

Aula 10

Cálculo de primitivas ou de antiderivadas

Objetivos

- Calcular primitivas de funções usando regras elementares de primitivação.
- Calcular primitivas de funções pelo método da substituição.
- Calcular primitivas de funções usando o método da integração por partes.

Esta aula será dedicada às técnicas que nos permitirão calcular primitivas que não sejam obtidas por simples inspeção. Recordemos que $F(x)$ é uma primitiva ou antiderivada de uma função $f(x)$ em um intervalo I se $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$, sendo que o símbolo $\int f(x)dx$ designa

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

1 Regras elementares para cálculo de primitivas

Por questões de completeza estabeleceremos não apenas novas regras como também recordaremos outras que já foram citadas na aula 8. Nas regras a seguir, o símbolo C representará sempre uma constante arbitrária.

Regra 1. $\int 0 dx = C.$

Regra 2. $\int 1 dx = x + C.$

Regra 3. $\int a dx = ax + C,$ em que a é uma constante.

Regra 4. $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C,$ para qualquer número racional $r \neq -1$

Regra 5. $\int af(x)dx = a \int f(x)dx,$ qualquer seja a constante a

Regra 6. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

Regra 7. $\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx.$

Regra 8. $\int (g(x))^r g'(x)dx = \frac{1}{r+1}(g(x))^{r+1} + C,$ para todo número racional $r \neq -1.$

Outras técnicas de integração serão vistas. Antes de passarmos a elas faremos uma seqüência de exemplos, a fim de que o leitor fixe definitivamente as regras já estabelecidas.

Exemplo 96. Calculemos a integral

$$\int x^6 dx$$

Neste caso basta aplicar diretamente a regra 4.

$$\int x^6 dx = \frac{1}{7} x^7 + C$$

Exemplo 97. Calculemos

$$\int \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx$$

Observemos inicialmente que

$$\int \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{5}} dx.$$

Agora, tal como no exemplo anterior, basta aplicar diretamente a regra 4, para obter

$$\int \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx = \frac{5}{4} x^{\frac{4}{5}} + C.$$

Exemplo 98. Calculemos a integral indefinida

$$\int (2x^2 - 5x + 3) dx.$$

Aplicando as regras 5, 6 e 7, obtemos

$$\int (2x^2 - 5x + 3) dx = 2 \int x^2 dx - 5 \int x dx + \int 3 dx$$

Segue-se das regras 3 e 4 que

$$\int (2x^2 - 5x + 3) dx = \frac{2}{3} x^3 - \frac{5}{2} x^2 + 3x + C.$$

Exemplo 99. Calculemos a seguinte integral indefinida

$$\int (3s + 4)^2 ds.$$

Observemos que

$$\int (3s + 4)^2 ds = \frac{1}{3} \int (3s + 4)^2 3 ds$$

Assim, podemos aplicar a regra 8 para obter

$$\int (3s + 4)^2 ds = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} (3s + 4)^3 \right) + C = \frac{1}{9} (3s + 4)^3 + C.$$

2 Método da substituição

Para resolver uma integral que possa ser escrita na forma

$$\int f(g(x))g'(x) dx$$

podemos lançar mão de um processo chamado *método da substituição*, que consiste em tomar $u = g(x)$ e, portanto, $du = g'(x)dx$, de modo que a integral anterior pode ser reescrita como

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du.$$

Assim, a variável de integração, que era x , foi substituída pela nova variável u .

Vejamos alguns problemas.

Exemplo 100. Calculemos a integral $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

Observemos que essa integral pode ser escrita como

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \cos(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} dx.$$

Fazendo $u = \sqrt{x}$, obtemos $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$. Assim,

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \cos u du = 2 \operatorname{sen} u = 2 \operatorname{sen}(\sqrt{x}) + C.$$

Exemplo 101. Calculemos a integral $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$.

Façamos $u = x + 1$, logo $du = dx$. Então

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx &= \int \frac{u-1}{\sqrt{u}} du \\ &= \int \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}} \right) du \\ &= \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3} (\sqrt{u})^3 - 2\sqrt{u} + C \\ &= \frac{2}{3} (\sqrt{x+1})^3 - 2\sqrt{x+1} + C \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{x+1}(x-2) + C \end{aligned}$$

Exemplo 102. Calculemos $\int \sqrt[3]{x^3 - 2x + 1} dx$.

Notemos que $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Assim, fazendo $u = x-1$, $du = dx$. Então

$$\begin{aligned} \int \sqrt[3]{x^3 - 2x + 1} dx &= \int \sqrt[3]{(x-1)^2} dx \\ &= \int \sqrt[3]{u^2} du \\ &= \int u^{\frac{2}{3}} du \\ &= \frac{3}{5} u^{\frac{5}{3}} + C \\ &= \frac{3}{5} (\sqrt[3]{u})^5 + C \\ &= \frac{3}{5} (\sqrt[3]{x-1})^5 \end{aligned}$$

3 Integração por partes

Sejam f e g funções deriváveis em um certo intervalo I . Usando a *regra do produto* para a derivação

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

obtemos

$$f(x)g'(x) = (f(x)g(x))' - f'(x)g(x).$$

Assim,

$$\int f(x)g'(x)dx = \int (f(x)g(x))'dx - \int f'(x)g(x)dx$$

o que nos fornece

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

que é a chamada *fórmula de integração por partes*. Tal fórmula é mais usualmente apresentada da seguinte maneira. Chamemos $u = f(x)$ e $dv = g'(x)dx$, de modo que

$$du = f'(x)dx \text{ e } v = g(x)$$

e assim temos a outra forma para a *fórmula de integração por partes*

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 103. Calculemos a integral

$$\int x \cos x dx.$$

Para aplicar a fórmula de integração por partes devemos escolher convenientemente u e dv observando que u deve ser derivada e dv deve ser integrada, de modo que a integral resultante se torne mais simples do que a integral original. No presente caso, façamos

$$u = x \text{ e } dv = \cos x dx$$

o que nos dá

$$du = dx \text{ e } v = \text{sen } x$$

donde

$$\int x \cos x dx = x \text{sen } x - \int \text{sen } x dx = x \text{sen } x + \cos x + C.$$

Exemplo 104. Calculemos

$$\int x^2 \cos x dx.$$

Chamemos $u = x^2$ e $dv = \cos x dx$ para obter

$$du = 2x dx \quad \text{e} \quad \int dv = \int \cos x dx,$$

e assim $v = \text{sen } x$. Logo,

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \text{sen } x - \int (\text{sen } x) 2x dx$$

e observemos que devemos integrar por partes o termo

$$\int x \text{sen } x dx.$$

Façamos

$$u = x \quad \text{e} \quad dv = \text{sen } x dx$$

o que fornece

$$du = dx \quad \text{e} \quad v = -\cos x.$$

Daí,

$$\int x \text{sen } x = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \text{sen } x + C.$$

Voltando à integral $\int x^2 \cos x dx$, teremos

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \text{sen } x + 2x \cos x - 2 \text{sen } x + C_1,$$

em que C_1 é a constante $-2C$.

Para nos certificarmos de que os cálculos efetuados estão corretos, podemos derivar a função

$$x^2 \text{sen } x + 2x \cos x - 2 \text{sen } x + C_1$$

cujos resultados devem ser $x^2 \cos x$. De fato,

$$\begin{aligned} & (x^2 \text{sen } x + 2x \cos x - 2 \text{sen } x + C_1)' \\ &= 2x \text{sen } x + x^2 \cos x + 2 \cos x - 2x \text{sen } x - 2 \cos x \\ &= x^2 \cos x, \end{aligned}$$

o que mostra que os cálculos efetuados estão corretos. Evidentemente, após o estudante adquirir prática no processo de integração por partes, esta verificação final pode ser dispensada.

Deixaremos certas integrais por partes, envolvendo exponencial, logaritmos, etc., para aulas futuras.

Exemplo 105. Calculemos

$$\int x \operatorname{sen}(kx) dx.$$

em que k é uma constante não-nula. Façamos

$$u = x \text{ e } dv = \operatorname{sen}(kx) dx,$$

donde

$$du = dx \text{ e } v = -\frac{\cos(kx)}{k}$$

o que implica

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{sen}(kx) dx &= -\frac{x \cos(kx)}{k} + \frac{1}{k} \int \cos(kx) dx \\ &= -\frac{x \cos(kx)}{k} + \frac{1}{k^2} \operatorname{sen}(kx) + C. \end{aligned}$$

Observa-se que, ao calcularmos integrais indefinidas, sempre surge a chamada constante de integração. Em alguns casos pode-se determinar tal constante de integração. Vejamos um exemplo no qual isso ocorre.

Exemplo 106. Determinemos a curva que passa pelo ponto $(2, 3)$ e cuja declividade da reta tangente a ela, em cada um de seus pontos (x, y) , é dada por $-\frac{x}{y}$.

Seja $y = f(x)$ a equação dessa curva. Assim,

$$y' = -\frac{x}{y},$$

pois a derivada y' mede a declividade da reta tangente em cada um de seus pontos. Daí, $yy' = -x$ e observando que, usando a regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx}[y^2] = 2yy',$$

teremos $2yy' = -2x$. Logo

$$\frac{d}{dx}[y^2] = -2x$$

o que nos diz que y^2 é primitiva de $-2x$. Pela definição de primitiva, tem-se

$$y^2 = \int -2x dx = -x^2 + C,$$

em que C é a constante de integração. Assim,

$$x^2 + y^2 = C$$

é a expressão algébrica de todas as curvas cuja declividade da reta tangente em cada um de seus pontos é $-\frac{x}{y}$. Desta última expressão tem-se que $y \neq 0$. Além disso, como $x^2 + y^2 > 0$, quaisquer que sejam $(x, y), y \neq 0$, façamos $C = R^2, R > 0$, e daí

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \text{ ou } y = -\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Observando-se que no enunciado exige-se que o ponto $(3, 4)$ pertença à curva, façamos $x = 3$ e $y = 4$ para obter

$$3^2 + 4^2 = R^2 = 25$$

o que nos fornece $R = 5$, de modo que a curva procurada é $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ que é o semicírculo de centro $(0, 0)$ e raio 5.

4 Funções trigonométricas inversas

Introduziremos agora a noção de função trigonométrica inversa. Começemos com a inversa da função sen . Como é bem conhecido, a função sen não é injetiva e em vista disso não existirá sua inversa. No entanto, se restringirmos seu domínio, por exemplo, ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, teremos que a função sen , restrita a este intervalo,

$$\text{sen} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$$

é injetiva e sobrejetiva, de modo que existe a sua inversa, designada por arcsen ,

$$\text{arcsen} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Dessa maneira

$$y = \text{arcsen } x$$

é equivalente a dizer que

$$x = \text{sen } y.$$

Derivando ambos os membros de $x = \text{sen } y$, observando que y é função de x e usando a regra da cadeia, obtém-se

$$1 = y' \cos y.$$

Restringindo os valores de y ao intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, a fim de que $\cos y \neq 0$, o que restringirá os valores de x ao intervalo aberto $(-1, 1)$, obtém-se

$$y' = \frac{1}{\cos y}.$$

Como $x = \operatorname{sen} y$ implica $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$, teremos $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, o que nos fornece as seguintes regras para derivação e integração da função arcsen

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C \quad (10.1)$$

Tudo o que fizemos a fim de determinar uma função inversa para a função sen e calcular a derivada e a primitiva dessa inversa pode ser reproduzido para a função cos em que, nesse caso, restringimos x ao intervalo $(-1, 1)$, o que restringe y a $(0, \pi)$. Assim,

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arccos} x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\int -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \operatorname{arccos} x + C.$$

Vejam o que acontece no caso da função tangente. Observemos que essa função, restrita ao intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

$$\operatorname{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (-\infty, +\infty),$$

é injetiva e sobrejetiva (além de contínua, derivável, etc.), de modo que podemos definir sua inversa

$$\operatorname{tg} : (-\infty, +\infty) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

de modo que $y = \operatorname{arctg} x$ se, e somente se, $x = \operatorname{tg} y$. Derivando ambos os membros desta última igualdade, lembrando que y é uma função de x , e usando a regra da cadeia, obtemos

$$1 = y' \cdot \sec^2 y.$$

Como $\sec^2 y = 1 + \operatorname{arctg}^2 y = 1 + x^2$, teremos

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

de onde resulta

$$\int \frac{1}{1 + x^2} dx = (\operatorname{arctg} x) + C.$$

Vejam alguns exemplos de integrais nas quais aparecem termos da forma $\sqrt{k^2 - x^2}$ ou $\frac{1}{k^2 + x^2}$

Exemplo 107. Calculemos a integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{k^2 - x^2}} dx,$$

em que k é uma constante positiva. Observemos que a expressão $\frac{1}{\sqrt{k^2 - x^2}}$, a menos da constante k , é essencialmente aquela que aparece em (10.1). A fim de que elas se tornem exatamente iguais, façamos $x = ku$, de modo que $dx = kdu$ e daí

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{k^2 - x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{k^2 - k^2 u^2}} k du \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du \\ &= \arcsen u + C \\ &= \arcsen \left(\frac{x}{k} \right) + C. \end{aligned}$$

Exemplo 108. Calculemos a integral indefinida

$$\int \frac{1}{k^2 + x^2} dx.$$

Procedendo como no exemplo anterior, façamos $x = ku$, de onde $dx = kdu$, e assim

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{k^2 + x^2} dx &= \int \frac{k}{k^2 + k^2 u^2} du \\ &= \int \frac{1}{1 + u^2} du \\ &= \frac{1}{k} \operatorname{arctg} u + C \\ &= \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{k} \right) + C. \end{aligned}$$

Exemplo 109. Calculemos

$$\int x \arcsen x dx.$$

Façamos $u = \arcsen x$ e $dv = x dx$ de onde

$$du = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx, \quad v = \frac{x^2}{2}.$$

Portanto,

$$\int x \arcsen x dx = \frac{x^2}{2} \arcsen x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

em que esta última integral é resolvida por substituição. Mais precisamente, fazendo $x = \text{sen } \theta$, o que implica $dx = \cos \theta d\theta$, obtém-se

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \text{sen}^2 \theta d\theta = \frac{\theta}{2} - \frac{\text{sen } 2\theta}{4} + C = \frac{1}{2} \arcsen x - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C.$$

Portanto,

$$\int x \arcsen x dx = \frac{x^2}{2} \arcsen x - \frac{1}{4} \arcsen x + \frac{1}{4} x \sqrt{1-x^2} + C.$$

5 Exercícios resolvidos

1. Calcule $\int \frac{1}{x^6} dx$.

Solução. Basta observar que

$$\int \frac{1}{x^6} dx = \int x^{-6} dx$$

e aplicar a regra 4. Assim,

$$\int \frac{1}{x^6} dx = -\frac{1}{5} x^{-5} + C.$$

2. Calcule a integral $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$.

Solução. Observemos que

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int x^{-\frac{2}{3}} dx$$

Assim, segue da regra 4 que

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = 3\sqrt[3]{x} + C.$$

3. Calcule a integral indefinida $\int (1-x)\sqrt{x} dx$.

Solução. Inicialmente observemos que

$$\int (1-x)\sqrt{x} dx = \int (1-x)x^{\frac{1}{2}} dx = \int (x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}) dx$$

Usando agora a regra 7 e depois a regra 4, obtém-se

$$\begin{aligned} \int (1-x)\sqrt{x} dx &= \int x^{\frac{1}{2}} dx - \int x^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\frac{5}{2}} x^{\frac{5}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C \\ &= 2x^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} x \right) + C. \end{aligned}$$

4. Calcule $\int \sqrt[3]{1-x^2} x dx$.

Solução. Essa integral pode ser reescrita como segue

$$\int \sqrt[3]{1-x^2} x dx = -\frac{1}{2} \int (1-x^2)^{\frac{1}{3}} (-2x) dx$$

Agora basta aplicar a regra 8.

$$\int \sqrt[3]{1-x^2} x dx = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{4}{3}} (1-x^2)^{\frac{4}{3}} \right) + C = -\frac{3}{8} (1-x^2)^{\frac{4}{3}} + C.$$

5. Calcule $\int \sin^2 x \cos x dx$.

Solução. A resolução dessa integral é consequência imediata da regra 8.

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int (\sin x)^2 \cos x dx = \frac{1}{3} (\sin x)^3 + C.$$

6 Exercícios propostos

1. Calcule as primitivas (antiderivadas) a seguir:

(a) $\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}} dx$

(b) $\int \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} dx$

(c) $\int \cos 3x dx$

(d) $\int \frac{\operatorname{sen} z}{\cos^2 z} dz$

(e) $\int \frac{1}{1 + \cos x} dx$

(f) $\int (x-2)^{\frac{3}{2}} dx$

(g) $\int \frac{dx}{(x-1)^3}$

(h) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$

(i) $\int \sqrt{3x-1} dx$

(j) $\int (2x^2 + 3)^{\frac{1}{3}} x dx$

$$(k) \int 5\sqrt[3]{x^2} dx$$

$$(l) \int (x^2 - 1)\sqrt{x} dx$$

$$(m) \int \frac{\text{sen } \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$(n) \int (1 - x^2)^5 x dx$$

$$(o) \int (5\text{sen } x + 3 \cos x) dx$$

$$(p) \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) dx$$

$$(q) \int x\sqrt{x+1} dx$$

$$(r) \int \frac{x^2 + 1}{x^2} dx$$

$$(s) \int \cos^2 x dx$$

$$(t) \int \text{sen}^2 x dx$$

$$(u) \int \frac{3x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$$

$$(v) \int \frac{3}{\sqrt{1-4x^2}} dx$$

$$(w) \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

2. Encontre a equação da curva que passa pelo ponto $(1, 2)$ e cuja inclinação em cada ponto (x, y) , $x > 0$, é dada por $x^{\frac{1}{2}} + 2$.
3. Uma partícula se move em linha reta com velocidade $v(t) = t^2 + 2$. Determine a distância percorrida pela partícula, de $t = 1$ a $t = 3$.

7 Respostas dos exercícios propostos

1. (a) $\frac{1}{15} \sqrt{x} (15 + 10x + 3x^2) + C$
- (b) $x + \frac{1}{x+1} + C$
- (c) $\frac{1}{3} \sin(3x) + C$
- (d) $\frac{1}{\cos z} + C$
- (e) $\frac{x}{1 + \cos x} + C$
- (f) $\frac{2}{5} (x-2)^{\frac{5}{2}} + C$
- (g) $-\frac{1}{2(x-1)^2} + C$
- (h) $2\sqrt{x+3} + C$
- (i) $\frac{2}{9} (3x-1)^{\frac{3}{2}} + C$
- (j) $\frac{3}{16} (2x^2+3)^{\frac{4}{3}} + C$
- (k) $3x^{\frac{5}{3}} + C$
- (l) $2(\sqrt{x})^3 \left(\frac{1}{7}x^2 - \frac{1}{3}\right) + C$
- (m) $-2 \cos \sqrt{x} + C$
- (n) $-\frac{1}{12} (1-x^2)^6$
- (o) $-5 \cos x + 3 \operatorname{sen} x + C$
- (p) $-\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C$
- (q) $\frac{2}{15} (x+1)^{\frac{3}{2}} (-2+3x) + C$
- (r) $x - \frac{1}{x} + C$
- (s) $\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$
- (t) $\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} x 2x}{4} + C$
- (u) $-\frac{3}{4} \sqrt{1-4x^2} + C$
- (v) $\frac{3}{2} \operatorname{arcsen}(2x) + C$
- (w) $\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}x\right)$

2. $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x - \frac{2}{3}$

3. 12 unidades de comprimento

Nesta aula você aprendeu:

- a calcular primitivas de funções usando regras elementares de primitivação.
- a calcular primitivas de funções pelo método da substituição.
- a calcular primitivas de funções usando o método da integração por partes.