

# **Cálculo II**

**Samuel da Cruz Canevari**



**São Cristóvão/SE**  
**2009**

# Cálculo II

**Elaboração de Conteúdo**  
Samuel da Cruz Canevari

---

**Capa**  
Hermeson Alves de Menezes

Reimpressão

---

Copyright © 2009, Universidade Federal de Sergipe / CESAD.  
Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização por escrito da UFS.

**FICHA CATALOGRÁFICA PRODUZIDA PELA BIBLIOTECA CENTRAL  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

C221c Canevari, Samuel da Cruz.  
Cálculo II / Samuel da Cruz Canevari -- São Cristóvão:  
Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2009.

1. Cálculo. 2. Matemática. I. Título.

CDU 517.2/.3

**Presidente da República**

Luiz Inácio Lula da Silva

**Chefe de Gabinete**

Ednalva Freire Caetano

**Ministro da Educação**

Fernando Haddad

**Coordenador Geral da UAB/UFS****Diretor do CESAD**

Antônio Ponciano Bezerra

**Secretário de Educação a Distância**

Carlos Eduardo Bielschowsky

**Vice-coordenador da UAB/UFS****Vice-diretor do CESAD**

Fábio Alves dos Santos

**Reitor**

Josué Modesto dos Passos Subrinho

**Vice-Reitor**

Angelo Roberto Antonioli

---

**Diretoria Pedagógica**

Clotildes Farias (Diretora)

Hérica dos Santos Mota

Iara Macedo Reis

Daniela Souza Santos

Janaina de Oliveira Freitas

**Núcleo de Avaliação**

Guilhermina Ramos (Coordenadora)

Carlos Alberto Vasconcelos

Elizabeth Santos

Marialves Silva de Souza

**Diretoria Administrativa e Financeira**

Edélzio Alves Costa Júnior (Diretor)

Sylvia Helena de Almeida Soares

Valter Siqueira Alves

**Núcleo de Serviços Gráficos e Audiovisuais**

Giselda Barros

**Núcleo de Tecnologia da Informação**

João Eduardo Batista de Deus Anselmo

Marcel da Conceição Souza

**Coordenação de Cursos**

Djalma Andrade (Coordenadora)

**Assessoria de Comunicação**

Guilherme Borba Gouy

**Núcleo de Formação Continuada**

Rosemeire Marcedo Costa (Coordenadora)

---

**Coordenadores de Curso**

Denis Menezes (Letras Portugues)

Eduardo Farias (Administração)

Haroldo Dorea (Química)

Hassan Sherafat (Matemática)

Hélio Mario Araújo (Geografia)

Lourival Santana (História)

Marcelo Macedo (Física)

Silmara Pantaleão (Ciências Biológicas)

**Coordenadores de Tutoria**

Edvan dos Santos Sousa (Física)

Geraldo Ferreira Souza Júnior (Matemática)

Janaina Couvo T. M. de Aguiar (Administração)

Priscilla da Silva Góes (História)

Rafael de Jesus Santana (Química)

Ronilse Pereira de Aquino Torres (Geografia)

Trícia C. P. de Santana (Ciências Biológicas)

Vanessa Santos Góes (Letras Portugues)

---

**NÚCLEO DE MATERIAL DIDÁTICO**

Hermeson Menezes (Coordenador)

Edvar Freire Caetano

Isabela Pinheiro Ewerton

Lucas Barros Oliveira

Neverton Correia da Silva

Nycolas Menezes Melo

---

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

Cidade Universitária Prof. "José Aloísio de Campos"

Av. Marechal Rondon, s/n - Jardim Rosa Elze

CEP 49100-000 - São Cristóvão - SE

Fone(79) 2105 - 6600 - Fax(79) 2105- 6474



# Sumário

<b>Aula 1: Integrais Impróprias</b>	<b>7</b>
1.1 Introdução . . . . .	8
1.2 Extremos de Integração Infinitos . . . . .	8
1.3 Integrais Impróprias com descontinuidades . . . . .	11
1.4 Convergência de Integrais Impróprias . . . . .	14
1.5 Resumo . . . . .	16
1.6 Atividades . . . . .	16
1.7 Comentário das Atividades . . . . .	17
1.8 Referências . . . . .	18
<b>Aula 2: Seqüências de Números Reais</b>	<b>19</b>
2.1 Introdução . . . . .	20
2.2 Seqüências e Subseqüências . . . . .	20
2.3 Seqüências Convergentes . . . . .	22
2.4 Seqüências Monótonas e Seqüência Limitadas . . . . .	29
2.5 Resumo . . . . .	34
2.6 Atividades . . . . .	34
2.7 Comentário das Atividades . . . . .	35
2.8 Referências . . . . .	36

<b>Aula 3: Séries de Números Reais</b>	<b>37</b>
3.1 Introdução . . . . .	38
3.2 Séries Numéricas . . . . .	38
3.3 Resumo . . . . .	54
3.4 Atividades . . . . .	55
3.5 Comentário das Atividades . . . . .	56
3.6 Referências . . . . .	57
<b>Aula 4: Séries de Potências</b>	<b>59</b>
4.1 Introdução . . . . .	60
4.2 Série de Potências . . . . .	60
4.3 Representação de Funções . . . . .	67
4.4 Resumo . . . . .	69
4.5 Atividades . . . . .	70
4.6 Comentário das Atividades . . . . .	70
4.7 Referências . . . . .	70
<b>Aula 5: Métodos de Representação de Funções em Séries de Potências</b>	<b>73</b>
5.1 Introdução . . . . .	74
5.2 Diferenciação e Integração . . . . .	74
5.3 Séries de Taylor e de Maclaurin . . . . .	76
5.4 Séries Binomiais . . . . .	83
5.5 Resumo . . . . .	87
5.6 Atividades . . . . .	88
5.7 Comentário das Atividades . . . . .	89
5.8 Referências . . . . .	90

<b>Aula 6: Equações Paramétricas</b>	<b>91</b>
6.1 Introdução . . . . .	92
6.2 Equações Paramétricas . . . . .	92
6.3 Cálculo com Curvas Paramétricas . . . . .	95
6.3.1 Tangentes . . . . .	96
6.3.2 Áreas . . . . .	100
6.3.3 Comprimento de Arco . . . . .	101
6.3.4 Área de Superfície . . . . .	102
6.4 Resumo . . . . .	103
6.5 Atividades . . . . .	103
6.6 Comentário das Atividades . . . . .	105
6.7 Referências . . . . .	106
<b>Aula 7: Curvas Polares</b>	<b>107</b>
7.1 Introdução . . . . .	108
7.2 Coordenadas Polares . . . . .	108
7.3 Curvas Polares . . . . .	112
7.4 Tangentes as Curvas Polares . . . . .	114
7.5 Áreas e Comprimentos em Coordenadas Polares . . . . .	116
7.6 Resumo . . . . .	120
7.7 Atividades . . . . .	120
7.8 Comentário das Atividades . . . . .	122
7.9 Referências . . . . .	122
<b>Aula 8: Funções com Valores Vetoriais</b>	<b>123</b>
8.1 Introdução . . . . .	124
8.2 Definições e Propriedades . . . . .	124
8.3 Limite e Continuidade . . . . .	126
8.4 Derivada . . . . .	127

8.5	Integral . . . . .	128
8.6	Resumo . . . . .	129
8.7	Atividades . . . . .	130
8.8	Comentário das Atividades . . . . .	131
8.9	Referências . . . . .	132
<b>Aula 9: Curvas Espaciais</b>		<b>133</b>
9.1	Introdução . . . . .	134
9.2	Movimentos no espaço . . . . .	134
9.3	Movimento no espaço: Velocidade e Aceleração . . . . .	142
9.4	Comprimento de Arco . . . . .	145
9.5	Resumo . . . . .	146
9.6	Atividades . . . . .	147
9.7	Comentário das Atividades . . . . .	149
9.8	Referências . . . . .	149
<b>Aula 10: Funções de Varias Variáveis Reais a Valores</b>		
	<b>Reais</b>	<b>151</b>
10.1	Introdução . . . . .	152
10.2	Noções Topológicas no $\mathbb{R}^2$ . . . . .	152
10.3	Funções . . . . .	158
10.4	Gráficos . . . . .	161
10.5	Curvas de Nível . . . . .	164
10.6	Resumo . . . . .	168
10.7	Atividades . . . . .	169
10.8	Comentário das Atividades . . . . .	170
10.9	Referências . . . . .	171



<b>Aula 11: Limites, Continuidade e Derivadas Parciais</b>	<b>173</b>
11.1 Introdução . . . . .	174
11.2 Limite . . . . .	174
11.3 Continuidade . . . . .	180
11.4 Derivadas Parciais . . . . .	184
11.5 Derivadas parciais de ordem superior . . . . .	187
11.6 Resumo . . . . .	190
11.7 Atividades . . . . .	191
11.8 Comentário das Atividades . . . . .	193
11.9 Referências . . . . .	193
<b>Aula 12: Funções Diferenciáveis</b>	<b>195</b>
12.1 Introdução . . . . .	196
12.2 Diferenciabilidade . . . . .	196
12.3 Plano Tangente e Reta Normal . . . . .	204
12.4 A Diferencial . . . . .	207
12.5 Resumo . . . . .	209
12.6 Atividades . . . . .	210
12.7 Comentário das Atividades . . . . .	213
12.8 Referências . . . . .	213
<b>Aula 13: Regra da Cadeia e Derivação Implícita</b>	<b>215</b>
13.1 Introdução . . . . .	216
13.2 Regra da Cadeia . . . . .	216
13.3 Derivação de funções definidas implicitamente . . . . .	218
13.4 Resumo . . . . .	221
13.5 Atividades . . . . .	223
13.6 Comentário das Atividades . . . . .	224
13.7 Referências . . . . .	224

<b>Aula 14: Vetor Gradiente e as Derivadas Direcionais</b>	<b>225</b>
14.1 Introdução . . . . .	226
14.2 Vetor Gradiente . . . . .	226
14.3 Derivada Direcional . . . . .	229
14.4 Resumo . . . . .	234
14.5 Atividades . . . . .	235
14.6 Comentário das Atividades . . . . .	237
14.7 Referências . . . . .	238
<b>Aula 15: Máximos e Mínimos</b>	<b>239</b>
15.1 Introdução . . . . .	240
15.2 Pontos de Máximo e Pontos de Mínimo . . . . .	240
15.3 Máximos e Mínimos sobre Conjuntos Compactos . . . . .	246
15.4 Máximos e Mínimos Condicionados . . . . .	250
15.5 Resumo . . . . .	256
15.6 Atividades . . . . .	258
15.7 Comentário das Atividades . . . . .	260
15.8 Referências . . . . .	260

**1**  
LIVRO

**1**  
AULA

# Integrais Impróprias

## **META**

Apresentar os conceitos e propriedades de integrais com extremos de integrações infinitos e integrais de funções com descontinuidade.

## **OBJETIVOS**

Calcular áreas de regiões não limitadas.

## **PRÉ-REQUISITOS**

Conceitos de funções reais, funções contínuas e o Teorema Fundamental do Cálculo.

## Integrais Impróprias

### 1.1 Introdução

Caros alunos, estamos iniciando o curso de Cálculo II. Neste curso, faremos uso de bastantes conceitos e resultados vistos no curso de Cálculo I. Esta primeira aula tem por objetivo estender o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) e definir as Integrais Impróprias.

No TFC, os limites de integração,  $a$  e  $b$  em  $\int_a^b f(x)dx$ , são números reais e  $f$  uma função contínua no intervalo  $[a, b]$ . Pode acontecer que, ao aplicarmos estes conceitos, seja preciso ou conveniente considerar os casos em que  $a = -\infty$ ,  $b = +\infty$ , ou  $f$  seja descontínua em um ou mais pontos do intervalo. Nestas condições, é preciso ampliar conceito de integral e as técnicas de integração, de modo a incluir estes casos adicionais. Estas integrais, em que  $a = -\infty$ ,  $b = +\infty$  ou  $f$  é descontínua em  $[a, b]$ , são chamadas Integrais Impróprias. Nem sempre uma integral deste tipo representa um número real, isto é, nem sempre uma integral imprópria existe. Quando ela existe, seu valor é calculado levando-se em conta a generalização do conceito de integral definida.

### 1.2 Integrais Impróprias com Extremos de Integração Infinitos

**Exemplo 1.2.1.** Consideremos o problema de encontrar área da região limitada pela curva  $y = e^x$ , pelo eixo  $-y$  e pela reta  $x = b > 0$  como mostra a Figura 1.1 abaixo.

Se  $A$  unidades de área for a área da região, então

$$A = \int_0^b e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^b = 1 - e^{-b} = 1 - \frac{1}{e^b}.$$



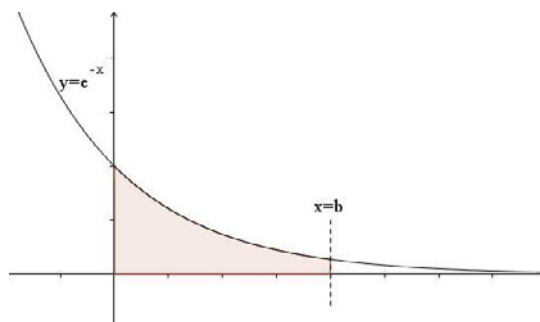


Figura 1.1: Área

Se deixarmos  $b$  crescer sem limitações, então

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{e^b}\right) = 1. \quad (1.1)$$

Segue da equação (1.1) que não importa quão grande seja o valor de  $b$ , a área da região será sempre menor do que 1 unidades de área.

A equação (1.1) estabelece que se  $b > 0$  para todo  $\epsilon > 0$  existe um  $N > 0$  tal que

$$\text{se } b > N \text{ então } \left| \int_0^b e^{-x} dx - 1 \right| < \epsilon.$$

Em lugar de (1.1) escrevemos  $\int_0^\infty e^{-x} dx = 1$ . Em geral temos as seguintes definições:

**Definição 1.1.** (i) Se  $f$  for contínua para todo  $x \geq a$ , então

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

se esse limite existir;

(ii) Se  $f$  for contínua para todo  $x \leq b$ , então

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

## Integrais Impróprias

se esse limite existir;

(i) Se  $f$  for contínua para todos valores de  $x$  e  $c$  for um número real qualquer, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x)dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x)dx$$

se esse limite existir;

Na definição acima, se o limite existir, diremos que a integral imprópria é convergente, caso contrário, diremos que é divergente.

**Exemplo 1.2.2.** Calcule a integral, se ela convergir:  $\int_{-\infty}^2 \frac{dx}{(4-x)^2}$ .  
(Ver Figura 1.2)

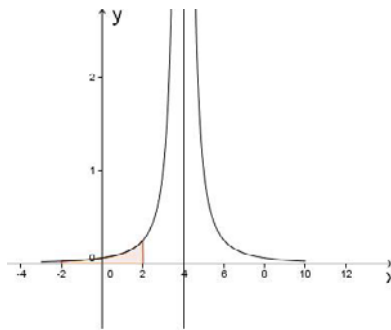


Figura 1.2: Área com extremo inferior indefinido.

**Resolução:**

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^2 \frac{dx}{(4-x)^2} &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^2 \frac{dx}{(4-x)^2} \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[ \frac{1}{4-x} \right]_a^2 \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4-a} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Exemplo 1.2.3.** Estude a convergência da integral:  $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$ .

**Resolução:**

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a xe^{-x} dx$$

Para calcular essa integral, usaremos integração por partes com  $u = x$ ,  $dv = e^{-x}$ ,  $du = dx$  e  $v = -e^{-x}$ . Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} xe^{-x} dx &= \lim_{a \rightarrow +\infty} [-xe^{-x} - e^{-x}]_0^a \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} (-ae^{-a} - e^{-a} + 1) \\ &= - \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{a}{e^a} - 0 + 1. \end{aligned}$$

Aplicando a regra de L'Hospital temos que

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{a}{e^a} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^a} = 0$$

e portanto

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = 1.$$

### 1.3 Integrais Impróprias com descontinuidades

**Exemplo 1.3.1.** Suponha que queremos obter a área da região do plano limitada pela curva cuja equação é  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ , pelo eixo-x, pelo eixo-y e pela reta  $x = 4$ . Conforme ilustrado na Figura 1.3 abaixo:

Se for possível ter um número que represente a medida da área dessa região, ele será obtido pela integral

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Entretanto, o integrando é descontínuo no extremo inferior zero. Além disso,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ , assim dizemos que o integrando tem

## Integrais Impróprias

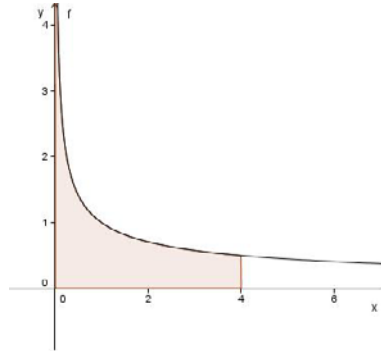


Figura 1.3: Área com descontinuidade no extremo inferior de integração

uma descontinuidade infinita no extremo inferior. Essa integral é imprópria e sua existência pode ser determinada da seguinte forma:

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^4 \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} (2\sqrt{x}|_t^4) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (4 - 2\sqrt{t}) = 4$$

logo 4 será a medida da área da região dada.

Mais geralmente temos a seguinte definição:

**Definição 1.2.** (i) Se  $f$  for contínua para todo  $x$  do intervalo semi-aberto à esquerda  $(a, b]$ , e se  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ , então

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x)dx$$

se esse limite existir;

(ii) Se  $f$  for contínua para todo  $x$  do intervalo semi-aberto à direita  $[a, b)$ , e se  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$ , então

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x)dx$$

se esse limite existir;

(iii) Se  $f$  for contínua para todos valores de  $x$  no intervalo  $[a, b]$



exceto  $c$ , onde  $a < c < b$  e se  $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = +\infty$ , então

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow c^-} \int_a^t f(x)dx + \lim_{s \rightarrow c^+} \int_s^b f(x)dx$$

se esse limite existir;

**Exemplo 1.3.2.** Calcule a integral, se ela for convergente:  $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ .

**Resolução:**

O integrando tem uma descontinuidade infinita em 1, ou seja,

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{dx}{(x-1)^2} = +\infty$ , portanto, pela definição que acabamos de estabelecer, temos

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{s \rightarrow 1^+} \int_s^2 \frac{dx}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \left(-\frac{1}{x-1}\right) \Big|_0^t + \lim_{s \rightarrow 1^+} \left(-\frac{1}{x-1}\right) \Big|_s^2 \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \left(-\frac{1}{t-1} - 1\right) + \lim_{s \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{s-1} - 1\right) \end{aligned}$$

Como nenhum desses limites existe, a integral imprópria é divergente.

Se no exemplo anterior não tivéssemos notado a descontinuidade do integrando em 1, teríamos

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \left(-\frac{1}{x-1}\right) \Big|_0^2 = -2.$$

Esse resultado é obviamente incorreto, uma vez que  $\frac{1}{(x-1)^2}$  nunca é negativo.

**Exemplo 1.3.3.** Calcule a integral, se ela existir:  $\int_0^1 x \ln x dx$ .

**Resolução:**

O integrando tem uma descontinuidade no extremo inferior. Portanto, escrevemos

$$\int_0^1 x \ln x dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 x \ln x dx$$

## Integrais Impróprias

Para calcular essa integral, usaremos integração por partes com  $u = \ln x$ ,  $dv = x dx$ ,  $du = \frac{1}{x} dx$  e  $v = \frac{x^2}{2}$ . Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \ln x dx &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 x \ln x dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x \right) \Big|_t^1 \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{2} \ln(1) - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} t^2 \ln(t) + \frac{1}{4} t \right) \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 \ln(t).\end{aligned}$$

Note que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 \ln(t)$  é uma indeterminação do tipo  $0 \cdot (-\infty)$ . Para calcular esse limite, usaremos L'Hospital,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 \ln(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(t)}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{2}{t^3}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} -\frac{t^2}{2} = 0.$$

Logo,

$$\int_0^1 x \ln x dx = -\frac{1}{4}.$$

## 1.4 Convergência e Divergência de Integrais Impróprias: Critério de Comparação

Algumas vezes é impossível encontrar o valor exato de uma integral imprópria, mais ainda assim é importante saber se ela é convergente ou divergente. Em tais casos o critério de comparação é útil.

Observamos, inicialmente, que se  $f$  for integrável em  $[a, t]$ , para todo  $t > a$ , e se  $f(x) \geq 0$  em  $[0, +\infty)$ , então a função

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \geq a$$

será crescente em  $[0, +\infty)$ . De fato, se  $x_1$  e  $x_2$  são dois valores reais quaisquer, com  $0 \leq x_1 < x_2$  então

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_a^{x_2} f(t) dt - \int_a^{x_1} f(t) dt = \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \geq 0.$$

Segue que,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(t)dt$  ou será finito ou  $+\infty$ ; será finito e existir  $M \geq a$  tal que  $\int_a^x f(t)dt \leq M$  para todo  $x \geq a$ .

**Critério da Comparação:** Sejam  $f$  e  $g$  duas funções integráveis em  $[a, t]$ , para todo  $t > a$ , e tais que, para todo  $x \geq a$ ,  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ . Então

a)  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  converge  $\implies \int_a^{+\infty} f(x)dx$  converge.

b)  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  diverge  $\implies \int_a^{+\infty} g(x)dx$  diverge.

**Demonstração:**

a)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t g(x)dx$  é finito, pois por hipótese,  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  é convergente. De  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ , para todo  $x \geq a$ , resulta

$$\int_a^t f(x)dx \leq \int_a^t g(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

Sendo  $F(t) = \int_a^t f(x)dx$  crescente e limitada, resulta que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x)dx$  será finito e, portanto,  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  será convergente.

b) análoga. □

**Exemplo 1.4.1.** Verifique que  $\int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen}^2 x dx$  é convergente.

**Resolução:**

Note que,

$$0 \leq e^{-x} \operatorname{sen}^2 x \leq e^{-x}, \text{ para todo } x \geq 0$$

e mais

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-t} + 1) = 1,$$

## Integrais Impróprias

logo,  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$  é convergente. Segue do critério de comparação que  $\int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen}^2 x dx$  é convergente e, além disso,  $\int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen}^2 x dx \leq 1$ .

**Exemplo 1.4.2.** Verifique que a integral imprópria  $\int_1^{+\infty} \frac{x^3}{x^4 + 3} dx$  é divergente.

**Resolução:**

Note quem

$$\frac{x^3}{x^4 + 3} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{1 + \frac{3}{x^4}}.$$

Para todo  $x \geq 1$ ,  $\frac{x^2}{1 + \frac{3}{x^4}} \geq \frac{1}{4}$ , e, portanto,

$$\frac{x^3}{x^4 + 3} \geq \frac{1}{4x} > 0.$$

De  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{4x} dx = +\infty$ , segue, pelo critério de comparação, que  $\int_1^{+\infty} \frac{x^3}{x^4 + 3} dx$  é divergente.

## 1.5 Resumo

Nesta aula, você aprendeu calcular a  $\int_a^b f(x) dx$  onde  $a = -\infty$  e  $b = +\infty$ ; ou  $f$  é descontínua em um ou mais pontos do intervalo  $[a, b]$ . Esta ferramenta será bastante útil nas próximas aulas, onde estudaremos convergências de séries numéricas.

## 1.6 Atividades

**01.** Estude a convergência das integrais a seguir:

(a)  $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x} dx$       (c)  $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx$       (e)  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$

(b)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$       (d)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$       (f)  $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$

**02.** Calcule as seguintes integrais, se existirem:

(a)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$       (c)  $\int_0^1 \ln x dx$       (e)  $\int_{-1}^2 \frac{1}{4-x^2} dx$

(b)  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$       (d)  $\int_1^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}} dx$       (f)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$

**03.** Suponha  $f$  integrável em  $[a, t)$ , para todo  $t \geq a$ . Prove que se  $\int_0^{+\infty} |f(x)| dx$  é convergente, então  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  também é convergente. (Sugestão: use que  $0 \leq |f(x)| + f(x) \leq 2|f(x)|$  e que  $f(x) = |f(x)| + f(x) - |f(x)|$ )

**04.** Usando o exercício 03., prove que a integral  $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^3 x dx$  é convergente.

**05.** A integral  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  é convergente ou divergente? Justifique sua resposta.

## 1.7 Comentário das Atividades

A atividade 01. é para você (aluno) praticar os conceitos vistos na Seção 1.2. Se você conseguiu resolver todos os itens desta atividade, então você aprendeu a calcular integrais impróprias com extremos de integração infinitos.

A atividade 02. é referente a Seção 1.3. Conseguiu resolver todos os itens desta atividade? Que bom!!! Você aprendeu a calcular

## Integrais Impróprias

integrais impróprias com descontinuidades.

Nas atividades 03., 04. e 05. devem usar os resultados vistos na Seção 1.4. Tais resultados são muito úteis no cálculo de integrais impróprias.

### 1.8 Referências

- GUIDORIZZI, H. L., **Um Curso de Cálculo** (Vol. 1 e 2). Rio de Janeiro: LTC Editora, 2006.
- STEWART, J., **Cálculo** (vol. 1 e 2). São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.
- THOMAS, G. B., **Cálculo** (vol. 1 e 2). São Paulo: Addison Wesley, 2002.