Aula 9

A integral de Riemann: noções iniciais

Objetivos

- Apresentar o processo de quadratura de certas figuras planas como motivação para o cálculo de área por meio de integrais.
- Estudar as noções de integral definida e de integral indefinida.
- Calcular integrais definidas usando o teorema fundamental do Cálculo.

Um dos problemas clássicos da Geometria é o do Cálculo de áreas que, além de suas aplicações práticas, gerou importantes questões na Matemática, não apenas ligados à Geometria como também a outros ramos da Matemática. Essas questões se originaram no chamado *problema da quadratura* o qual consiste em, dada uma figura qualquer, determinar, usando apenas régua e compasso, um quadrado que possua a mesma área da figura dada. Este problema é solúvel, usando métodos elementares, quando a figura é um polígono, ou até mesmo é uma figura com lados curvilíneos, como é o caso das lúnulas de Hipócrates, que serão desenvolvidos a seguir, à guisa de ilustração e motivação.

1 Quadraturas

A quadratura do retângulo

Para facilitar o entendimento façamos, por passos, a quadratura do retângulo.

Consideremos um retângulo arbitrário $\square ABCD$, conforme figura 9.1.

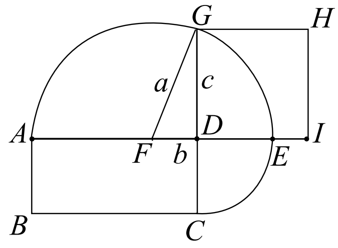


Fig. 9.1

Construamos, usando apenas régua e compasso, um quadrado com área igual à do retângulo dado. Descrevamos o processo passo a passo.

Passo 1. Usando uma régua, prolongue, para a direita, o lado AD.

Passo 2. Centre o compasso em D, e com abertura até C, marque o ponto E, isto é, $\overline{DC} = \overline{DE}$.

Passo 3. Usando régua e compasso, determine o ponto médio F do segmento AE.

Passo 4. Centre o compasso em F e, com abertura $\overline{FE} = \overline{AF}$, construa o semicírculo como na figura 9.1.

Passo 5. Usando régua e compasso, trace uma perpendicular ao segmento AE, passando por D, até encontrar o ponto G pertencente ao semicírculo construído no Passo 4.

Passo 6. Construa, com régua e compasso, o quadrado $\square GHID$.

Afirmamos que a área do retângulo $\square ABCD$ é igual à área do quadrado $\square GHID$. De fato,

$$\begin{aligned}
\text{Área } (\square ABCD) &= \overline{AD} \cdot \overline{DC} \\
&= \overline{AD} \cdot \overline{DE} \\
&= (a+b) \cdot (a-b) \\
&= a^2 - b^2 \\
&= c^2 \\
&= \text{Área } (\square GHID)
\end{aligned}$$

em que a, b e c estão representados na figura 9.1.

A quadratura do triângulo

Consideremos o triângulo $\triangle ABC$, como na figura 9.2(a).

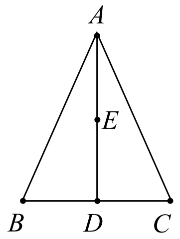


Fig. 9.2(a)

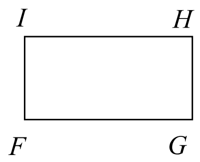


Fig. 9.2(b)

Façamos, como no caso anterior, a quadratura deste triângulo.

Passo 1. Construa a perpendicular ao lado BC, passando pelo vértice A e intersectando BC no ponto D.

Passo 2. Determine o ponto médio E do segmento AD (altura relativa ao lado BC).

Passo 3. Construa o retângulo $\Box FGHI$ de modo que $\overline{FG} = \overline{BC}$ e $\overline{FI} = \overline{DE}$. Veja figura 9.2(b).

Afirmamos que a área do triângulo $\triangle ABC$ é igual à do retângulo $\Box FGHI$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \text{Área } (\triangle ABC) &= \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AD} \\ &= \overline{BC} \cdot \frac{\overline{AD}}{2} \\ &= \overline{BC} \cdot \overline{DE} \\ &= \overline{FG} \cdot \overline{FI} \\ &= \text{Área } \Box FGHI). \end{aligned}$$

Como aprendemos, com a quadratura do retângulo, a partir daqui se pode construir a quadratura do triângulo.

Para não nos alongarmos mais nesta introdução, não faremos a quadratura de um polígono qualquer.

A quadratura da lúnula

Nos exemplos acima, as quadraturas foram efetuadas usando apenas Matemática elementar. No entanto, quando passamos para outras figuras curvilíneas, como o círculo ou a parábola, as técnicas até então conhecidas revelam-se insuficientes. Foi Arquimedes o primeiro matemático a vislumbrar um método que contornava as dificuldades da Matemática de seu tempo para fazer a quadratura de figuras curvilíneas. Suas idéias, que continham o gérmen do Cálculo Integral, foram inicialmente usadas para calcular a área de um setor da parábola. No linguajar moderno, o procedimento de Arquimedes está contido no primeiro exemplo desta aula. Antes, façamos a quadratura de uma Lúnula de Hipócrates.

Ao que parece, o primeiro matemático a calcular a área exata de uma figura delimitada por curvas foi Hipócrates de Chios, o mais famoso matemático grego do século V a.C.

Antes de efetuarmos a quadratura da Lúnula, estabeleçamos a seguinte proposição.

Proposição 1. *Segmentos circulares semelhantes estão na mesma razão que os quadrados de suas bases.*

Tal proposição também é atribuída a Hipócrates de Chios.

Consideremos os segmentos circulares semelhantes conforme mostrados, respectivamente, nas figuras 9.3(a) e 9.3(b).

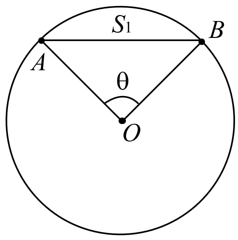


Fig. 9.3(a)

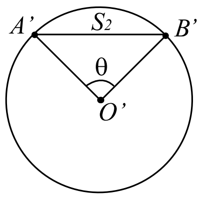


Fig. 9.3(b)

Designando suas áreas respectivas por S_1 e S_2 teremos, de acordo com a Proposição 1, que

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}.$$

Passemos à quadratura de uma Lúnula como feito por Hipócrates de Chios. Construamos a seguinte Lúnula, conforme figura 9.4.

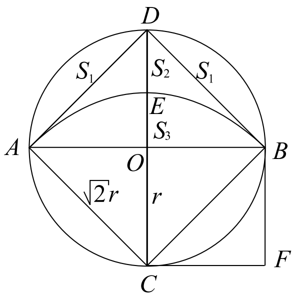


Fig. 9.4

Consideremos o segmento AB cujo ponto médio é O. Tracemos o círculo de centro O e raio OB. Construamos o diâmetro do círculo perpendicular a AB e designemos suas extremidades por C e D, conforme figura 9.4. Construamos o setor circular centrado em C e de raio AC, de acordo com a figura 9.4, e que intersecta o diâmetro CD no ponto E. Consideremos a Lúnula $AEBD$.

Proposição 2. *A Lúnula $AEBD$ é quadrável.*

Demonstração. Designemos por S_1 a área de cada um dos dois segmentos circulares da circunferência $ACBD$ determinados pelos segmentos de retas AD e DB. Por S_2 denotemos a área da figura limitada pelo arco $\widehat{AEB}$ e pelos segmentos AD e DB, e por S_3 a área da região limitada pelo arco $\widehat{AEB}$ e pelo diâmetro AB. A fim de usarmos a Proposição 1 devemos observar que os segmentos circulares ABE e aquele sobre a circunferência $ACBD$ determinada pelo segmento AD (ou DB) são semelhantes. Portanto, designando por r o raio da circunferência passando pelos pontos A, C, B e D, tem-se

$$\frac{S_1}{S_3} = \frac{(\sqrt{2}r)^2}{(2r)^2} = \frac{1}{2}$$

o que implica

$$S_1 = \frac{S_3}{2}.$$

Daí, segue-se que

$$\begin{aligned} \text{Área da Lúnula } AEBD &= 2S_1 + S_2 \\ &= S_2 + S_3 \\ &= \text{Área } (\triangle ABD) \\ &= \frac{2r^2}{2} \\ &= r^2. \end{aligned}$$

que é exatamente a área do quadrado $\square OBFC$, conforme mostrado na figura 8.4, o que conclui a demonstração de que a Lúnula em estudo é quadrável. $\square$

Muito embora o procedimento usado por Hipócrates de Chios seja extremamente elegante e criativo, ele não se aplica a outras figuras de lados curvilíneos, como é o caso do círculo. Prova-se que não se pode efetuar a quadratura de círculos usando-se apenas régua e compasso. Para tais tipos de figuras faz-se necessário introduzir um método que envolve um processo de limite, cujas origens remontam a Arquimedes, por meio de uma técnica chamada *Método de Exaustão* usada por ele em sua obra *A Quadratura da Parábola*[1]. Remetemos o leitor ao apêndice desta aula em

[1] Quadrature of the Parabola, Great Books of Western World, Vol. 10, pp. 527-537.

que se mostra a quadratura da parábola de um modo semelhante ao que fez o sábio de Siracusa.

O procedimento inaugurado por Arquimedes deu origem ao chamado *Cálculo Integral*, cuja essência será ilustrada nos dois exemplos a seguir.

Exemplo 88. Consideremos a função $f(x) = x$, para $0 \leq x \leq 1$, e suponhamos que se queira calcular a área da região abaixo do gráfico de f e acima do eixo ox, para $0 \leq x \leq 1$. Vide figuras 9.5.

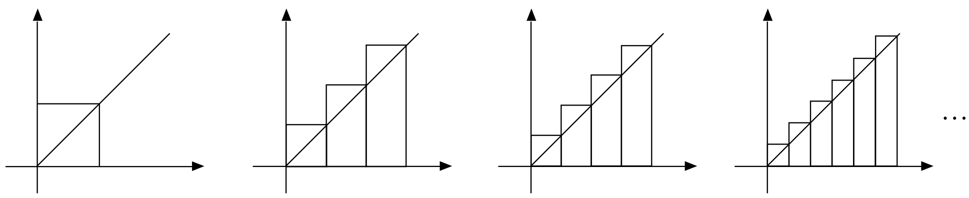


Fig. 9.5(a) Fig. 9.5(b) Fig. 9.5(c) Fig. 9.5(d)

Inicialmente façamos uma aproximação da figura por meio de retângulos. A partir daqui o leitor deverá redobrar a atenção a fim de apreender a essência do método que, muito embora esteja sendo aplicado a um caso específico, é bastante geral. Inicialmente, subdividamos o intervalo $[0, 1]$ em n subintervalos de comprimentos iguais. Portanto, $[0, 1]$ ficará subdividido nos intervalos

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \ldots, \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}\right].$$

A seguir, construamos os retângulos, conforme indicado nas figuras 9.5, da seguinte maneira:

Primeiro Retângulo. O primeiro retângulo tem como base o intervalo $[0, \frac{1}{n}]$ e altura $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$. Daí, segue-se que sua área é dada por

$$S_1 = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}.$$

Segundo Retângulo. O segundo retângulo tem como base o intervalo $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ e como altura $f(\frac{2}{n})$. Daí, segue-se que sua área é dada por

$$S_2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} = \frac{2}{n^2}.$$

i-ésimo Retângulo. O i-ésimo retângulo tem como base o intervalo $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ e como altura $f(\frac{i}{n}) = \frac{i}{n}$. Portanto, sua área é dada por

$$S_i = \frac{1}{n} \cdot \frac{i}{n} = \frac{i}{n^2}.$$

n-ésimo Retângulo. O n-ésimo retângulo tem como base o intervalo $[\frac{n-1}{n}, 1]$ e como altura $f(1) = 1 = \frac{n}{n}$. Portanto, sua área é dada por

$$S_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n} = \frac{n}{n^2}.$$

A área total A_n desses retângulos é

$$A_n = S_1 + S_2 + \ldots + S_i + \ldots + S_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{i}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}.$$

que pode ser reescrita como

$$A_n = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \ldots + i + \ldots + n).$$

Usando o fato de que

$$1 + 2 + \ldots + i + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

teremos

$$A_n = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{n}\right].$$

Analise a figura e observe que o valor de S aproxima, por excesso, a área procurada. À medida que aumentamos o valor de n o erro cometido na aproximação diminui, de modo que o valor será exato quando fizermos $n \to +\infty$. Conseqüentemente, designando por A a área a ser determinada, teremos

$$A = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{n}\right] = \frac{1}{2}$$

O ponto crucial a ser observado é que no processo do cálculo da área usamos como ingrediente básico a noção de limite, que somente começou a ser desenvolvido com o advento do Cálculo e que não era conhecido dos Gregos Antigos.

Adiantando um pouco a notação: o processo final do procedimento acima é designado por

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 89. Consideremos a função $f(x) = x^2$ com x restrito ao intervalo $[-1, 1]$. Seu gráfico é o setor de uma parábola conforme figura 9.6(a). Nosso problema consiste em determinar a área da região OAB. Em virtude da simetria do gráfico é suficiente calcular a área da região OAC e multiplicá-la por dois. Inicialmente calculemos a área da figura OAD, que é a região abaixo do gráfico de f, conforme figura 9.6(b), com x restrito ao intervalo $[0, 1]$.

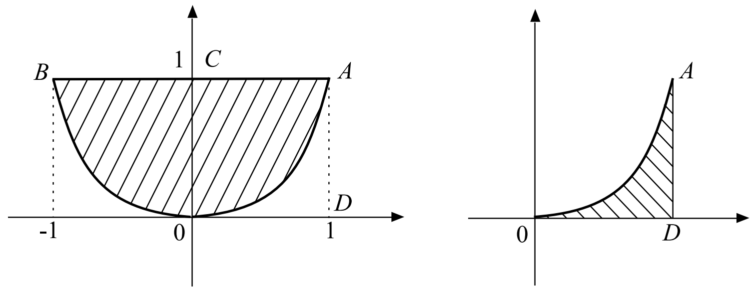


Fig. 9.6(a) Fig. 9.6(b)

Inicialmente, subdividamos o intervalo $[0, 1]$ em n subintervalos de comprimentos iguais. Portanto, $[0, 1]$ ficará subdividido nos intervalos

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \ldots, \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1\right].$$

A seguir, construamos os retângulos, conforme indicado nas figuras 9.7, da seguinte maneira:

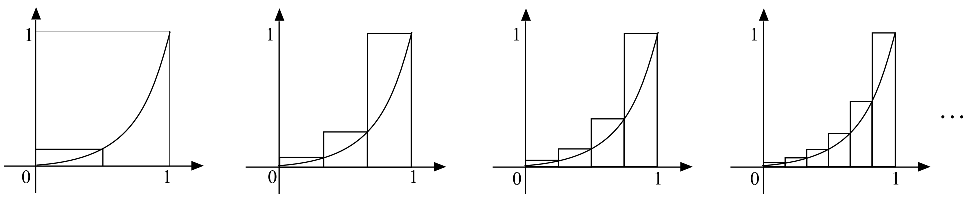


Fig. 9.7(a) Fig. 9.7(b) Fig. 9.7(c) Fig. 9.7(d)

Primeiro Retângulo. O primeiro retângulo tem como base o intervalo $[0, \frac{1}{n}]$ e altura $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}$. Daí, segue-se que sua área é dada por

$$S_1 = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^3}.$$

Segundo Retângulo. O segundo retângulo tem como base o intervalo $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ e como altura $f(\frac{2}{n}) = \frac{2^2}{n^2}$. Daí, segue-se que sua área é dada por

$$S_2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{2^2}{n^2} = \frac{2^2}{n^3}.$$

i-ésimo Retângulo. O i-ésimo retângulo tem como base o intervalo $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ e como altura $f(\frac{i}{n}) = \frac{i^2}{n^2}$. Portanto, sua área é dada por

$$S_i = \frac{1}{n} \cdot \frac{i^2}{n^2} = \frac{i^2}{n^3}.$$

n**-ésimo Retângulo.** O n-ésimo retângulo tem como base o intervalo $[\frac{n-1}{n}, 1]$ e como altura $f(1) = 1 = \frac{n^2}{n^2}$. Portanto, sua área é dada por

$$S_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2}{n^2} = \frac{n^2}{n^3}.$$

A área total A_n desses retângulos é

$$A_n = S_1 + S_2 + \ldots + S_i + \ldots + S_n = \frac{1}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \ldots + \frac{i^2}{n^3} + \ldots + \frac{n^2}{n^3}.$$

que pode ser reescrita como

$$A_n = \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + i^2 + \ldots + n^2).$$

Usando o fato de que

$$1^2 + 2^2 + \ldots + i^2 + \ldots + n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

e daí

$$A_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

Analisemos as figuras 9.7 e observemos que o valor de S aproxima, por excesso, a área procurada. À medida que aumentamos o valor de n, o erro cometido na aproximação diminui, de modo que o valor será exato quando fizermos $n \to +\infty$. Conseqüentemente, designando por A a área da figura ODA, representada na figura 9.6(b), teremos

$$A = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) = \frac{1}{3}$$

Daí a área total A_p do segmento da parábola é

$$A_p = 2 \cdot (1 - \frac{1}{3}) = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Usando a notação como no exemplo anterior, teremos

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}\,.$$

2 Área sob uma curva: o caso geral

Seja

$$y = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

uma função contínua e não-negativa no intervalo fechado $[a, b]$. A área sob a curva que é o gráfico da função $y = f(x)$, de $x = a$ até $x = b$, é a área A da região plana limitada pelo gráfico de $y = f(x)$, pelo eixo ox e as retas $x = a$ e $x = b$. Para calcular essa área, seguiremos procedimentos semelhantes aos desenvolvidos nos exemplos anteriores.

Assim, inicialmente, subdividiremos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, de comprimentos não necessariamente iguais, considerando n pontos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ tais que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Façamos

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, n$$

e seja

$$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}.$$

As retas $x = x_0, x = x_1, \ldots, x = x_{n-1}, x = x_n$ dividem a região em faixas verticais, conforme figura 9.8.

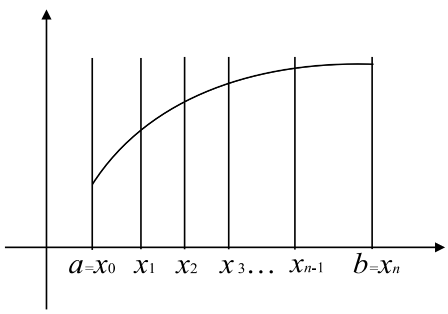


Fig. 9.8

Sendo f contínua, e supondo que os intervalos tenham comprimentos pequenos, a variação de f em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ será bastante pequena, de modo que uma boa aproximação de $f(x)$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$, será obtida escolhendo-se $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ e fazendo-se $f(\xi_i) \cong f(x)$ para $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Aproximar $f(x)$ por $f(\xi_i)$ implica que a área de cada uma das faixas representadas na figura 9.9 é aproximadamente igual à área do retângulo cuja base é o intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ e cuja altura possui comprimento $f(\xi_i)$.

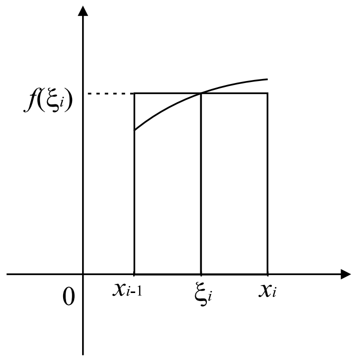


Fig. 9.9

A soma das áreas destes retângulos é dada por

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

À medida que os comprimentos dos subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ diminuem, o erro cometido ao aproximar $f(x)$ por $f(\xi_i)$ torna-se cada vez menor, de modo que é natural definir a área A como sendo

$$A = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

que é, *mutatis mutandis*, o que foi feito no exemplo 1, em que $\|P\| = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i$. Seguindo as notações introduzidas nos exemplos 88 e 89, escrevemos $A = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

3 A definição de integral

As considerações anteriores nos conduzem, naturalmente, à seguinte definição de integral.

Dada uma função $y = f(x)$ definida em um intervalo $[a, b]$, sejam

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

e ξ_i um ponto arbitrário do subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, de comprimento $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. O conjunto $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ é chamado uma *partição* do intervalo $[a, b]$.

Suponhamos que a soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

tenha um limite finito quando

$$\|P\| = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\} = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$$

tende a zero (o número $\|P\|$ é chamado *norma* da partição P). Caso isso aconteça, esse limite é chamado *integral definida* de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ e designada por

$$\int_a^b f(x)dx.$$

e diz-se então que f é integrável em $[a, b]$.

A integral definida acima é também chamada *integral de Riemann* e goza das seguintes propriedades:

Se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ forem funções integráveis no intervalo $[a, b]$ e se $\lambda \in \mathbb{R}$, então:

(a) $f + g : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável e

$$\int_a^b [(f + g)(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\,;$$

(b) $\lambda f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável e

$$\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx\,;$$

(c) Se $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$, então $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ e este valor representa a área sob o gráfico de f acima do eixo ox e entre as retas $x = a$ e $x = b$. Esta propriedade é equivalente a: se $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

Exemplo 90. Nos dois exemplos anteriores vimos que $\int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$ e $\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$. Calculemos a integral de uma função constante. Seja $f(x) = k$ para todo $x \in [a, b]$, em que k é uma constante. Consideremos uma partição $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ e $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Teremos, então,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} k(x_i - x_{i-1}) = k\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = k(b - a).$$

Isto significa que todas as somas como a acima são iguais a k e como o limite de constante é a própria constante, teremos

$$\int_a^b kdx = k(b - a).$$

4 Área entre duas curvas

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções definidas em um mesmo intervalo $[a, b]$. Para fixar as idéias, suponha que $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, como mostrado na figura 9.10. Como se vê, o gráfico de $f(x)$ está acima do gráfico de $g(x)$.

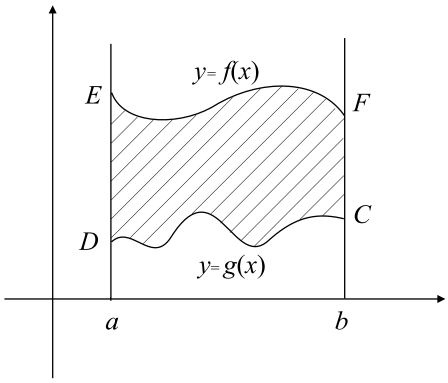


Fig. 9.10

Suponhamos que queiramos calcular a área da região limitada pelos dois gráficos, ou seja, a área da região $DCFE$. Observemos que

$$(\text{Área de } abCD) + (\text{Área de } DCFE) = \text{Área de } abFE,$$

e portanto

$$A = \text{Área de } DCFE = (\text{Área de } abFE) - (\text{Área de } abCD).$$

Desde que

$$\text{Área de } abFE = \int_a^b f(x)dx, \quad (\text{Área de } abCD) = \int_a^b g(x)dx,$$

segue-se que

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

Percebe-se, pelo que foi desenvolvido nos dois exemplos vistos antes, mesmo sendo casos simples, que calcular a integral de Riemann usando a definição é algo extremamente trabalhoso pois manipular as somas parciais e depois calcular seu limite é algo quase que impraticável quando tratamos com funções que não sejam tão simples quanto $f(x) = x$ ou $f(x) = x^2$. Em vista disso, devemos introduzir um resultado, chamado *teorema fundamental do Cálculo*, que nos permitirá calcular grande parte das integrais importantes que surgem no Cálculo Integral.

Para isto necessitaremos de um conceito preliminar.

Dada uma função $f(x)$ definida em um intervalo I, diz-se que uma outra função $F(x)$, definida e derivável no intervalo I, é uma *primitiva* ou *antiderivada* de $f(x)$ se

$$\frac{dF}{dx}(x) = F'(x) = f(x)$$

para todo $x \in I$.

Por exemplo, $F(x) = \frac{x^2}{2}$ é primitiva de $f(x) = x$, assim como $F_1(x) = \frac{x^2}{2} + C$, qualquer que seja a constante C, também é primitiva da mesma f, donde se conclui que primitiva de uma função f, caso exista, pode não ser única. Isto é um caso particular do teorema a seguir.

Teorema 14. *Sejam $F(x)$ e $G(x)$ primitivas da função $f(x)$ no intervalo I. Então existe uma constante C tal que $F(x) = G(x) + C$, ou seja, duas primitivas de uma mesma função em um intervalo diferem por uma constante.*

Demonstração. Como $F(x)$ e $G(x)$ são primitivas de $f(x)$, tem-se que $F'(x) = f(x)$ e $G'(x) = f(x)$ e daí $F'(x) = G'(x)$ e assim $F'(x) - G'(x) = 0$, para todo $x \in I$. Como $(F - G)' = F' - G'$, teremos $(F - G)'(x) = 0$, para todo $x \in I$. Assim, $F(x) - G(x) = C$, para alguma constante C e daí $F(x) = G(x) + C$ para todo $x \in I$, o que conclui a demonstração do teorema. $\square$

Exemplo 91. Consideremos a função $f(x) = x^n$ para $n \neq -1$. Usando a regra de derivação dada na aula 5, temos que $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ é primitiva de $f(x)$.

Exemplo 92. A função $f(x) = 3x^2 + 2x + 4$ tem $F(x) = x^3 + x^2 + 4x + C$ como sua primitiva.

Nesses dois exemplos as primitivas foram obtidas por simples inspeção, usando o que se sabia das técnicas elementares de derivação. No entanto, nem sempre as coisas são tão simples. Basta observar a função $f(x) = x(x^2 + 10)^{100}$ e tentar calcular sua primitiva por meio de uma simples manipulação de derivadas. Tente também calcular uma primitiva de $f(x) = x \cos x$. Para funções como essas, e outras que aparecerão mais adiante, precisamos de técnicas mais sofisticadas de primitivação (cálculo de primitivas), que serão vistas na próxima lição.

Seja $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$ no intervalo I. Pelo visto anteriormente, a primitiva geral de $f(x)$ é dada por

$$F(x) + C$$

em que C é uma constante arbitrária. Esta expressão é chamada *integral indefinida* de $f(x)$ sendo designada por

$$\int f(x)dx.$$

Assim

$$\int f(x) = F(x) + C.$$

O símbolo $\int$ é chamado *sinal de integral*, x é chamada *variável de integração*, $f(x)$ é chamada *integrando* e C é chamada *constante de integração.*

Uma observação útil, que segue da definição de integral indefinida, é que

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$$

e

$$\int f'(x)dx = f(x) + C.$$

A operação que nos permite calcular primitivas é linear. Mais precisamente, temos o seguinte teorema.

Teorema 15. *Suponhamos que $f(x)$ e $g(x)$ possuam integrais indefinidas no mesmo intervalo I. Então*

$$\int [af(x) + bg(x)]dx = a\int f(x)dx + b\int g(x),$$

em que a e b são constantes arbitrárias.

Demonstração. Segue-se do que observamos acima que

$$\frac{d}{dx}\int [af(x) + bg(x)]dx = af(x) + bg(x).$$

Por outro lado, pelas regras usuais de derivação, tem-se

$$\frac{d}{dx}\left[a\int f(x)dx + b\int g(x)dx\right] = a\frac{d}{dx}\int f(x)dx + b\frac{d}{dx}\int g(x)dx =$$

$$af(x) + bg(x).$$

Conseqüentemente,

$$\int [af(x) + bg(x)]dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx.$$

o que conclui a demonstração. □

Deve-se observar que esta propriedade é válida para um número finito qualquer de funções. Mais precisamente, sejam $a_1, \ldots, a_n$ números reais e $f_1, \ldots, f_n$ funções definidas em um mesmo intervalo, então

$$\int \left(\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x) \right) dx = \sum_{i=1}^{n} a_i \int f_i(x) dx.$$

Exemplo 93. Para ilustrar o uso deste teorema, calculemos

$$\int \left(5x^4 - 6x^2 + \frac{2}{x^2} \right) dx.$$

Usando o teorema 2 e a observação subseqüente, teremos

$$\begin{aligned} \int \left(5x^4 - 6x^2 + \frac{2}{x^2} \right) dx &= 5 \int x^4 dx - 6 \int x^2 dx + 2 \int x^{-2} dx \\ &= x^5 - 2x^3 - \frac{2}{x} + C. \end{aligned}$$

Observemos que o cálculo de integrais definidas usando simplesmente a definição é algo quase que impraticável. No entanto, para contornar esta dificuldade existe um importante teorema, o *teorema fundamental do Cálculo*, que nos permitirá calcular integrais definidas, desde que conheçamos uma primitiva da função a ser integrada.

Antes de abordar o teorema fundamental do Cálculo, demonstremos o teorema do valor médio para integrais.

Teorema 16. (Teorema do valor médio para integrais) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existe $c \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a).$$

Demonstração. Desde que f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ ela atinge máximo M e mínimo m neste intervalo. Assim,

$$m \leq f(x) \leq M, \text{ para todo } x \in [a, b].$$

Uma simples integração nos fornece

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

ou, equivalentemente,

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

e, pelo teorema do valor intermediário, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$$

o que conclui a demonstração do teorema. $\square$

Teorema 17. (Teorema fundamental do Cálculo) *Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e seja $F(x)$ uma primitiva de f. Então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Deve-se observar que, definindo

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

tem-se

$$F'(x) = f(x)$$

ou

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

isto é, a função $F(x)$ é uma primitiva de f. De onde se conclui-se que, usando o fato de que toda função contínua é integrável em intervalos fechados e limitados, toda função contínua possui uma primitiva dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Façamos uma demonstração geométrica do teorema fundamental do Cálculo usando a interpretação da integral de Riemann como a área sob o gráfico de funções. Para isto consideremos o gráfico da função contínua e positiva $y = f(x)$ para $a \leq x \leq b$. Assim, a integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

representa a área da figura limitada superiormente pelo gráfico da função $y = f(x)$, lateralmente pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$ e inferiormente pelo eixo ox, conforme figura 9.11.

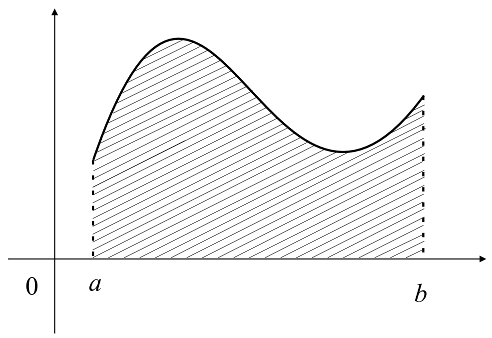


Fig. 9.11

Designemos por $A(x)$ a função

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

a qual representa a área da região hachurada na figura 9.12.

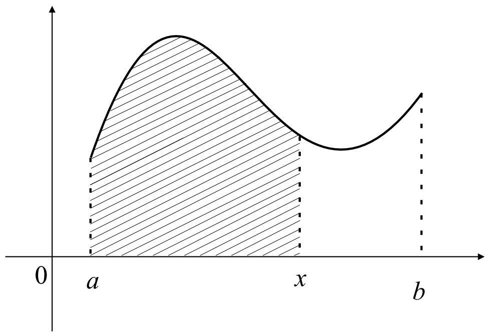


Fig. 9.12

Calculemos $\frac{dA}{dx}(x)$. Para tal fim, tome x e dê a ele um acréscimo Δx que, para simplificar os cálculos, será considerado positivo. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} &= \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \\ &= f(\xi) \end{aligned}$$

em que $\xi \in [x, x+\Delta x]$ é obtido via teorema do valor médio para integrais. Por continuidade, $f(\xi) \to f(x)$, quando $\Delta x \to 0$ e assim $F'(x) = f(x)$, o que conclui a demonstração do teorema fundamental do Cálculo.

Exemplo 94. O complicado cálculo de

$$\int_a^b x dx$$

no exemplo 88 pode ser substituído de maneira simples, usando o teorema fundamental do Cálculo, observando que

$$F(x) = \frac{x^2}{2}$$

é uma primitiva da função $f(x) = x$. Assim,

$$\int_a^b x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

Exemplo 95. Outro exemplo que foi resolvido de maneira bastante trabalhosa foi o da integral

$$\int_0^1 x^2 dx$$

e que pode, usando o teorema fundamental do Cálculo, ser resolvido em apenas uma linha se observarmos que

$$F(x) = \frac{x^3}{3}$$

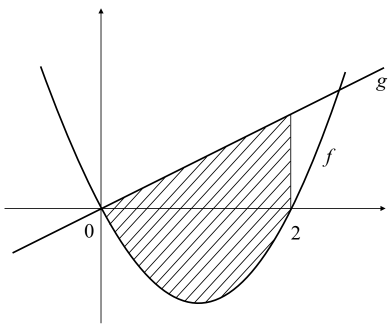
é uma primitiva da função $f(x) = x^2$. Assim

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

5 Exercícios resolvidos

1. Calcular a área da região R situada entre os gráficos das funções f e g no intervalo $[0, 2]$ sendo $f(x) = x(x-2)$ e $g(x) = \dfrac{x}{2}$.

   Solução. Os gráficos estão representados na seguinte figura

   Desde que $f \leq g$ no intervalo $[0, 2]$, podemos escrever a área $A(R)$ da região R como

   $$A(R) = \int_0^2 [g(x) - f(x)]dx = \int_0^2 \left(\frac{5}{2}x - x^2\right) dx = \frac{7}{3}.$$

2. Encontre a equação da curva passando por $(1, 5)$ e cuja tangente em (x, y) possui inclinação $4x$.

   Solução. Relembrando que a derivada de uma função $y = f(x)$ representa a inclinação da reta tangente ao seu gráfico, tem-se que $f'(x) = 4x$. Desse modo, deve-se encontrar a primitiva de $4x$ que, escrita na notação introduzida nesta aula, é dada por

   $$f(x) = \int 4x dx = 2x^2 + C$$

por hipótese, o gráfico da função passa pelo ponto $(1, 5)$, ou seja, $f(1) = 5$ e daí $f(1) = 2+C = 5$. Assim $C = 5$. Logo $f(x) = 2x^2+5$.

3. Calcule $\displaystyle\int (x + 1)(x - 1)dx$

   Solução.

$$\begin{aligned}\int (x+1)(x-1)dx &= \int (x^2-1)dx \\ &= \int x^2dx - \int dx \\ &= \frac{x^3}{3} - x + C\end{aligned}$$

4. Calcule $\displaystyle\int [g(x)]^3\, g'(x)dx$

   Solução. Usando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{d}{dx}\,[g(x)]^4 = 4\,[g(x)]^3\, g'(x)$$

de modo que

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4}g(x)^4\right] = [g(x)]^3 g'(x)$$

Em vista disso, $\dfrac{1}{4}[g(x)]^4$ é uma primitiva de $[g(x)]^3g'(x)$. Por conseguinte,

$$\int [g(x)]^3g'(x)dx = \frac{1}{4}[g(x)]^4 + C,$$

em que C é a constante de integração.

6 Exercícios propostos

1. Achar a área sob as curvas dadas, entre os extremos indicados

   (a) $f(x) = x^3$ entre $x = 1$ e $x = 5$;

   (b) $f(x) = x$ entre $x = 0$ e $x = 2$;

   (c) $f(x) = x^4$ entre $x = -1$ e $x = 4$;

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ entre $x = 1$ e $x = 2$.

2. Achar a área entre as curvas $y = x$ e $y = x^2$.

3. Achar a área entre as curvas $y = x$ e $y = x^3$.

4. Achar a área entre as curvas $y = x^2$ e $y = x^3$.

5. Achar a área entre a curva $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ e o eixo ox, entre $1 \leq x \leq 3$. Esboce a curva.

6. Calcule as seguintes integrais

   (a) $\displaystyle\int (x+1)dx;$

   (b) $\displaystyle\int (3x-2)dx;$

   (c) $\displaystyle\int (x^2+x^3+x^4)dx;$

   (d) $\displaystyle\int x^{\frac{3}{4}};$

   (e) $\displaystyle\int x^2(x^2-1)dx.$

7 Respostas dos exercícios propostos

1. (a) 156
   (b) 2
   (c) 205
   (d) $\frac{1}{2}$
2. $\frac{1}{6}$
3. $\frac{1}{4}$
4. $\frac{1}{12}$
5. 0
6. (a) $\dfrac{x^2}{2} + x + C$
   (b) $\dfrac{3}{2}x^2 - 2x + C$
   (c) $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} + C$
   (d) $\dfrac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + C$
   (e) $\dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^3}{3} + C$

Nesta aula você aprendeu:

- o processo de quadratura de certas figuras planas;
- a noção de integral definida e integral indefinida;
- a calcular integrais definidas usando o teorema fundamental do Cálculo.

8 Apêndice

A quadratura da parábola segundo Arquimedes

A Quadratura da Parábola, já citada nesta aula, é uma das obras fundamentais de Arquimedes que prima pela elegância e estética como também é o gérmen do Cálculo Integral. Na Introdução da Quadratura da Parábola, dirigida a um certo Dositheus, Arquimedes faz menção a um problema que preocupava os geômetras de então que haviam tentado, sem muito sucesso, encontrar uma área *retilínea* igual à de um círculo ou de um segmento de círculo, ou seja, tais geômetras tentavam fazer a quadratura do círculo. Mais adiante ele afirma ter conseguido encontrar a solução para o cálculo da área de um segmento de parábola.

Antes de chegar ao seu método, vários resultados são demonstrados. Enunciemos alguns deles, à guisa de ilustração. Ele começa com a seguinte proposição.

Proposição 1. *Se de um ponto P sobre uma parábola for traçada uma linha reta que é ou o seu eixo ou paralela ao seu eixo, como PV, e se QQ' for uma corda paralela à tangente à parábola em P encontrando PV em V, então $QV = VQ'$. Reciprocamente, se $QV = VQ'$, a corda QQ' será paralela à tangente em P.*

Veja a figura 9.13.

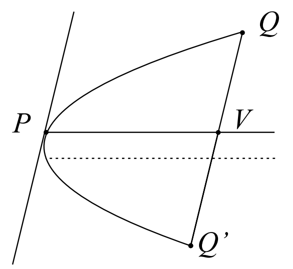


Fig. 9.13

Outro resultado é a proposição 21 enunciada a seguir.

Proposição 21. *Se Qq for a base e se P for o vértice de algum segmento parabólico, e se R for o vértice do segmento parabólico determinado por PQ, então*

$$\triangle PQq = 8 \triangle PRQ.$$

Estamos representando por $\triangle ABC$ a área do triângulo cujos vértices são os pontos A, B e C. Veja a figura 9.14 para uma visualização dessa proposição.

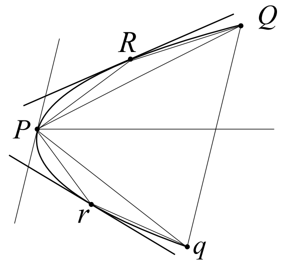


Fig. 9.14

Muito embora não seja dito explicitamente, na Proposição 21 o segmento de reta Qq é paralelo à reta tangente à parábola em P. Observe, também, e isto é enfatizado ao final da demonstração da Proposição 21, que

$$\triangle PQq = 8 \triangle Prq.$$

Assim,

$$2 \triangle PQq = 8 \triangle PRQ + 8 \triangle Prq$$

e então

$$\triangle PRQ + \triangle Prq = \frac{1}{4} \triangle PQq$$

No próximo resultado Arquimedes demonstra o seguinte.

Proposição 22. *Se existir uma série de áreas $A, B, C, D, \dots$ cada uma das quais é quatro vezes a seguinte, e se a maior, A, for igual à do triângulo PQq inscrito em um segmento parabólico PQq e tendo a mesma base que a do triângulo e igual altura, então*

$$A + B + C + D + \cdots < (\textit{Área do Segmento } PQq).$$

O leitor interessado deverá consultar a obra de Arquimedes (já citada anteriormente) para estudar as demonstrações das proposições 1, 21 e 22, como também de outras, assim como deverá consultar George F. Simmons[2]

Para verificarmos como executar o método de Arquimedes, chamado *Método de Exaustão*, introduzido por Eudóxio, pois consiste em exaurir o segmento parabólico por meio de triângulos nele inscritos, consideremos o segmento parabólico ilustrado na figura 9.15.

[2] George F. Simmons, Cálculo com Geometria Analítica, Vol. 2, pág. 682-684, Ed. McGraw-Hill

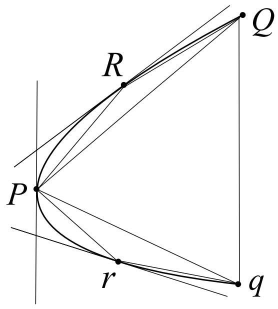


Fig. 9.15

Como visto anteriormente

$$\triangle PRQ + \triangle Prq = \frac{1}{4} \triangle\ PQq.$$

Vejamos o que acontece com o segmento parabólico PRQ se procedermos como neste primeiro processo. Façamos uma ampliação da figura 9.15.

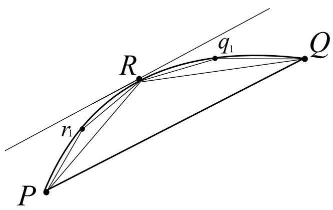


Fig. 9.16

Assim,

$$\triangle Pr_1R + \triangle Rq_1Q = \frac{1}{4} \triangle\ PRQ$$

e procedendo de maneira análoga conforme figura 9.17

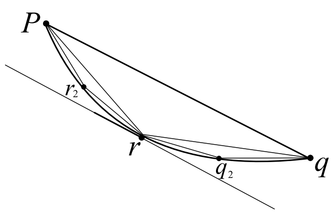


Fig. 9.17

teremos

$$\triangle Pr_2r + \triangle rq_2q = \frac{1}{4}Prq.$$

Desse modo, a soma das áreas de todos os triângulos construídos até agora (que é menor do que a área do segmento parabólico PQq) é dada por

$$\triangle PQq + \triangle PRQ + \triangle Prq + \triangle Pr_1R + \triangle Rq_1Q + \triangle Pr_2r + \triangle rq_2q =$$

$$\triangle PQq + \frac{1}{4} \triangle PQq + \frac{1}{4} \triangle PRQ + \frac{1}{4} \triangle Prq =$$

$$\triangle PQq + \frac{1}{4} \triangle PQq + \frac{1}{4} (\triangle PRQ + \triangle Prq) =$$

$$\triangle PQq + \frac{1}{4} \triangle PQq + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \triangle PQq =$$

$$\left[1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right] \triangle PQq < (\text{Área do segmento } PQq).$$

Repetindo este processo indefinidamente, teremos

$$\text{Área do segmento } PQq = \triangle PQq \left[1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots\right]$$

e relembrando que a soma de uma série geométrica infinita com razão r, $0 < |r| < 1$, é dada por

$$1 + r + r^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} = \frac{1}{1-r},$$

Dessa maneira

$$\begin{aligned} \text{Área do segmento } PQq &= \triangle PQq \left[\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^j\right] \\ &= \triangle PQq \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{4}{3} \cdot \triangle PQq. \end{aligned}$$

Vejam, então, que a integral de Riemann jazia adormecida desde os idos da época de Arquimedes.