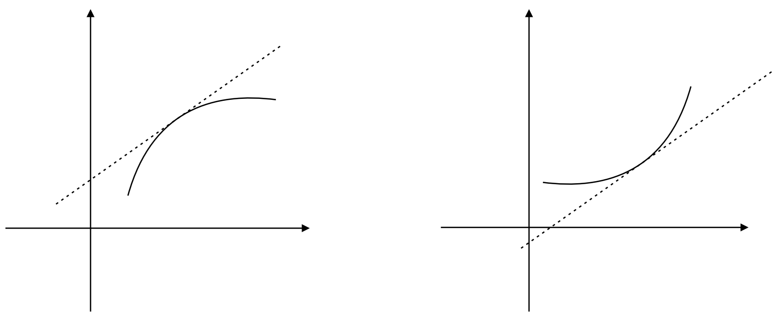

Fig. 6.4(a) Fig. 6.4(b)

3. Se f for uma função derivável em um intervalo I e se $f'(x) < 0$ em todos os pontos no interior do intervalo I, então f será decrescente em I, ou seja, se $x_1, x_2 \in I$ e $x_1 < x_2$, então $f(x_1) > f(x_2)$.

   Para demonstrar tal fato, siga os mesmos passos do que foi feito no item anterior. Observe as figuras 6.5(a) e 6.5(b).

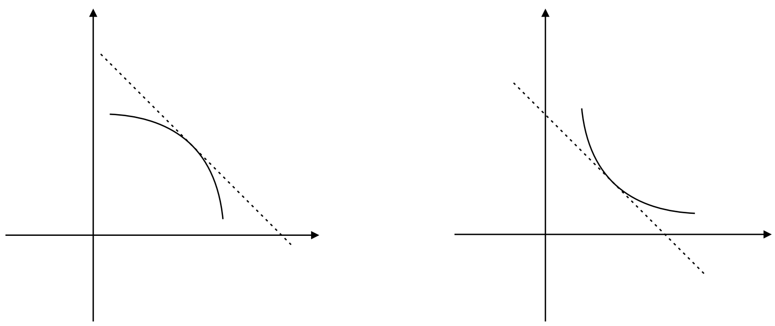

Fig. 6.5(a) Fig. 6.5(b)

4. Observemos que a função pode ser crescente (ou decrescente) e a sua derivada se anular em alguns pontos. Basta considerar a função $f(x) = x^3$, que é crescente, no entanto sua derivada $f'(x) = 3x^2$ se anula no ponto $x = 0$.

3 Extremos locais

Consideremos o gráfico de uma função contínua f em um intervalo fechado $[a, b]$, conforme é mostrado na figura 6.6.

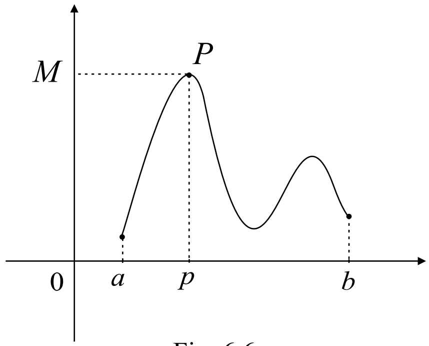

Fig. 6.6

O ponto mais alto do gráfico é atingido no ponto $P = (p, M)$ em que p se encontra no interior (a, b) do intervalo fechado $[a, b]$ e observemos que, de acordo com o gráfico, a derivada de f neste ponto deve ser nula, o que é equivalente a dizer que a reta tangente ao gráfico de f, aí, deve ser horizontal. O ponto mais baixo do gráfico é atingido na extremidade a do intervalo. Outro fato que deve ser destacado é que em alguns pontos o gráfico está em uma posição mais alta ou mais baixa, se nos restringirmos a intervalos pequenos centrados nestes pontos. Isto é traduzido matematicamente dizendo que a função atinge máximo ou mínimo local, o que será formalizado nas definições abaixo.

Seja f uma função definida em um intervalo I. Diz-se que f atinge *máximo local* em um ponto $p \in I$ se existir um número $r > 0$ tal que $f(x) \leq f(p)$, para todo $x \in I$ tal que $x \in (p - r, p + r) \cap I$. Veja figura 6.7.

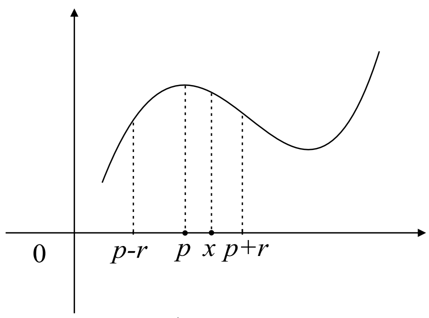

Fig. 6.7

Analogamente, diz-se que f atinge *mínimo local* em um ponto $p \in I$ se existir um número $r > 0$ tal que $f(x) \geq f(p)$, para todo $x \in I$ tal que $x \in (p - r, p + r) \cap I$. Veja figura 6.8.

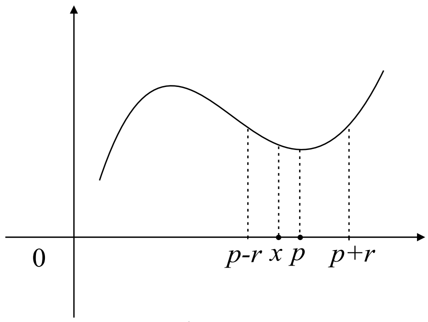

Fig. 6.8

Usa-se o termo *extremo local* para designar tanto o máximo como o mínimo local.

Um ponto de máximo (mínimo) local p é dito estrito se $f(x) < f(p)$ $(f(x) > f(p))$ para todo x nas condições acima.

Devemos observar também que uma função pode atingir vários máximos ou mínimos locais, conforme indicado nas figura 6.9.

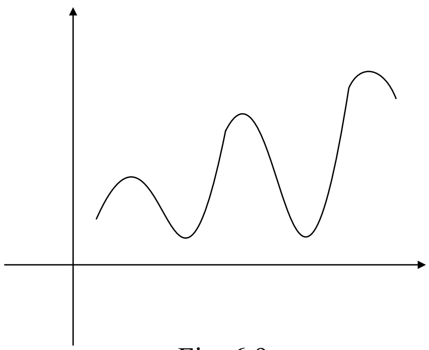

Fig. 6.9

Temos o seguinte teorema.

Teorema 11. *Se f possuir extremo local em um ponto p , então f não será derivável neste ponto ou $f'(p)$ existirá e será igual a zero.*

Geometricamente, a função f deixa de ser derivável em um dado ponto p pertencente ao seu domínio se a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$ ou é vertical ou não está definida. Veja figuras 6.10(a), 6.10(b) e 6.10(c).

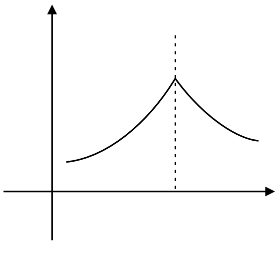

Fig. 6.10(a)

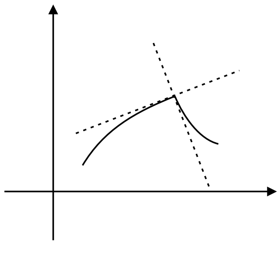

Fig. 6.10(b)

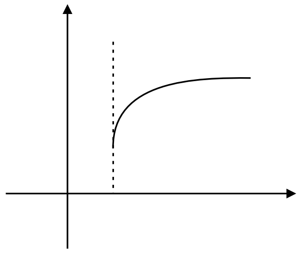

Fig. 6.10(c)

De maneira mais geral do que foi dito anteriormente, diz-se que p é um *ponto crítico* da função f se f não for derivável em p ou $f'(p)$ existir e for igual a zero. O teorema acima nos diz que se a função atingir extremo local em um ponto p, ele será crítico. No entanto, deve-se observar que o ponto pode ser crítico mas não ser extremo, como é o caso do ponto $x = 0$ na função $f(x) = x^3$. Note que $f'(0) = 0$ mas 0 não é ponto nem de máximo nem de mínimo. Veja figura 6.11.

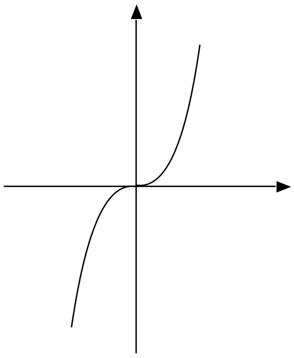

Fig. 6.11

Para decidir se um ponto crítico é de máximo ou de mínimo local podemos nos valer de alguns testes. Exibiremos dois deles.

Teorema 12. (Teste da primeira derivada) *Seja p um ponto crítico de f e suponha que exista $r > 0$ tal que $f'(x) > 0$ se $x \in (p - r, p)$ e $f'(x) < 0$ se $x \in (p, p + r)$, então p é ponto de máximo local. Se $f'(x) < 0$ se $x \in (p - r, p)$ e $f'(x) > 0$ se $x \in (p, p + r)$, então p é ponto de mínimo local.*

Observe as figuras 6.12(a) e 6.12(b) a seguir.

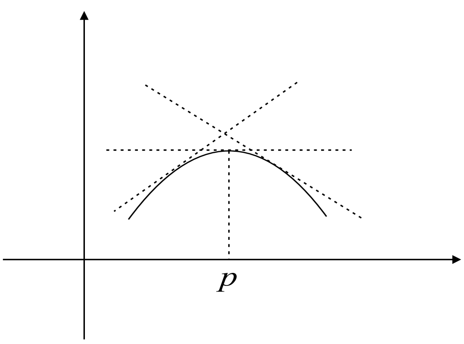

Fig. 6.12(a)

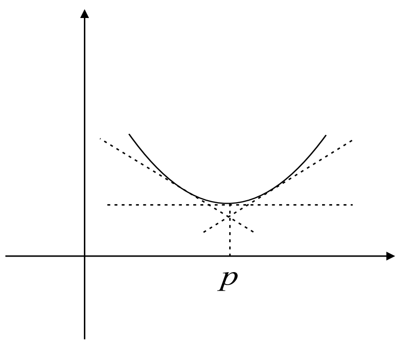

Fig. 6.12(b)

Exemplo 50. Consideremos a função $f(x) = x^2$ definida em toda a reta real $\mathbb{R}$ e observemos que seu único ponto crítico é $x = 0$. Além disso, $f'(x) = 2x$ que é negativa se $x < 0$ e é positiva se $x > 0$, ou seja, antes do ponto crítico a derivada é negativa e depois do ponto crítico a derivada é positiva. Assim, usando o teste da primeira derivada, verifica-se que 0 é ponto de mínimo local. No caso em questão ele é de fato mínimo global e tal função não possui máximo local nem global.

Exemplo 51. A função $f(x) = |x|$ não é derivável apenas em $x = 0$, nos demais pontos, ela é derivável e a derivada é sempre diferente de zero. Deste modo, $x = 0$ é o único ponto crítico de f e, como é fácil de ver, é ponto de mínimo global.

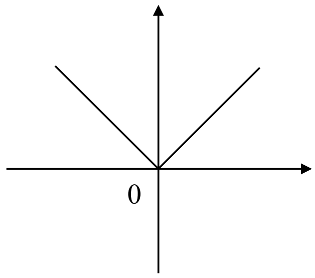

Fig. 6.13

Antes de prosseguirmos com mais exemplos, enunciemos o teste da derivada segunda.

Teorema 13. (Teste da derivada segunda) *Seja p um ponto crítico de f e suponha que $f''(p)$ exista e seja não-nula. Então f possui um extremo local em p. Se $f''(p) > 0$ tal ponto será de mínimo local e se $f''(p) < 0$ tal ponto será de máximo local.*

Observação 6. Se $f''(p) = 0$, a função poderá ter ou não extremo local. Por exemplo, se $f(x) = x^3$, a derivada segunda de f é $f''(x) = 6x$ e assim $f''(0) = 0$ e a função não possui nem máximo nem mínimo local em 0, pois ela é sempre crescente em $\mathbb{R}$. Porém, se considerarmos a função $f(x) = x^4$, teremos que $f''(x) = 12x^2$ e deste modo tem-se que $f''(0) = 0$ e vê-se que 0 é ponto de mínimo estrito (global), pois $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$ se $x \neq 0$. Veja figuras 6.14(a) e 6.14(b).

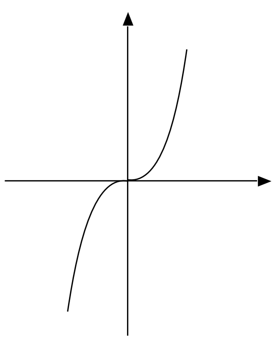

Fig. 6.14(a)

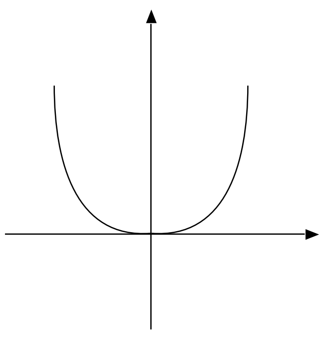

Fig. 6.14(b)

Exemplo 52. Encontremos os extremos locais da função

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3.$$

Inicialmente observemos que essa função é derivável pois é um polinômio. Determinemos seus pontos críticos. Sua derivada é

$$\begin{aligned} f'(x) &= 15x^4 - 15x^2 \\ &= 15x^2(x^2 - 1) \\ &= 15x^2(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

e seus pontos críticos são obtidos fazendo $f'(x) = 0$. Assim, tais pontos são as raízes da equação

$$15x^2(x-1)(x+1) = 0$$

que são $x = -1, 0, 1$. Usemos o teste da derivada segunda. Como

$$f''(x) = 60x^3 - 30x$$

tem-se que

$$f''(-1) = -30 < 0,\ f''(0) = 0,\ f''(1) = 30 > 0$$

Pelo teste da derivada segunda $x = -1$ é ponto de máximo local, ao passo que $x = 1$ é ponto de mínimo local. Como a derivada segunda de f em $x = 0$ se anula, não podemos usar tal teste. No entanto, deve-se observar, analisando a derivada primeira

$$f'(x) = 15x^2(x^2 - 1)$$

que ela é negativa para $-1 < x < 1$, ou seja, a função f é decrescente nesse intervalo, e assim em $x = 0$ a função não atinge nem máximo nem mínimo.

Para concluir, devemos observar que a função em estudo não possui nem máximo nem mínimo global, pois

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \ \text{ e } \ \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

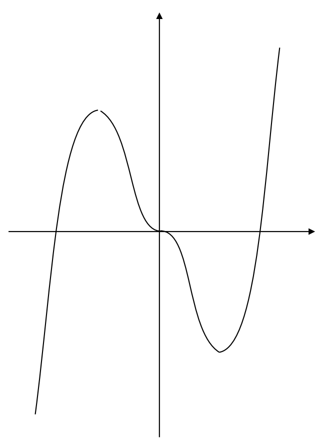

Fig. 6.15

Exemplo 53. Encontremos os extremos globais da função

$$f(x) = x^2 - 4x + 6$$

no intervalo $[-3, 10]$.

Inicialmente, observemos que tal f é contínua no intervalo fechado e limitado $[-3, 10]$. Assim sendo, essa função atinge máximo e mínimo em $[-3, 10]$. Esses extremos são atingidos nos pontos críticos de f que estejam no interior do intervalo $[-3, 10]$ ou em suas extremidades -3 e 10. Calculemos os pontos críticos que estejam situados no interior do intervalo $[-3, 10]$. Como $f'(x) = 2x - 4$ seu único ponto crítico é $x = 2$. Desde que $f''(x) = 2 > 0$ tem-se que tal ponto crítico é de mínimo local. Os outros candidatos a extremo são $x = -3$ e $x = 10$. Como

$$f(-3) = 27, \ f(2) = 2, \ f(10) = 66$$

segue-se que 2 é ponto de mínimo e 10 é ponto de máximo.

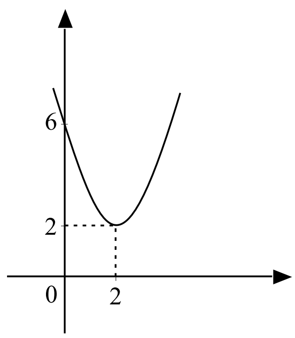

Fig. 6.16

Os dois exemplos acima sugerem certas regras que nos auxiliam na análise do comportamento de funções.

Caso 1. f está definida em toda a reta real $\mathbb{R}$. Nesse caso devemos proceder da seguinte maneira:

1. Determinar os pontos críticos de f.
2. Determinar os valores críticos de f.
3. Determinar o sinal de $f'(x)$ entre os pontos críticos.
4. Determinar os zeros de f.
5. Analisar o comportamento de f quando x tende para $\pm\infty$.

Antes de prosseguirmos, cabe uma observação. Dada uma função $f : I \to \mathbb{R}$ os pontos $x \in I$ tais que $f(x) = 0$ são chamados *zeros* da função f. No caso particular em que f é um polinômio tais zeros são chamados *raízes* de f.

Caso 2. f está definida em um intervalo fechado $[a, b]$.

1. Verifique se f é contínua em $[a, b]$.
2. Se no item 1 a resposta for afirmativa, isso significará que f possuirá extremo global em $[a, b]$.
3. Esses extremos são atingidos ou em pontos críticos de f situados no intervalo aberto (a, b) ou em a ou em b.
4. Determinar os valores críticos de f, ou seja, os valores atingidos por f em seus pontos críticos.
5. Determinar os valores de f nas extremidades a e b.
6. Comparar os valores obtidos nos itens 4 e 5. O maior será o máximo global e o menor o mínimo global.

4 Concavidade e pontos de inflexão

Seja f uma função contínua em um intervalo I e derivável em um ponto p pertencente ao interior de I. Seja $y = T(x)$ a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ em um ponto com abscissa p. Um cálculo elementar mostra que a equação da reta tangente ao gráfico da função f, no ponto $(p, f(p))$, é dada por

$$y = T(x) = f'(p)(x - p) + f(p)$$

Se $f(x) > T(x)$ para $x \in (p - \epsilon, p + \epsilon) - \{p\}$, para algum $\epsilon > 0$, então, para x neste conjunto, o gráfico de $y = f(x)$ está acima da reta tangente ao referido gráfico em p, conforme mostra a figura 6.17.

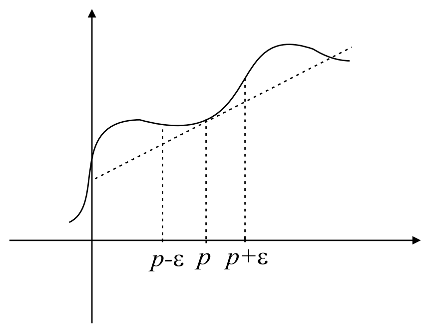

Fig. 6.17

Diz-se então que f é *côncava para cima* em p.

Analogamente, se $f(x) < T(x)$ em um conjunto como acima, teremos que o gráfico de $y = f(x)$ está abaixo da reta tangente ao referido gráfico em p. Vide figura 6.18.

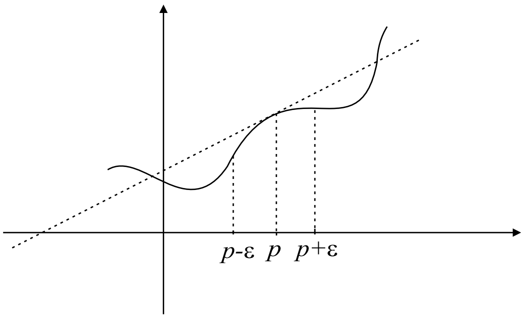

Fig. 6.18

Diz-se então que f é *côncava para baixo*.

Diz-se que p é *ponto de inflexão* do gráfico da função $y = f(x)$ quando existir $\epsilon > 0$ tal que: se $x \in (p - \epsilon, p)$ então $f(x) > T(x)$ e $x \in (p, p + \epsilon)$ então $f(x) < T(x)$ ou $x \in (p - \epsilon, p)$ então $f(x) < T(x)$ e $x \in (p, p + \epsilon)$ então $f(x) > T(x)$. Estas condições nos dizem que p é ponto de inflexão se o gráfico de $y = f(x)$ mudar de concavidade em $(p, f(p))$. Veja as figuras 6.19 onde são ilustradas várias situações que podem ocorrer.

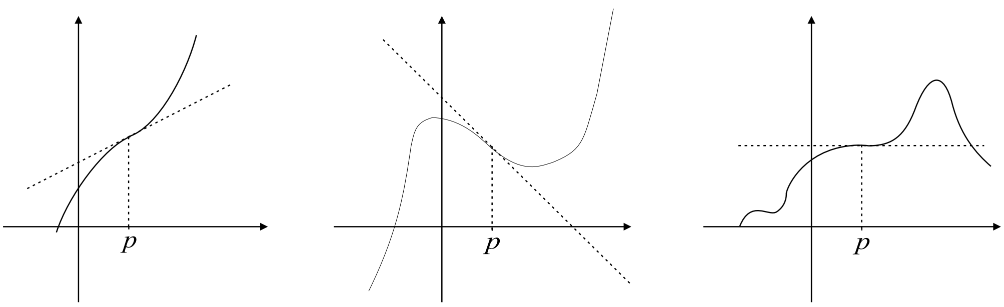

Fig. 6.19(a) Fig. 6.19(b) Fig. 6.19(c)

Pode-se verificar a concavidade do gráfico de uma função usando algumas regras que serão enunciadas a seguir.

Regra 5. Se $f''(p)$ existir e for positiva, então f' será crescente em algum intervalo aberto contendo p, e assim f será côncava para cima em p.

Regra 6. Se $f''(p)$ existir e for negativa, então f' será decrescente em algum intervalo aberto contendo p, e assim f será côncava para baixo em p.

Regra 7. Se f possuir um ponto de inflexão em p, então ou $f''(p)$ não existirá ou $f''(p)$ existirá e será igual a zero.

Regra 8. Suponhamos que f'' exista em um conjunto da forma $(p-\epsilon, p+\epsilon) - \{p\}$, para algum $\epsilon > 0$, que ou $f''(p)$ não exista ou $f''(p)$ exista e seja igual a zero e que f'' mude de sinal ao passar por p. Então p é ponto de inflexão de f.

Regra 9. Se $f''(p) = 0$ e se a terceira derivada $f'''(p)$ existir e for diferente de zero, então p será ponto de inflexão de f.

Exemplo 54. Encontremos os ponto de inflexão e analisemos a concavidade da função

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 4.$$

Observemos que $f''(x)$ existe, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. Portanto, pela Regra 3, os candidatos a pontos de inflexão de f são as raízes da equação

$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$$

que são os pontos $x = 0$ e $x = 1$. Pelas Regras 1 e 2, f é côncava para cima no intervalo $(-\infty, 0)$ pois $f''(x) > 0$ se $x < 0$, côncava para baixo no intervalo $(0, 1)$, pois $f''(x) < 0$ se $0 < x < 1$, e côncava para cima no intervalo $(1, +\infty)$, pois $f''(x) > 0$ se $x > 1$. Portanto, $x = 0$ e $x = 1$ são ambos pontos de inflexão de f.

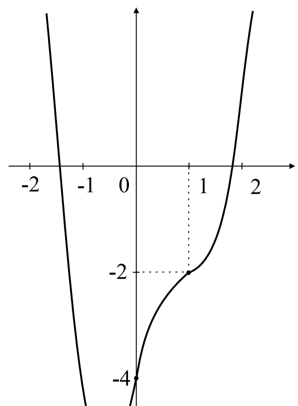

Fig. 6.20

5 Exercícios resolvidos

1. Verifique se é possível aplicar o teorema de Rolle à função $f(x) = x^2 - 2x - 3$ no intervalo $[-1, 3]$.

Solução. Inicialmente observemos que f é contínua em $[-1, 3]$ e derivável no intervalo aberto $(-1, 3)$. Na verdade, f é derivável no intervalo fechado $[-1, 3]$ sendo que em -1 pode-se calcular apenas a derivada lateral à direita, ao passo que em 3 é possível apenas calcular a derivada lateral à esquerda. Além disso, $f(-1) = f(3) = 0$. Fazendo $f'(x) = 0$, obtemos $x = 1$. Assim, $f'(1) = 0$ e $-1 < 1 < 3$.

2. Verifique que o teorema de Rolle não se aplica à função

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 1}$$

em $[-2, 3]$.

Solução. Basta observar que a função não está definida em $x = 1$ e $1 \in [-2, 3]$. Logo, no intervalo $[-2, 3]$, o teorema de Rolle não é aplicável.

3. Verifique se o teorema de Rolle se aplica à função $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}}$ no intervalo $[0, 8]$.

Solução. Inicialmente observemos que f é contínua em $[0, 8]$ e derivável em $(0, 8)$ (f não é derivável em 0). Também, $f(0) = f(8) = 0$ e então o teorema de Rolle se aplica. Desde que $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ fazendo $f'(x) = 0$, encontramos $x = 1$, o qual está entre 0 e 8.

4. Aplique o teorema do valor médio à função $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ no intervalo $[2, 5]$.

Solução. Inicialmente observemos que a função f é derivável no intervalo $[2, 5]$. Além disso, $f'(x) = 6x - 5$. Pondo

$$6c - 5 = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{51 - 3}{3} = 16$$

de modo que $c = \frac{7}{2}$, o qual está entre 2 e 5.

6 Exercícios propostos

1. A função f é côncava para cima em p se ela possuir mínimo local estrito em p e côncava para baixo em p se ela possuir máximo local estrito em p. Verdadeiro ou falso?

2. Encontre os pontos de inflexão e analise a concavidade da função

$$y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 2x + 2.$$

3. Encontre os pontos de inflexão e analise a concavidade da função

$$y = f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 3a^2}$$

em, que a é uma constante.

4. Para que valores de c a função $y = x^3 + cx^2 + 1$ possui um ponto de inflexão em $x = 1$.

5. Consideremos a função

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 1.$$

Determine:

(a) Os pontos críticos de f.

(b) Os pontos que anulam $f''(x)$.

(c) Os pontos críticos que são de máximo ou de mínimo.

(d) Os pontos de inflexão de f.

6. Determine as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão da função

$$y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12.$$

7. Prove que toda função polinomial da forma

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ com } a \neq 0$$

possui um único ponto de inflexão e determine sua abscissa.

7 Respostas dos exercícios propostos

1. Falso. Tome, por exemplo,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ x-1 & \text{se} \quad x > 1 \\ -x-1 & \text{se} \quad x < -1 \end{cases}$$

   e $p = 0$.

2. $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ são pontos de inflexão de f. No intervalo $(-\infty, -\frac{1}{2})$ f é côncava para cima, no intervalo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ f é côncava para baixo e no intervalo $(\frac{1}{2}, +\infty)$ f é côncava para cima.

3. Se $a = 0$ então f não tem pontos de inflexão e não é côncava para baixo e nem para cima em nenhum intervalo. Se $a \neq 0$ então 0, $-3a$ e $3a$ são os pontos de inflexão de f. Se $a > 0$ então f é côncava para cima em $(-\infty, -3a)$, é côncava para baixo em $(-3a, 0)$, é côncava para cima em $(0, 3a)$ e é côncava para baixo em $(3a, +\infty)$. Se $a < 0$ então f é côncava para cima em $(-\infty, 3a)$, é côncava para baixo em $(3a, 0)$, é côncava para cima em $(0, -3a)$ e é côncava para baixo em $(-3a, +\infty)$.

4. -3

5. (a) 1, $\frac{5}{2}$
   (b) 1, 2
   (c) $\frac{5}{2}$
   (d) 1, 2

6. 1

7. A segunda derivada função $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ é dada por $f''(x) = 6ax + 2b$. Essa segunda derivada tem um único zero, a saber, $-\frac{b}{3a}$. Além disso, f'' é uma função afim, logo ela tem sinais contrários nos intervalos $(-\infty, -\frac{b}{3a})$ e $(-\frac{b}{3a}, +\infty)$, o que implica que a concavidade de f nesses intervalos tem nomes contrários. Portanto, $-\frac{b}{3a}$ é o único ponto de inflexão de f.

Nesta aula você aprendeu:

- o teorema do valor médio e algumas aplicações;
- a determinar os pontos de máximo e de mínimo de certas funções.
- a determinar a concavidade e os pontos de inflexão de certas funções.

8 Apêndice

Michel Rolle

Michel Rolle foi um matemático francês, nascido em Ambert, Basse-Auvergne, a 21 de abril de 1652 e falecido em Paris, a 8 de novembro de 1719. Rolle possuía uma pequena educação formal, sendo, principalmente, um autodidata. Inicialmente, ele trabalhou em Ambert e vizinhanças como assistente de advogados, e em 1675 dirigiu-se a Paris, onde trabalhou como escriturário e especialista em Aritmética.

Foi eleito para a Academia Real de Ciências, em 1685, e tornou-se Pensionnaire Géometre da Academia em 1699.

Rolle trabalhou em Análise Diofantina, Álgebra e Geometria e publicou um trabalho, *Traité d'algèbre*, sobre a teoria das equações. No entanto, ele é mais conhecido pelo *Teorema de Rolle*, enunciado nesta aula, que foi inicialmente publicado, em 1691, em um livro pouco divulgado.