Aula 7

Aplicações da derivada

Objetivos

- Aplicar a derivada em problemas de taxas relacionadas.
- Aplicar a derivada em problemas de otimização.
- Aplicar a derivada em construção de gráficos de funções.

Esta aula será dedicada ao estudo de várias aplicações práticas do conceito de derivada, o que servirá de amostra da importância do Cálculo Diferencial na análise de questões oriundas da Física, Economia, etc.

1 Taxas relacionadas

Começaremos as aplicações com as chamadas *Taxas Relacionadas.* Nesses problemas são dadas as taxas de variação de uma determinada quantidade com respeito a uma certa variável (usualmente o tempo) e pede-se para determinar a taxa de variação daquela quantidade com respeito a outra variável. Neste ponto, devemos relembrar que a entidade matemática que mede taxas de variação é exatamente a derivada. Veja aula 5.

O que foi dito acima será perfeitamente entendido por meio dos exemplos que serão exibidos a seguir.

Exemplo 55. Consideremos um círculo de raio r e designemos por A a sua área. Suponhamos que r cresça com o tempo t. Observemos que $A = \pi r^2$ e sendo r uma função do tempo t teremos que A também depende de t e assim podemos calcular a taxa de variação de A com relação ao tempo t. Para isso usaremos a *regra da cadeia* que nos fornece

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}\,.$$

Suponhamos que, em certo instante, o raio seja igual a 5 cm e esteja crescendo a uma taxa de 10 cm/s. Podemos, então, determinar a taxa de variação da área A com relação ao tempo nesse instante, por meio da expressão acima, para obter

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt}$$

e assim

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi 5 \cdot 10\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{s} = 100\pi\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}^2$$

Exemplo 56. Um tanque cilíndrico de raio igual a 10 m está sendo abastecido com água a razão de $314m^3/min$. Encontremos a taxa de variação da altura da água.

Solução. Seja V o volume de água contida no tanque, no tempo t. Então $V = \pi(10)^2 h$. Assim,

$$\frac{dV}{dt} = 100\pi \cdot \frac{dh}{dt}$$

Como $\dfrac{dV}{dt} = 314\,\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$, teremos que $314 = 100\pi \cdot \dfrac{dh}{dt}$ e daí $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{314}{100\pi}$ e aproximando π por 3,14 obtém-se que $\dfrac{dh}{dt} = 1$. Portanto, a altura da água está crescendo a uma taxa de 1 m/min.

Exemplo 57. Um foguete está subindo verticalmente com velocidade inicial de 400 m/s. Sua altura s, após t segundos, é dada por $s = 400t - 16t^2$. Encontremos a taxa de variação da distância do foguete a um observador que se encontra no solo a uma distância de 1800 m do local de lançamento, quando o foguete encontra-se subindo e está a 2400 m do local de lançamento.

Seja u a distância do foguete ao observador, conforme figura 7.1.

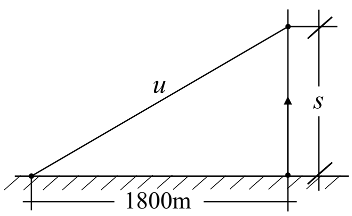

Fig. 7.1

Usando o teorema de Pitágoras, obtém-se $u^2 = s^2 + (1800)^2$. Portanto, $2u\dfrac{du}{dt} = 2s \cdot \dfrac{ds}{dt}$, e assim

$$u \cdot \frac{du}{dt} = s \cdot \frac{ds}{dt}.$$

Quando $s = 2400$, temos que $u^2 = (2400)^2 + (1800)^2$, logo $u = 3000$. Desde que $s = 400t - 16t^2$, quando $s = 2400$, tem-se que $2400 = 400t - 16t^2$, ou seja, $t^2 - 25t + 150 = 0$, ou ainda $(t-10)(t-15) = 0$. Assim, o foguete está a 2400 m do solo quando $t = 10\,\mathrm{s}$. Mas, $\dfrac{ds}{dt} = 400 - 32\,t$. Logo, quando $t = 10\,\mathrm{s}$, $\dfrac{ds}{dt} = 400 - 32.10 = 80$. Substituindo em $u \cdot \dfrac{du}{dt} = s \cdot \dfrac{ds}{dt}$, obtemos $3000 \cdot \dfrac{du}{dt} = 2400 \cdot 80$, de onde segue que $\dfrac{du}{dt} = 64$. Então a distância do foguete ao observador cresce a uma taxa de 64 m/s quando $t = 10\,\mathrm{s}$.

Exemplo 58. Um objeto se move ao longo do gráfico de $y = f(x)$. Em um certo ponto, a inclinação da reta tangente à curva é $\dfrac{1}{2}$ e a abscissa x do objeto está decrescendo a uma taxa de 3 unidades por segundo. Naquele ponto, qual a velocidade com que a ordenada y está variando?

Como $y = f(x)$, usando a regra da cadeia, teremos

$$\frac{dy}{dt} = f'(x) \cdot \frac{dx}{dt}$$

Desde que $f'(x)$ é igual a $\dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{dx}{dt} = -3$, no ponto em questão, segue-se que $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2} \cdot (-3) = -\dfrac{3}{2}$.

Exemplo 59. Uma partícula está movendo-se ao longo da curva $y = x^2 + 2x$. Em qual (ou quais) ponto (ou pontos) as coordenadas x e y da partícula se deslocam com a mesma taxa de variação?

Temos que

$$\frac{dy}{dt} = 2x \cdot \frac{dx}{dt} + 2 \cdot \frac{dx}{dt}$$

Quando $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dx}{dt}$ teremos $2x + 2 = 1$, logo $2x = -1$. Portanto, $x = -\dfrac{1}{2}$ e $y = -\dfrac{3}{4}$.

Exemplo 60. Dois lados de um triângulo medem 15 cm e 20 cm. Com que velocidade o terceiro lado está crescendo quando o ângulo α entre os lados dados acima mede 60° e está crescendo a uma velocidade de 2° por segundo?

Designemos por x a medida do terceiro lado do triângulo. Usando a lei dos cossenos,

$$x^2 = (15)^2 + (20)^2 - 2 \cdot 15 \cdot 20 \cdot \cos\alpha$$

Portanto, $2x\,\dfrac{dx}{dt} = 600\,(\operatorname{sen}\alpha)\,\dfrac{d\alpha}{dt}$, ou seja, $x\,\dfrac{dx}{dt} = 300\operatorname{sen}\alpha\,\dfrac{d\alpha}{dt}$. Como foi dito $\dfrac{d\alpha}{dt} = 2\left(\dfrac{\pi}{180}\right) = \dfrac{\pi}{90}$rad/s. (Observemos que devemos transformar a medida do ângulo para radiano.) Quando $\alpha = 60°$, temos que $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$, logo $x^2 = 225 + 400 - 600\,\dfrac{1}{2} = 325, x = 5\sqrt{13}$. Portanto, $5\sqrt{13} \cdot \dfrac{dx}{dt} = 300 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\dfrac{\pi}{90}\right)$. Assim $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\pi}{\sqrt{39}}$cm/s.

2 Problemas de otimização

Outro tipo de problema que mostra a utilidade prática da derivada são os chamados *problemas de otimização* que consistem, grosso modo, em determinar máximos e mínimos de funções. Os exemplos a seguir e os exercícios propostos darão ao estudante uma excelente idéia dos tipos de questões que podem ser abordadas usando técnicas de derivação desenvolvidas nas aulas precedentes.

Exemplo 61. Dentre todos os retângulos de mesmo perímetro, determinemos o de maior área.

Sejam x e y as dimensões de um retângulo cujo perímetro P seja fixado. Assim, $2x + 2y = P$ e sua área A é dada por $A = xy$. Explicitando y em função de x, obtemos $y = \dfrac{P - 2x}{2}$ e daí

$$A = x\,\frac{P - 2x}{2} = \frac{1}{2}x(P - 2x)$$

ou seja, A é uma função da variável x que satisfaz $0 < x < P/2$. De $A(x) = \frac{1}{2}(Px - 2x^2)$ obtém-se $A'(x) = \frac{1}{2}(P - 4x)$ e $A''(x) = -2$. Desse modo, o único ponto crítico da função $A(x)$, $x = \frac{P}{4}$, é ponto de máximo pois $A''(x) < 0$. Sendo $x = \frac{P}{4}$ segue-se que $y = \frac{P}{4}$, de onde se conclui que, dentre todos os retângulos de perímetro fixado, o que envolve a maior área é o quadrado.

Exemplo 62. Uma página impressa deve conter $60\,\mathrm{cm}^2$ de matéria impressa. As margens laterais devem medir $5\,\mathrm{cm}$ e as margens superior e inferior devem medir $3\,\mathrm{cm}$. Vamos determinar as dimensões do material impresso a fim de minimizar a área do papel a ser usado.

Sejam x e y, respectivamente, as dimensões do material impresso, conforme está indicado na figura 7.2.

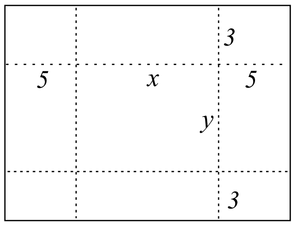

Fig. 7.2

Assim, $xy = 60$. A quantidade total de papel é dada por $A = (x+10)(y+6) = (x+10)(\frac{60}{x}+6) = 6(10+x+\frac{100}{x}+10) = 6(20+x+\frac{100}{x})$, em que x é um número positivo qualquer. Como $A'(x) = 6(1-\frac{100}{x^2})$, o único ponto crítico desta função é $x = 10$, pois x assume apenas valores positivos. Além disso, $A''(x) = \frac{1200}{x^3}$, que é sempre positiva em virtude de $x > 0$. Então $x = 10$ é ponto de mínimo absoluto pois é o único ponto crítico de A. Daí, como $xy = 60$ segue-se que $y = 6$. Portanto, as dimensões que produzem o mínimo de papel a ser utilizado são $x = 10$cm e $y = 6$cm.

Exemplo 63. Encontremos dois números não-negativos x e y cuja soma seja 300 e para os quais x^2y é máximo.

Por hipótese temos que $x + y = 300$. O produto $P = x^2y$ pode ser escrito em função apenas de x como $P(x) = x^2(300-x) = 300x^2 - x^3$, pois $y = 300 - x$. Desse modo, $0 \leq x \leq 300$ e como a função P é contínua ela atinge máximo e mínimo no intervalo $[0, 300]$. Tais extremos são atingidos ou em $x = 0$ ou em $x = 300$ ou no(s) ponto(s) crítico(s) de P que esteja(m) contido(s) no intervalo aberto $(0, 300)$. Determinemos o(s) ponto(s) crítico(s) de P. Temos que $P'(x) = 600x - 3x^2$. Assim, o único ponto crítico de P no intervalo $(0, 300)$ é $x = 200$. Observemos que $x = 0$ também anula a primeira derivada de P. No entanto, estamos interessados apenas naqueles pontos que estejam no intervalo aberto $(0, 300)$. Testemos os valores de P nos pontos 0, 200, 300.

x	0	200	300
$P(x)$	0	$4 \cdot 10^6$	0

Segue-se daí que o valor máximo de P é $4 \cdot 10^6$ e é atingido em $x = 200$ e o correspondente valor de y é 100.

Exemplo 64. Um retângulo é inscrito na elipse

$$\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{225} = 1$$

com seus lados paralelos aos eixos da elipse. Veja Fig. 7.3.

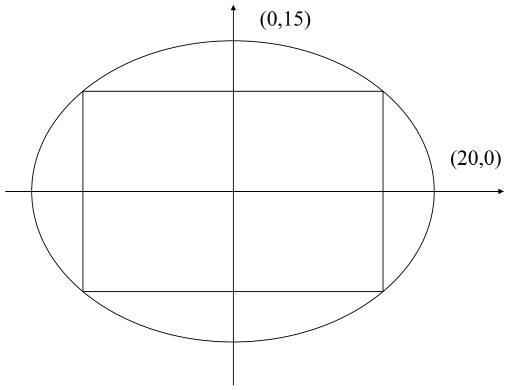

Fig. 7.3

Encontremos as dimensões do retângulo de perímetro máximo que pode ser assim inscrito.

Consideremos (x, y) um ponto do primeiro quadrante e y como função de x. Derivando ambos os membros da equação da elipse com relação a x, tomando y como função de x, obtemos

$$\frac{x}{200} + \frac{2y}{225}\frac{dy}{dx} = 0,$$

em que usamos a regra da cadeia para derivar y^2, considerando y como função de x. Portanto,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{9x}{16y}$$

Como o perímetro P é dado por $P = 4x + 4y$, tem-se que

$$\frac{dP}{dx} = 4 + 4\frac{dy}{dx} = 4(1 - \frac{9x}{16y}) = 4\frac{16y - 9x}{16y}.$$

Também, $\dfrac{d^2P}{dx^2} = -\dfrac{9}{4}\dfrac{\left[y - x\left(\dfrac{-9x}{16y}\right)\right]}{y^2} = -\dfrac{9}{4}\,\dfrac{16y^2 + 9x^2}{16y^3} < 0$. Resolvendo $\dfrac{dP}{dx} = 0$ obtemos $16y = 9x$ e então, substituindo na equação da elipse, encontramos $x^2 = 256$, de onde segue que $x = 16$ e $y = 9$. Desde que a segunda derivada de f é negativa, este único ponto crítico produz o perímetro máximo.

Exemplo 65. Encontre um número positivo x que excede seu quadrado pelo maior valor possível.

Devemos analisar a função $f(x) = x - x^2$ em que x é um número positivo. Então $f'(x) = 1 - 2x$ e $f''(x) = -2$. Portanto, o único ponto crítico de f é $x = \frac{1}{2}$. Desde que a derivada segunda é negativa, seu único ponto crítico produz um máximo absoluto.

Exemplo 66. Duas cidades A e B estão, respectivamente, a a km e a b km de uma estrada, conforme figura 7.4.

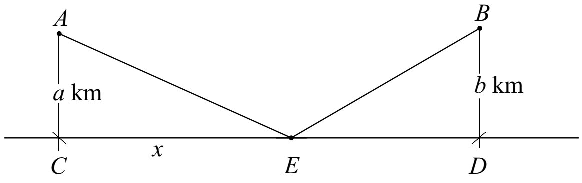

Fig. 7.4

Os pontos C e D sobre a estrada são os que estão mais próximos de A e B, respectivamente, e estão a uma distância de c km um do outro. Uma estação E está localizada na estrada de modo que a soma das distâncias de A e B a E é mínima. Encontre a posição de E.

Seja x a distância de E a C. Então a soma das distâncias de A e B a E é dada pela função $f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c-x)^2}$. Portanto,

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}\,.$$

Fazendo $f'(x) = 0$ obtemos

$$x = \frac{ac}{a+b}\,.$$

Para verificar que tal valor produz um mínimo global, calculemos $f''(x)$. Um cálculo simples, porém longo, nos dá

$$f''(x) = \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{b^2}{[b^2 + (c-x)^2]^{3/2}}$$

que é positivo. Então, o ponto crítico obtido é de mínimo.

3 Traçado de gráficos

Dada uma função, é interessante e instrutivo representá-la graficamente por meio de uma curva plana constituída por pontos da forma $(x, f(x))$, em que x pertence ao domínio da função f. Essa representação é importante pois, por meio dela, pode-se fazer a análise do comportamento de f, ou seja, quando ela cresce ou decresce, seus pontos de máximo e de mínimo, seu comportamento em $+\infty$ e $-\infty$, determinação de assíntotas, etc. Pode-se dizer que o gráfico de f é a sua fotografia, compreendida até mesmo por pessoas que nunca tenham estudado Cálculo.

Para o traçado de gráficos, estabeleceremos algumas passos que, muito embora não sejam algo dogmático, ajudarão o aluno, principalmente o iniciante, a ter sucesso neste desiderato. Desde já, aconselhamos o estudante a resolver o maior número possível de exemplos, pois é por meio deles que se ganha excelência neste assunto.

Eis os passos para traçarmos o gráfico de uma função $y = f(x)$.

Passo 1. Caso zero pertença ao domínio de f, calcule $f(0)$, ou seja, determine o ponto em que o gráfico de f intersecta o eixo oy.

Passo 2. Determine, se possível, os pontos nos quais o gráfico de f intersecta o eixo ox. Tais pontos são chamados zeros de f. Deve-se observar que nem sempre tal empreitada é simples ou até mesmo possível.

Passo 3. Determine $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Passo 4. Caso a não pertença ao domínio de f, mas seja extremidade de intervalos que compõe o domínio, calcule os limites laterais de f em a.

Passo 5. Determine, caso existam, as assíntotas do gráfico de f. Isto acontece normalmente quando f possui alguma singularidade.

Passo 6. Calcule a derivada $f'(x)$.

Passo 7. Determine os pontos críticos de f, ou seja, os valores de x tais que $f'(x) = 0$.

Passo 8. Determine os intervalos onde f cresce e onde ela decresce. Para isto, deve-se determinar os valores de x para os quais $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$.

Passo 9. Determine $f''(x)$.

Passo 10. Determine os pontos x tais que $f''(x) = 0$.

Passo 11. Determine os valores de x para os quais $f''(x) > 0$ ou $f''(x) < 0$. Dessa maneira encontraremos as regiões de concavidade da curva.

Exemplo 67. Consideremos o trinômio do segundo grau

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ onde } a \neq 0$$

e tracemos seu gráfico.

Seguindo o roteiro acima, temos que $f(0) = c$ e assim o gráfico de f intersecta o eixo oy no ponto $(0, c)$. Verifiquemos o comportamento de f em $-\infty$ e $+\infty$. Para isto, observemos que $f(x)$ pode ser escrita como

$$f(x) = x^2 \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} \right)$$

e desde que $\dfrac{b}{x}$ e $\dfrac{c}{x^2}$ tendem a zero quando $x \to \pm\infty$ teremos que

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty \ \text{ se } \ a > 0$$

ou

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty \ \text{ se } \ a < 0.$$

A derivada de f é $f'(x) = 2ax + b$. Portanto, o único ponto crítico de f é $x = -\dfrac{b}{2a}$, ou seja, tal ponto é o único que anula a derivada de f.

Estudemos o sinal de $f'(x)$. Suponhamos, inicialmente, que $a > 0$. Assim, $f'(x) = 2ax + b > 0$ se, e somente se, $x > -\dfrac{b}{2a}$, ou seja, f é crescente no intervalo $(-\dfrac{b}{2a}, +\infty)$. Analogamente, prova-se que f é decrescente em $(-\infty, -\dfrac{b}{2a})$. Daí, conclui-se que o único ponto crítico $-\dfrac{b}{2a}$ é de mínimo. Se $a < 0$ tem-se que tal ponto crítico é de máximo. Se quiséssemos usar o teste da derivada segunda, teríamos que calcular $f''(x) = 2a$. Essa derivada será positiva se $a > 0$ e, neste caso, o ponto crítico será de mínimo, pois $f''(x) > 0$, e se $a < 0$ o ponto crítico será de máximo pois $f''(x) < 0$. O valor do máximo (ou mínimo) é dado por

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\,.$$

Os possíveis perfis do gráfico de f são esboçados nas figuras 7.5 a seguir.

$a > 0$ e b^2- $4ac < 0$

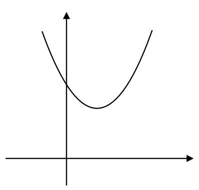

Fig. 7.5(a)

$a > 0$ e b^2- $4ac = 0$

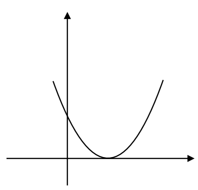

Fig. 7.5(b)

$a > 0$ e b^2- $4ac > 0$

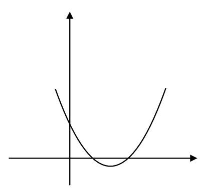

Fig. 7.5(c)

$a < 0$ e b^2- $4ac < 0$

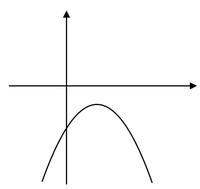

Fig. 7.5(d)

$a < 0$ e b^2- $4ac = 0$

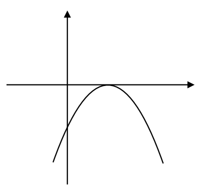

Fig. 7.5(e)

$a < 0$ e b^2- $4ac > 0$

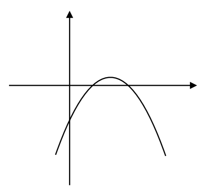

Fig. 7.5(f)

Exemplo 68. Consideremos a função

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

que, evidentemente, está definida somente para valores de x que sejam diferentes de zero. Claramente, $f(x) > 0$ se $x > 0$ e $f(x) < 0$ se $x < 0$ e assim o gráfico de tal função estará contido nos primeiro e terceiro quadrantes. Verifiquemos o comportamento de f nas proximidades de $x = 0$.

Quando $x \to 0^+$ teremos que $\frac{1}{x} \to +\infty$. Analogamente, se $x \to 0^-$ teremos que $\frac{1}{x} \to -\infty$.

Também,

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Dessas observações segue-se que os eixos coordenados ox e oy são assíntotas do gráfico de f.

A derivada de f é dada por $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ e assim f não possui pontos críticos, sendo decrescente nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$.

Para analisarmos a concavidade de f, usamos a sua derivada segunda que é dada por $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$ e daí f é côncava para cima se $x > 0$ e côncava para baixo se $x < 0$.

Do desenvolvido acima chega-se à conclusão de que o gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é representado pela figura 7.6 a seguir.

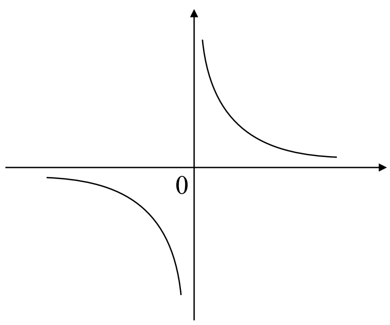

Fig. 7.6

Exemplo 69. Consideremos a função

$$f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Inicialmente observemos que $f(0) = 0$, o que nos diz que o gráfico de f passa pela origem $(0, 0)$.

Analisemos o comportamento de f no infinito, ou seja, calculemos $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$. Para isto, devemos observar que, se fizéssemos o limite do numerador e denominador da função, chegaríamos a uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Para levantarmos esta indeterminação, escrevamos a função f na seguinte forma

$$f(x) = \frac{\dfrac{2}{x}}{\dfrac{1}{x^2} + 1}$$

que é obtida dividindo-se o numerador e o denominador da função por x^2, que é o termo de maior potência entre o numerador e o denominador de f. Segue-se então que, quando x tende para $\pm\infty$, o numerador tende a zero e o denominador tende a 1, e a indeterminação desaparece. Então

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0.$$

Calculemos a derivada de f para analisarmos os pontos críticos e as regiões de crescimento e de decrescimento de f. Utilizando as regras usuais de derivação, obtemos

$$f'(x) = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

de onde resulta que os pontos críticos de f são $x = \pm 1$.

Se $-\infty < x < -1$, a derivada $f'(x) < 0$ pois para estes valores o numerador da derivada é negativo e o denominador é sempre positivo. Assim, f é decrescente no intervalo $(-\infty, -1)$. Já no intervalo $-1 < x < 1$ a função é crescente pois o numerador $2 - 2x^2$ da função é positivo. No intervalo $1 < x < +\infty$ a função é decrescente, e então $x = -1$ é ponto de mínimo e $x = 1$ é ponto de máximo.

Calculemos a derivada segunda de f. Usando as regras de derivação e após as devidas simplificações, obtém-se

$$f''(x) = \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

e constata-se que esta derivada segunda se anula nos pontos $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ e $x = -\sqrt{3}$. Verifica-se facilmente que:

(i) Se $x < -\sqrt{3}$, então $f''(x) < 0$ e assim f é côncava para baixo neste intervalo.

(ii) Se $-\sqrt{3} < x < 0$, então $f''(x) > 0$ e assim f é côncava para cima neste intervalo.

(iii) Se $0 < x < \sqrt{3}$, então $f''(x) < 0$ e assim f é côncava para baixo neste intervalo.

(iv) Se $\sqrt{3} < x$, então $f''(x) > 0$ e assim f é côncava para cima neste intervalo.

Logo, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ e $x = -\sqrt{3}$ são pontos de inflexão.

De posse destas informações temos que o gráfico de f é como na figura 7.7, a seguir.

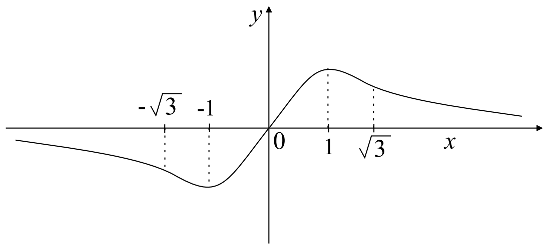

Fig. 7.7

Exemplo 70. Introduzindo uma Equação Diferencial.

Neste exemplo anteciparemos o estudo das *Equações Diferenciais* exibindo um estudo preliminar das chamadas *Pontes Suspensas.*

Para construir uma ponte suspensa, constroem-se duas torres e pendura-se um cabo entre elas. Desse cabo prende-se um grande número de cabos verticais que são usados para segurar a ponte propriamente dita. A ponte é praticamente horizontal e seu peso é muito grande comparado com o peso total dos vários cabos que a sustentam. Em virtude disso, desprezaremos o peso desses cabos no modelo que iremos estudar.

Nosso objetivo é determinar a forma do cabo principal da ponte suspensa. Desde que a forma geométrica do cabo principal é simétrica com relação ao seu ponto mais baixo, consideraremos o eixo vertical oy passando por este ponto, e em virtude da simetria consideraremos somente a parte direita do cabo correspondente ao intervalo $[0, x]$. Veja figura 7.8

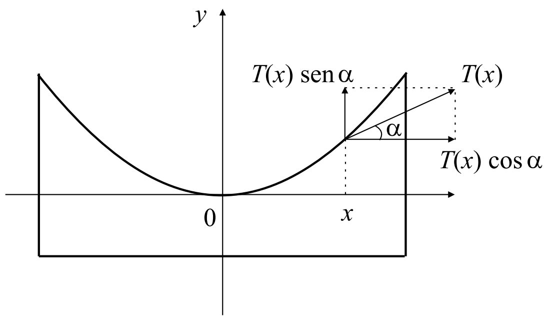

Fig. 7.8

Considerando que a ponte esteja em equilíbrio, ou seja, não haja oscilação, a resultante das forças que agem sobre ela é nula. Seja $T(0)$ a tensão atuando sobre o cabo no ponto 0, conforme a figura. Desde que esse é o ponto mais baixo do cabo principal, $T(0)$ deve ser horizontal. Seja $T(x)$ a tensão atuando no ponto do cabo correspondente ao ponto de abscissa x. Esta tensão puxa o cabo para cima e para a direita ao longo da tangente ao cabo, fazendo um ângulo α com a horizontal, de acordo com a figura. As componentes horizontais e verticais da tensão $T(x)$ são dadas, respectivamente, por

$$T(x)\cos\alpha \;\text{ e }\; T(x)\,\mathrm{sen}\,\alpha.$$

Admitamos que o peso da ponte seja uniformemente distribuída de modo que, se ρ for a densidade de massa da ponte, tem-se que o trecho correspondente ao intervalo $[0,x]$ terá peso ρx. Conseqüentemente, em virtude de termos equilíbrio da ponte, chega-se às equações

$$T(0) = T(x)\cos\alpha \;\text{ e }\; \rho x = T(x)\,\mathrm{sen}\,\alpha.$$

Relembrando o fato básico e essencial de que a derivada é representada geometricamente pela inclinação da reta tangente ao gráfico da função, tem-se

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}\,\alpha.$$

Das equações precedentes, obtém-se

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\dfrac{\rho x}{T(x)}}{\dfrac{T(0)}{T(x)}} = \frac{\rho}{T(0)}x.$$

Temos, então, uma equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho}{T(0)}x$$

que é uma equação cuja incógnita é uma função, no caso a função $y = y(x)$, que nos fornece o perfil do cabo principal. Ora, usando as regras de derivação previamente estudadas, tem-se que uma função que satisfaz tal equação diferencial é

$$y = \frac{\rho}{2T(0)}x^2 + h_0$$

em que h_0 é uma constante arbitrária. Na verdade, provaremos mais adiante que todas as soluções da equação diferencial estudada são dessa forma.

4 Exercícios resolvidos

1. O *problema da reflexão da luz* (Descartes). Consideremos um espelho plano, uma fonte luminosa S e um observador postado em um ponto O, conforme figura 7.9.

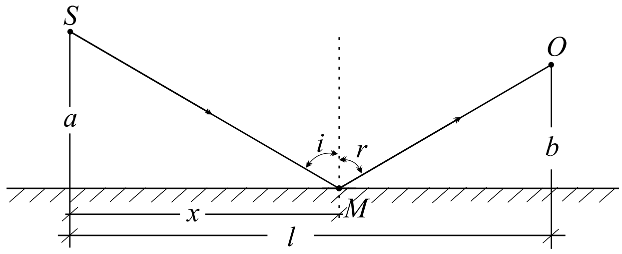

Fig. 7.9

Determinar a posição do ponto M em que o raio luminoso, emitido de S, deverá atingir o espelho para então seguir até o observador O, admitindo que a luz siga a trajetória mais curta.

Solução. Devemos observar que a, b e l são dados do problema, conforme figura 7.8, e procuraremos determinar a posição do ponto M a partir do valor de x. Inicialmente observemos que a distância total percorrida pela luz, de S até O, é dada por

$$d(x) = SM + MO = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (l - x)^2}.$$

Daí,

$$d'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{l - x}{\sqrt{b^2 + (l - x)^2}}$$

e os pontos críticos de d são obtidos fazendo-se $d'(x) = 0$, o que nos fornece a igualdade

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{l - x}{\sqrt{b^2 + (l - x)^2}}\,. \tag{7.1}$$

Calculemos o valor de x. Da igualdade anterior

$$\frac{x^2}{a^2 + x^2} = \frac{(l - x)^2}{b^2 + (l - x)^2}$$

o que nos fornece

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{(l - x)^2}{b^2}$$

ou

$$\frac{x}{a} = \frac{l - x}{b}\,,$$

pois estamos admitindo $a > 0, b > 0$ e $0 < x < l$, donde

$$x = \frac{al}{a + b}\,. \tag{7.2}$$

Devemos observar que a equação (7.1) possui um significado geométrico:

- $\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ é o cosseno do ângulo de incidência i;
- $\dfrac{l-x}{\sqrt{b^2+(l-x)^2}}$ é o cosseno do ângulo de reflexão r.

Assim, $\cos i = \cos r$ e, como os valores de i e de r estão restritos ao intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$, teremos $i = r$. Daí segue-se a lei da reflexão da luz, descoberta por Descartes:

O ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

Para finalizar, devemos verificar que, de fato, o valor de x, obtido em (7.2), é de mínimo. Isto segue-se do teste da derivada segunda, observando que

$$d''(x) = \frac{a^2}{(a^2+x^2)^{3/2}} + \frac{b^2}{(b^2+(l-x)^2)^{3/2}} > 0.$$

Por conseguinte, x é ponto de mínimo.

2. Inscrever, em um círculo de raio R, um triângulo isósceles cuja área seja máxima.

   Solução. Consideremos as figuras 7.10 nas quais estão representados círculos de raio R e triângulos isósceles inscritos $\triangle ABC$.

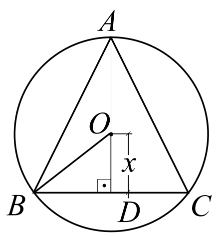

Fig. 7.10(a)

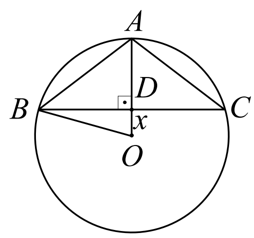

Fig. 7.10(b)

Tracemos o triângulo $\triangle OBD$ a partir do qual temos

$$BO^2 = BD^2 + OD^2.$$

Chamando $OD = x$ e observando que BO é o raio do círculo, obtém-se

$$BD = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

A área $S = S(x)$ do triângulo é dada por

$$S(x) = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 2BD \cdot (R+x) = (R+x)\sqrt{R^2-x^2},$$

em que $-R < x < R$ e observemos que na figura 7.10(b) x assume valores negativos. Derivando $S(x)$, usando a regra do produto, tem-se

$$S'(x) = \sqrt{R^2 - x^2} - \frac{x(R+x)}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

ou ainda

$$S'(x) = -\frac{2x^2 + Rx - R^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,.$$

Assim, teremos $S'(x) = 0$ se, e somente se,

$$2x^2 + Rx - R^2 = 0$$

cuja solução no intervalo $-R < x < R$ é $x = \frac{R}{2}$. Verifica-se facilmente que, para $-R < x < \frac{R}{2}$, tem-se $S'(x) > 0$ e, para $\frac{R}{2} < x < R$, tem-se $S'(x) < 0$ e daí $x = \frac{R}{2}$ é ponto de máximo.

5 Exercícios propostos

1. Encontre as dimensões do triângulo retângulo de maior área, de modo que a soma dos comprimentos de um dos catetos com o comprimento da hipotenusa seja uma constante c.

2. Determine o cilindro circular reto de maior volume que possa ser inscrito em uma esfera de raio R.

3. Dados os pontos $A = (0, 3)$ e $B = (4, 5)$, encontre o ponto P sobre o eixo ox para o qual a distância $|AP| + |PB|$ é a menor possível.

4. Em um experimento os resultados de n medidas da quantidade x são $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Qual o valor de x que minimiza a expressão $(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \ldots + (x - x_n)^2$?

5. Dado o ponto $P = (a, b)$ no primeiro quadrante, encontre a reta que passa por P e que forma com os semi-eixos coordenados o triângulo de menor área.

6. Dentre todos os números não negativos x, y tais que $x + y = 5$, encontre aqueles tais que o produto do quadrado do primeiro pelo cubo do segundo seja o máximo possível.

7. Encontre o retângulo de área máxima que pode ser inscrito em um círculo de raio 1.

8. Esboce os gráficos das funções abaixo.

(a) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+3}$

(b) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

(c) $f(x) = \dfrac{3}{5}x^{5/3} - 3x^{2/3}$

(d) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}$

(e) $f(x) = x + \dfrac{9}{x}$

(f) $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$

(g) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

(h) $f(x) = \dfrac{9+x^2}{9-x^2}$

9. Em cada um dos itens a seguir, esboce o gráfico de uma função contínua f que satisfaça as condições dadas.

(a) $f(1) = -2, f'(1) = 0, f''(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$

(b) $f(2) = 3, f'(2) = 0, f''(x) < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$

(c) $f(1) = 1, f''(x) < 0$ para $x > 1$, $f''(x) > 0$ para $x < 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

(d) $f(0) = 0, f''(x) < 0$ para $x > 0$, $f''(x) > 0$ para $x < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$

6 Respostas dos exercícios propostos

1. Cateto= $\dfrac{c}{3}$, hipotenusa=$\dfrac{2c}{3}$

2. Altura do cilindro $= \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$, raio do cilindro $= \sqrt{\dfrac{2}{3}}\,R$

3. $P = \left(\dfrac{3}{2}\,,\,0\right)$

4. $\dfrac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$

5. $y = -\dfrac{b}{a}x + 2b$

6. 2 e 3

7. Quadrado de lado $\sqrt{2}$

8. (a)

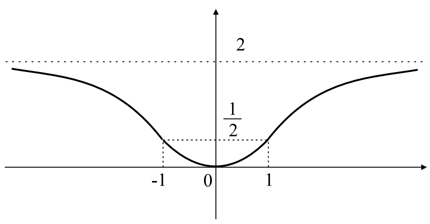

Fig. 7.11

(b)

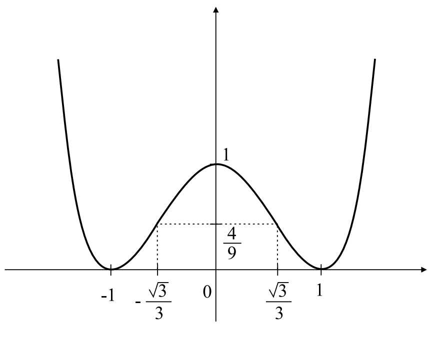

Fig. 7.12

(c)

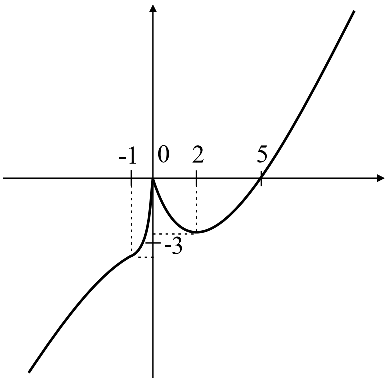

Fig. 7.13

(d)

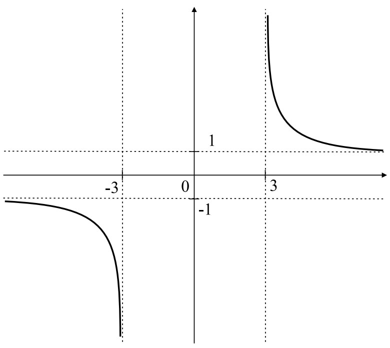

Fig. 7.14

(e)

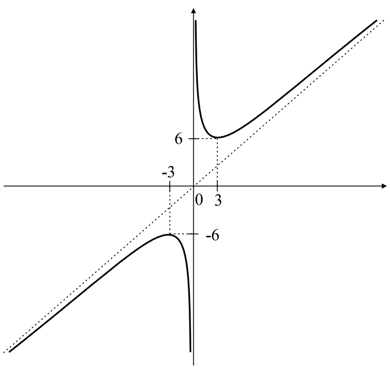

Fig. 7-15

(f)

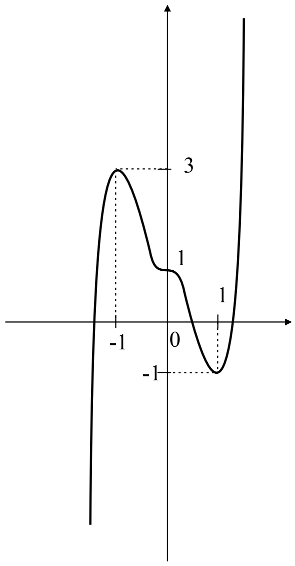

Fig. 7-16

(g)

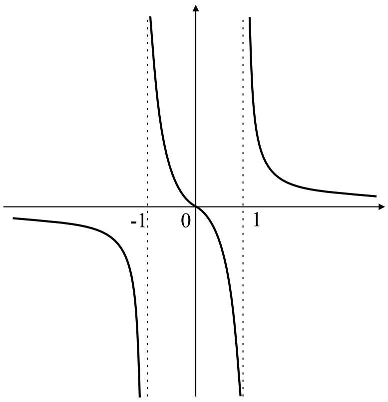

Fig. 7.17

(h)

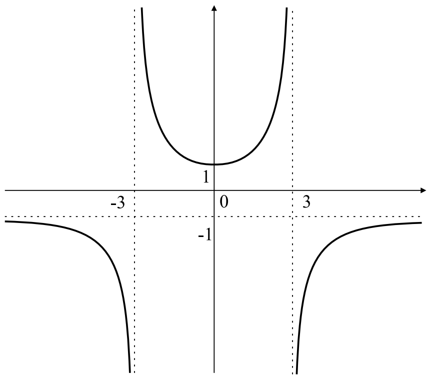

Fig. 7.18

9. (a)

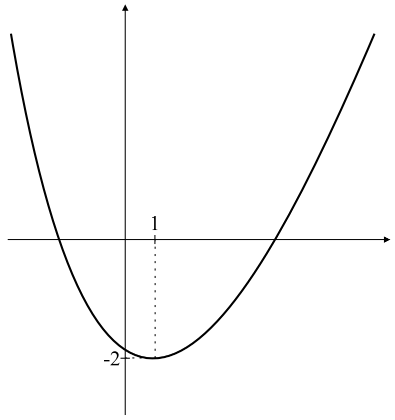

Fig. 7-19

(b)

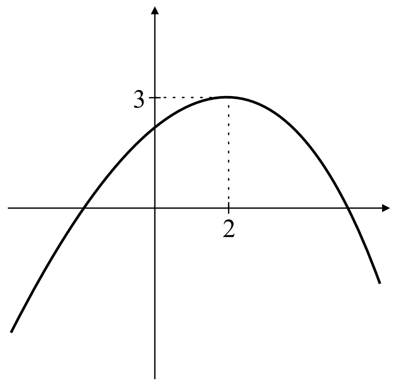

Fig. 7.20

(c)

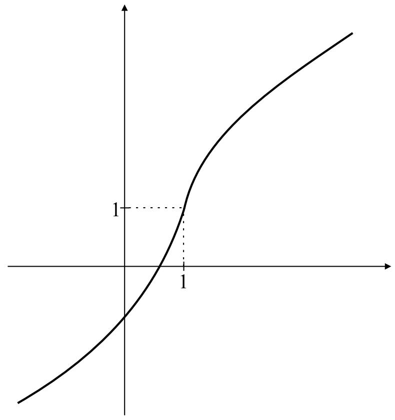

Fig. 7.21

(d)

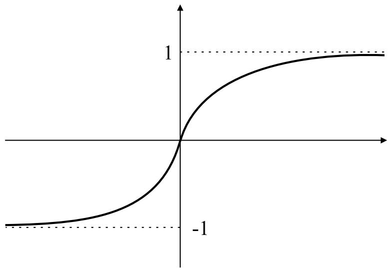

Fig. 7.22

Nesta aula você aprendeu:

- aplicar a derivada em problemas de taxas relacionadas;
- aplicar a derivada em problemas de otimização;
- aplicar a derivada em construção de gráficos de funções.

7 Apêndice

Máximos e mínimos no ensino médio

Os problemas de máximos e mínimos requerem, em sua grande maioria, o conhecimento de técnicas do Cálculo Diferencial, conforme foi visto nessa aula e anteriores. No entanto, alguns problemas desse tipo podem ser introduzidos, e resolvidos a contento, no ensino médio, usando técnicas elementares. Uma dessas é conseqüência do chamado completamento do quadrado. Vejamos como isso é feito.

Seja

$$y = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0,$$

um trinômio do segundo grau (função quadrática) e suponhamos que queiramos calcular o seu valor extremo (máximo ou mínimo, dependendo do sinal de a). Assim,

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

e desejamos fazer com que no termo entre parênteses apareça um quadrado perfeito. Sabe-se que o quadrado da soma de dois números z e w é

$$(z + w)^2 = z^2 + 2zw + w^2$$

e daí vejamos o que está faltando no termo entre parênteses para chegarmos a um quadrado perfeito. Observemos que

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x &= x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x \\ &= x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2. \end{aligned}$$

Em virtude disso, o trinômio em estudo pode ser reescrito como

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Analisemos essa última expressão. Suponhamos inicialmente que $a > 0$. Como $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ tem-se $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ de modo que o valor de y será mínimo quando $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ e, como $a > 0$, devemos ter $x + \frac{b}{2a} = 0$, ou seja, o valor mínimo de y será atingido no ponto

$$x_{\min} = -\frac{b}{2a}.$$

Se $a < 0$, o trinômio do segundo grau atingirá máximo no ponto

$$x_{\text{máx}} = -\frac{b}{2a},$$

de modo que o valor extremo da função quadrática, máximo ou mínimo, conforme $a < 0$ ou $a > 0$, será dado por

$$y_{\text{ext}} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}.$$

Designando por $\Delta = b^2 - 4ac$, o conhecido discriminante da função trinômio do segundo grau, teremos

$$y_{\text{ext}} = \frac{\Delta}{4a}$$

de modo que as coordenadas do ponto pertencente ao gráfico de y que corresponde ao extremo da função são

$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right).$$

Como deve ter ficado claro para o leitor, este método funcionou porque trabalhamos com uma função quadrática e pudemos usar o estratagema de completar quadrado.

O que acontece quando não tivermos uma função que não seja do tipo acima? Já que neste apêndice estamos no âmbito do ensino médio, não nos é possível usar o Cálculo Diferencial.

Para algumas classes de funções poderemos proceder conforme é feito no exemplo a seguir, o qual está contido no motivador artigo de Paterlini[1]

Exemplo 71. Um paciente ingere um remédio no instante $t = 0$. A concentração do remédio no sangue do paciente no instante t pode ser representada pela função

$$C(t) = \frac{20t}{t^2 + 4} \quad \text{para} \quad t \geq 0.$$

Calcule o instante em que a concentração é máxima.

Solução. Inicialmente observemos que $y \in \mathbb{R}$ está na imagem da função C se a equação

$$\frac{20t}{t^2 + 4} = y$$

tiver solução $t \geq 0$. Essa equação é equivalente a

$$yt^2 - 20t + 4y = 0$$

[1] Roberto Ribeiro Paterlini, Técnicas de Máximos e Mínimos, Revista do Professor de Matemática, SBM, Nº 35(1997)34-38.

que é uma equação do segundo grau em t, cujos coeficientes são $y, -20$ e $4y$. Essa equação possui solução quando o seu discriminante for maior do que ou igual a zero, ou seja, $400 - 16y^2 \geq 0$, o que é equivalente a $-5 \leq y \leq 5$. Da expressão de $C(t)$ temos que $y \geq 0$ se, e somente se, $t \geq 0$, de modo que a imagem da função C, para $t \geq 0$, é o intervalo fechado $[0, 5]$. Então o valor máximo de $C(t)$, para $t \geq 0$, é igual a 5. Para obtermos o valor do tempo t para o qual isso acontece, basta resolvermos a equação $C(t) = 5$, de modo que $t^2 - 4t + 4 = 0$ cuja solução positiva é $t = 2$. Veja o gráfico da função $C(t)$.

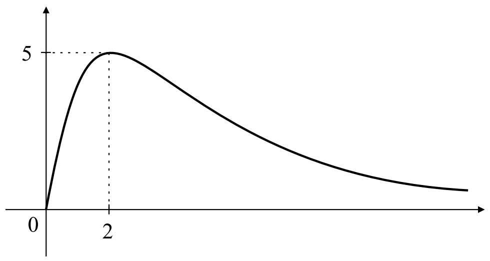

Fig. 7-23

Sobre máximos e mínimos em problemas de Geometria o leitor está fortemente convidado a ler o estimulante artigo de Figueiredo[2]

[2]Djairo Guedes de Figueiredo, Problemas de Máximo e Mínimo em Geometria Euclidiana, Matemática Universitária, SBM, N$^{\underline{o}}$ 9/10, Dezembro(1989)69-108