Cálculo II

Samuel da Cruz Canevari

CESAD
CENTRO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR A DISTÂNCIA - UFS

São Cristóvão/SE
2009

Cálculo II

Elaboração de Conteúdo
Samuel da Cruz Canevari

Capa
Hermeson Alves de Menezes

Reimpressão

Ficha catalográfica produzida pela Biblioteca Central Universidade Federal de Sergipe

C221c Canevari, Samuel da Cruz.
Cálculo II / Samuel da Cruz Canevari -- São Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2009.

1. Cálculo. 2. Matemática. I. Título.

CDU 517.2/.3

Presidente da República
Luiz Inácio Lula da Silva

Ministro da Educação
Fernando Haddad

Secretário de Educação a Distância
Carlos Eduardo Bielschowsky

Reitor
Josué Modesto dos Passos Subrinho

Vice-Reitor
Angelo Roberto Antoniolli

Chefe de Gabinete
Ednalva Freire Caetano

Coordenador Geral da UAB/UFS
Diretor do CESAD
Antônio Ponciano Bezerra

Vice-coordenador da UAB/UFS
Vice-diretor do CESAD
Fábio Alves dos Santos

Diretoria Pedagógica
Clotildes Farias (Diretora)
Hérica dos Santos Mota
Iara Macedo Reis
Daniela Souza Santos
Janaina de Oliveira Freitas

Diretoria Administrativa e Financeira
Edélzio Alves Costa Júnior (Diretor)
Sylvia Helena de Almeida Soares
Valter Siqueira Alves

Coordenação de Cursos
Djalma Andrade (Coordenadora)

Núcleo de Formação Continuada
Rosemeire Marcedo Costa (Coordenadora)

Núcleo de Avaliação
Guilhermina Ramos (Coordenadora)
Carlos Alberto Vasconcelos
Elizabete Santos
Marialves Silva de Souza

Núcleo de Serviços Gráficos e Audiovisuais
Giselda Barros

Núcleo de Tecnologia da Informação
João Eduardo Batista de Deus Anselmo
Marcel da Conceição Souza

Assessoria de Comunicação
Guilherme Borba Gouy

Coordenadores de Curso
Denis Menezes (Letras Português)
Eduardo Farias (Administração)
Haroldo Dorea (Química)
Hassan Sherafat (Matemática)
Hélio Mario Araújo (Geografia)
Lourival Santana (História)
Marcelo Macedo (Física)
Silmara Pantaleão (Ciências Biológicas)

Coordenadores de Tutoria
Edvan dos Santos Sousa (Física)
Geraldo Ferreira Souza Júnior (Matemática)
Janaína Couvo T. M. de Aguiar (Administração)
Priscilla da Silva Góes (História)
Rafael de Jesus Santana (Química)
Ronilse Pereira de Aquino Torres (Geografia)
Trícia C. P. de Sant'ana (Ciências Biológicas)
Vanessa Santos Góes (Letras Português)

NÚCLEO DE MATERIAL DIDÁTICO

Hermeson Menezes (Coordenador)
Edvar Freire Caetano
Isabela Pinheiro Ewerton
Lucas Barros Oliveira
Neverton Correia da Silva
Nycolas Menezes Melo

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
Cidade Universitária Prof. "José Aloísio de Campos"
Av. Marechal Rondon, s/n - Jardim Rosa Elze
CEP 49100-000 - São Cristóvão - SE
Fone(79) 2105 - 6600 - Fax(79) 2105- 6474

Sumário

1
LIVRO

1
AULA

Integrais Impróprias

META

Apresentar os conceitos e propriedades de integrais com extremos de integrações infinitos e integrais de funções com descontinuidade.

OBJETIVOS

Calcular áreas de regiões não limitadas.

PRÉ-REQUISITOS

Conceitos de funções reais, funções contínuas e o Teorema Fundamental do Cálculo.

1.1 Introdução

Caros alunos, estamos iniciando o curso de Cálculo II. Neste curso, faremos uso de bastantes conceitos e resultados vistos no curso de Cálculo I. Esta primeira aula tem por objetivo estender o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) e definir as Integrais Impróprias.

No TFC, os limites de integração, a e b em $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, são números reais e f uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Pode acontecer que, ao aplicarmos estes conceitos, seja preciso ou conveniente considerar os casos em que $a = -\infty,\ b = +\infty$, ou f seja descontínua em um ou mais pontos do intervalo. Nestas condições, é preciso ampliar conceito de integral e as técnicas de integração, de modo a incluir estes casos adicionais. Estas integrais, em que $a = -\infty,\ b = +\infty$ ou f é descontínua em $[a, b]$, são chamadas Integrais Impróprias. Nem sempre uma integral deste tipo representa um número real, isto é, nem sempre uma integral imprópria existe. Quando ela existe, seu valor é calculado levando-se em conta a generalização do conceito de integral definida.

1.2 Integrais Impróprias com Extremos de Integração Infinitos

Exemplo 1.2.1. Consideremos o problema de encontrar área da região limitada pela curva $y = e^x$, pelo eixo$-y$ e pela reta $x = b > 0$ como mostra a Figura 1.1 abaixo.

Se A unidades de área for a área da região, então

$$A = \int_0^b e^{-x}dx = -e^{-x}\big|_0^b = 1 - e^{-b} = 1 - \frac{1}{e^b}.$$

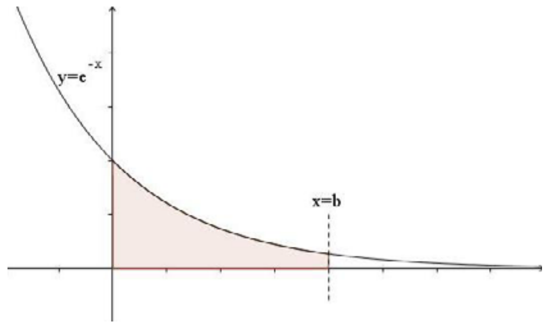

Figura 1.1: Área

Se deixarmos b crescer sem limitações, então

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}(1-\frac{1}{e^b}) = 1. \tag{1.1}$$

Segue da equação (1.1) que não importa quão grande seja o valor de b, a área da região será sempre menor do que 1 unidades de área.

A equação (1.1) estabelece que se $b > 0$ para todo $\epsilon > 0$ existe um $N > 0$ tal que

$$\text{se} \quad b > N \quad \text{então} \quad |\int_0^b e^{-x}dx - 1| < \epsilon.$$

Em lugar de (1.1) escrevemos $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}dx = 1$. Em geral temos as seguintes definições:

Definição 1.1. (i) Se f for contínua para todo $x \geq a$, então

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

se esse limite existir;

(ii) Se f for contínua para todo $x \leq b$, então

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

se esse limite existir;

(i) Se f for contínua para todos valores de x e c for um número real qualquer, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)dx$$

se esse limite existir;

Na definição acima, se o limite existir, diremos que a integral imprópria é convergente, caso caso contrário, diremos que é divergente.

Exemplo 1.2.2. Calcule a integral, se ela convergir: $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2}$. (Ver Figura 1.2)

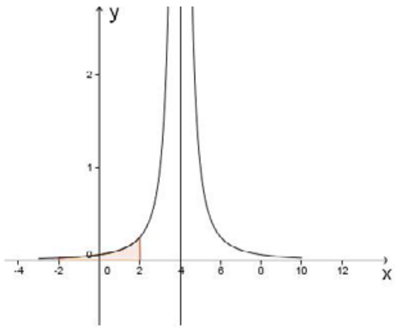

Figura 1.2: Área com extremo inferior indefinido.

Resolução:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2} &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^2 \frac{dx}{(4-x)^2} \\
&= \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{4-x}\right]_a^2 \\
&= \lim_{a\to-\infty}(\frac{1}{2} - \frac{1}{4-a}) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Exemplo 1.2.3. Estude a convergência da integral: $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$.

Resolução:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a xe^{-x}dx$$

Para calcular essa integral, usaremos integração por partes com $u = x,\ dv = e^{-x},\ du = dx$ e $v = -e^{-x}$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx &= \lim_{a\to+\infty}\left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_0^a \\ &= \lim_{a\to+\infty}(-ae^{-a} - e^{-a} + 1) \\ &= -\lim_{a\to+\infty}\frac{a}{e^a} - 0 + 1.\end{aligned}$$

Aplicando a regra de L'Hospital temos que

$$\lim_{a\to+\infty}\frac{a}{e^a} = \lim_{a\to+\infty}\frac{1}{e^a} = 0$$

e portanto

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = 1.$$

1.3 Integrais Impróprias com descontinuidades

Exemplo 1.3.1. Suponha que queremos obter a área da região do plano limitada pela curva cuja equação é $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, pelo eixo-x, pelo eixo-y e pela reta $x = 4$. Conforme ilustrado na Figura 1.3 abaixo:

Se for possível ter um número que represente a medida da área dessa região, ele será obtido pela integral

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Entretanto, o integrando é descontínuo no extremo inferior zero. Além disso, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, assim dizemos que o integrando tem

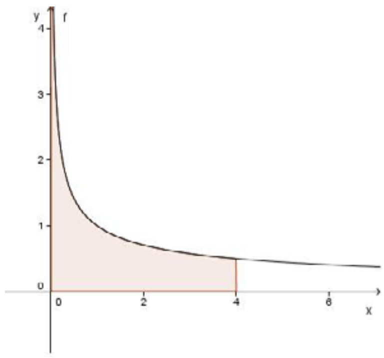

Figura 1.3: Área com descontinuidade no extremo inferior de integração

uma descontinuidade infinita no extremo inferior. Essa integral é imprópria e sua existência pode ser determinada da seguinte forma:

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to 0^+}\int_t^4 \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to 0^+}(2\sqrt{x}\big|_t^4) = \lim_{t\to 0^+}(4-2\sqrt{t}) = 4$$

logo 4 será a medida da área da região dada.

Mais geralmente temos a seguinte definição:

Definição 1.2. (i) Se f for contínua para todo x do intervalo semi-aberto à esquerda $(a,b]$, e se $\lim\limits_{x\longrightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$, então

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$$

se esse limite existir;

(ii) Se f for contínua para todo x do intervalo semi-aberto à direita $[a,b)$, e se $\lim\limits_{x\longrightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$, então

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx$$

se esse limite existir;

(iii) Se f for contínua para todos valores de x no intervalo $[a,b]$

exceto c, onde $a < c < b$ e se $\lim_{x \longrightarrow c} |f(x)| = +\infty$, então

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to c^-} \int_a^t f(x)dx + \lim_{s \to c^+} \int_s^b f(x)dx$$

se esse limite existir;

Exemplo 1.3.2. Calcule a integral, se ela for convergente: $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Resolução:

O integrando tem uma descontinuidade infinita em 1, ou seja, $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{dx}{(x-1)^2} = +\infty$, portanto, pela definição que acabamos de estabelecer, temos

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} &= \lim_{t \to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{(x-1)^2}dx + \lim_{s \to 1^+} \int_s^2 \frac{dx}{(x-1)^2}dx \\ &= \lim_{t \to 1^-} (-\frac{1}{x-1})|_0^t + \lim_{s \to 1^+} (-\frac{1}{x-1})|_s^2 \\ &= \lim_{t \to 1^-} (-\frac{1}{t-1} - 1) + \lim_{s \to 1^+} (\frac{1}{s-1} - 1) \end{aligned}$$

Como nenhum desses limites existe, a integral imprópria é divergente.

Se no exemplo anterior não tivéssemos notado a descontinuidade do integrando em 1, teríamos

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = (-\frac{1}{x-1})|_0^2 = -2.$$

Esse resultado é obviamente incorreto, uma vez que $\dfrac{1}{(x-1)^2}$ nunca é negativo.

Exemplo 1.3.3. Calcule a integral, se ela existir: $\displaystyle\int_0^1 x\ ln\ xdx$.

Resolução:

O integrando tem uma descontinuidade no extremo inferior. Portanto, escrevemos

$$\int_0^1 x\ ln\ xdx = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \int_t^1 x\ ln\ xdx$$

Para calcular essa integral, usaremos integração por partes com $u = ln\ x,\ dv = xdx,\ du = \frac{1}{x}dx$ e $v = \frac{x^2}{2}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\ ln\ xdx &= \lim_{t \longrightarrow 0^+} \int_t^1 x\ ln\ xdx = \lim_{t \longrightarrow 0^+} (\frac{1}{2}x^2\ ln\ x - \frac{1}{4}x)|_t^1 \\
&= \lim_{t \longrightarrow 0^+} (\frac{1}{2}ln(1) - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}t^2 ln(t) + \frac{1}{4}t) \\
&= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \lim_{t \longrightarrow 0^+} t^2 ln(t).
\end{aligned}$$

Note que $\lim_{t \longrightarrow 0^+} t^2 ln(t)$ é uma indeterminação to tipo $0.(-\infty)$. Para calcular esse limite, usaremos L'Hospital,

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} t^2 ln(t) = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{ln(t)}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{2}{t^3}} = \lim_{t \longrightarrow 0^+} -\frac{t^2}{2} = 0.$$

Logo,

$$\int_0^1 x\ ln\ xdx = -\frac{1}{4}.$$

1.4 Convergência e Divergência de Integrais Impróprias: Critério de Comparação

Algumas vezes é impossível encontrar o valor exato de uma integral imprópria, mais ainda assim é importante saber se ela é convergente ou divergente. Em tais casos o critério de comparação é útil.

Observamos, inicialmente, que se f for integrável em $[a, t]$, para todo $t > a$, e se $f(x) \geq 0$ em $[0, +\infty)$, então a função

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \geq a$$

será crescente em $[0, +\infty)$. De fato, se x_1 e x_2 são dois valores reais quaisquer, com $0 \leq x_1 < x_2$ então

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_a^{x_2} f(t)dt - \int_a^{x_1} f(t)dt = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \geq 0.$$

Segue que, $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty}\int_a^x f(t)dt$ ou será finito ou $+\infty$; será finito e existir $M \geq a$ tal que $\displaystyle\int_a^x f(t)dt \leq M$ para todo $x \geq a$.

Critério da Comparação: Sejam f e g duas funções integráveis em $[a,t]$, para todo $t > a$, e tais que, para todo $x \geq a,\ 0 \leq f(x) \leq g(x)$. Então

a) $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge $\Longrightarrow$ $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge.

b) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge $\Longrightarrow$ $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ diverge.

Demostração:

a) $\displaystyle\lim_{t\longrightarrow+\infty}\int_a^{+\infty} g(x)dx$ é finito, pois por hipótese, $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ é convergente. De $0 \leq f(x) \leq g(x)$, para todo $x \geq a$, resulta

$$\int_a^t f(x)dx \leq \int_a^t g(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

Sendo $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ crescente e limitada, resulta que $\displaystyle\lim_{t\longrightarrow+\infty}\int_a^t f(x)dx$ será finito e, portanto, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ será convergente.

b) análoga. $\square$

Exemplo 1.4.1. Verifique que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}sen^2x dx$ é convergente.

Resolução:

Note que,

$$0 \leq e^{-x}sen^2x \leq e^{-x}, \quad \text{para todo } \ x \geq 0$$

e mais

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{t\longrightarrow\infty}\int_0^t e^{-x}dx = \lim_{t\longrightarrow\infty}(e^{-t}+1) = 1,$$

logo, $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ é convergente. Segue do critério de comparação que $\int_0^{+\infty} e^{-x}sen^2xdx$ é convergente e, além disso, $\int_0^{+\infty} e^{-x}sen^2xdx \leq 1$.

Exemplo 1.4.2. Verifique que a integral imprópria $\int_1^{+\infty} \frac{x^3}{x^4+3}dx$ é divergente.

Resolução:

Note quem

$$\frac{x^3}{x^4+3} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{1+\frac{3}{x^4}}.$$

Para todo $x \geq 1$, $\frac{x^2}{1+\frac{3}{x^4}} \geq \frac{1}{4}$, e, portanto,

$$\frac{x^3}{x^4+3} \geq \frac{1}{4x} > 0.$$

De $\int_0^{+\infty} \frac{1}{4x}dx = +\infty$, segue, pelo critério de comparação, que $\int_1^{+\infty} \frac{x^3}{x^4+3}dx$ é divergente.

1.5 Resumo

Nesta aula, você aprendeu calcular a $\int_a^b f(x)dx$ onde $a = -\infty$ e $b = +\infty$; ou f é descontínua em um ou mais pontos do intervalo $[a, b]$. Esta ferramenta será bastante útil nas próximas aulas, onde estudaremos convergências de séries numéricas.

1.6 Atividades

01. Estude a convergência das integrais a seguir:

(a) $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x}dx$ (c) $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ (e) $\int_1^{+\infty} \frac{ln\ x}{x}dx$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ (d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}$ (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xdx$

02. Calcule as seguintes integrais, se existirem:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1 ln\ x\ dx$ (e) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{1}{4-x^2}dx$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ (d) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}$ (f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{cos\ x}{\sqrt{sen\ x}}dx$

03. Suponha f integrável em $[a, t)$, para todo $t \geq a$. Prove que se $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(x)|dx$ é convergente, então $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ também é convergente. (Sugestão: use que $0 \leq |f(x)| + f(x) \leq 2|f(x)|$ e que $f(x) = |f(x)| + f(x) - |f(x)|$)

04. Usando o exercício 03., prove que a integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} sen^3 x dx$ é convergente.

05. A integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{sen\ x}{x}dx$ é convergente ou divergente? Justifique sua resposta.

1.7 Comentário das Atividades

A atividade 01. é para você (aluno) praticar os conceitos vistos na Seção 1.2. Se você conseguiu resolver todos os ítens desta atividade, então você aprendeu a calcular integrais impróprias com extremos de integração infinitos.

A atividade 02. é referente a Seção 1.3. Conseguiu resolver todos os ítens desta atividade? Que bom!!! Você aprendeu a calcular integrais impróprias com descontinuidades.

Nas atividades 03., 04. e 05. devem usar os resultados vistos na Seção 1.4. Tais resultados são muito úteis no cálculo de integrais impróprias.

1.8 Referências

- GUIDORIZZI, H. L., **Um Curso de Cálculo** (Vol. 1 e 2). Rio de Janeiro: LTC Editora, 2006.

- STEWART, J., **Cálculo** (vol. 1 e 2). São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

- THOMAS, G. B., **Cálculo** (vol. 1 e 2). São Paulo: Addison Wesley, 2002.