1
LIVRO

Seqüências de Números Reais

2
AULA

META

Estudar seqüências de números reais.

OBJETIVOS

Estudar a convergência de seqüências numéricas infinita.

PRÉ-REQUISITOS

Funções Reais, Limites, Derivadas, Integrais de funções reais e a Aula 01.

2.1 Introdução

Nesta aula estudaremos as seqüências numéricas infinitas. Tais seqüências pode ser pensadas como uma lista de números escritos em uma ordem definida:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

O principal objetivo desta aula, é estudar a convergência de tais seqüências, em outras palavras, queremos calcular o limite dessas seqüências quando n tende ao infinito.

2.2 Seqüências e Subseqüências

Definição 2.3. Uma seqüência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ para a qual denotamos o valor de x em n por x_n em vez de $x(n)$.

Geralmente usamos a notação $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para representar a seqüência $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Às vezes a notaremos também por

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots).$$

Dizemos que x_n é o termo de ordem n ou que x_n é o n-ésimo termo da seqüência.

Quando quisermos explicitar que a imagem da seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está contida em $A \subset \mathbb{R}$ escrevemos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$.

Exemplo 2.2.1. Seja $a \in \mathbb{R}$ e tomemos $x_n = a$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é constante.

Exemplo 2.2.2. Seja a seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = 2^n$. Temos

$$x_0 = 2^0,\ x_1 = 2^1,\ x_2 = 2^2, \ldots$$

Exemplo 2.2.3. Seja a seqüência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ Temos

$$s_1 = 1,\ s_2 = 1+2,\ s_3 = 1+2+3, \ldots$$

Exemplo 2.2.4. Seja a seqüência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Temos

$$s_1 = 1,\ s_2 = 1+\frac{1}{2},\ s_3 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \ldots$$

Exemplo 2.2.5. Considere a seqüência

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} t^k\right)_{n\in\mathbb{N}},\ t \neq 0 \text{ e } t \neq 1.$$

Vamos verificar que

$$s_n = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}.$$

Solução:

Note que

$$s_n = 1 + t + t^2 + \ldots + t^{n-1} + t^n. \tag{2.1}$$

Multiplicando ambos os membros de (2.1) por t, obtemos

$$ts_n = t + t^2 + t^3 + \ldots + t^n + t^{n+1}. \tag{2.2}$$

Subtraindo membro a membro (2.1) e (2.2), teremos

$$s_n(1-t) = 1 - t^{n+1}.$$

Logo

$$s_n = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}.$$

Observe que s_n é a soma dos termos da Progressão Geométrica $1, t, t^2, t^3, \ldots, t^n$.

Definição 2.4. Dizemos que $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma subseqüência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se existe uma seqüência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ com $n_k < n_{k+1},\ \forall k \in \mathbb{N}$, tal que $y_k = x_{n_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.2.6. Sejam $a, r \in \mathbb{N}$. Considere a seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = a + (n-1)r,\ n \geq 1$. Note que a seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma Progressão Aritmética de primeiro termo a e razão r. A Progressão Aritmética $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de termo inicial a e razão $2r$ é uma subseqüência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De fato, tomando $n_k = 2k-1$ $(k \in \mathbb{N})$ obtemos:

$$x_{n_k} = a + (n_k - 1)r = a + (2k-2)r = a + (k-1)(2r) = y_k.$$

2.3 Seqüências Convergentes

Intuitivamente, uma seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para x se seus termos se aproximam de x quando n cresce. Esta idéia não está todo errada. Porém, ela pode induzir a uma idéia equivocada de convergência. Somos tentados a dizer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x quando a distância entre x_n e x diminui à medida que n cresce. Não é bem assim. Veja a figura 2.4.

Ela Foge um pouco do assunto "seqüências de números reais"mais ilustra bem o que queremos dizer por "se aproximar". Imagine que, partindo do ponto A, percorremos no sentido anti-horário o caminho desenhado como indicado pelas setas. Ninguém duvida, e com razão, de que estaremos assim nos aproximando do ponto O. Porém, a idéia de que a nossa distância ao ponto O decresce com o tempo mostra-se errada. Convença-se disto percebendo que passamos primeiro pelo ponto B antes de chegar a C e, entretanto, o segmento $\overline{BO}$ é menor que o segmento $\overline{CO}$. De fato, a distância a O cresce quando percorremos o segmento $\overline{BC}$. Podemos perceber

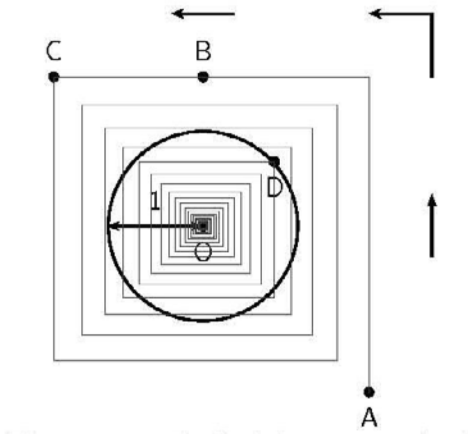

Figura 2.4: Espiral da Convergência

que existem muitos trechos do caminho sobre os quais a distância a O é crescente com o tempo, de modo que não existe nenhum ponto a partir do qual a distância a O passe a ser decrescente com o tempo.

Continuemos analisando a Figura 2.4 em busca da boa definição de convergência. Observamos que nossa distância a O fica tão pequena quando quisermos, bastando para isto que continuemos andando por um tempo suficientemente longo. Por exemplo, nossa distância a O será menor que 1 depois que passamos pelo ponto D. Ou seja, em certo instante entramos na bola de raio 1 entrada em O e dela não saímos mais. Da mesma forma, a partir de outro instante (futuro) entramos na bola de raio 1/2, centrada em O, e aí ficamos.De modo geral, dado qualquer número positivo ϵ, existe um instante a partir do qual nossa distância a O será menos que ϵ. Aí está a definição. Para seqüências reais ela é expressa da seguinte maneira:

Definição 2.5. Um seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita convergente se existe

$x \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ tal que } \quad n \geq M \Longrightarrow \ |x_n - x| \leq \epsilon.$$

Neste caso, escrevemos $x_n \longrightarrow x$ e dizemos que x é limite da seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou que x_n converge para (ou tende a) x quando n tende a mais infinito ($n \longrightarrow +\infty$). Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge, então dizemos que ela é divergente.

Existem seqüências divergentes que possuem limite! Isto é apenas um jogo de palavras. A definição seguinte diz que certas seqüências têm limites que não são números reais. Não diremos que tais seqüências são convergentes.

Definição 2.6. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência. Dizemos que x_n tende a mais infinito quando n tende a mais infinito ou que mais infinito é limite da seqüência e escrevemos

$$x_n \longrightarrow +\infty \ \text{ ou } \ \lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = +\infty$$

se,

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ tal que } \quad n \geq M \Longrightarrow \ x_n \geq M.$$

Definição 2.7. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência. Dizemos que x_n tende a menos infinito quando n tende a mais infinito ou que menos infinito é limite da seqüência e escrevemos

$$x_n \longrightarrow -\infty \ \text{ ou } \ \lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = -\infty$$

se,

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ tal que } \quad n \geq M \Longrightarrow \ x_n \leq M.$$

Observamos que as definições acima são exatamente as mesmas já vistas quando tratamos com limite de uma função $f(x)$ quando

$x \longrightarrow +\infty$; deste modo, tudo aquilo que dissemos sobre os limites da forma $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$ aplica-se aqui.

Exemplo 2.3.1. Seja $x \in \mathbb{R}$ e considere a seqüência dada por $x_n = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos que $x_n \longrightarrow x$. De fato, $|x_n - x| = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, podemos escrever

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ tal que } \ n \geq N \Longrightarrow |x_n - x| < \epsilon.$$

Exemplo 2.3.2. Considere a seqüência dada por $x_n = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que $x_n \longrightarrow 0$. Dado $\epsilon > 0$, tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \frac{1}{\epsilon}$. Temos então $0 < \frac{1}{N} < \epsilon$. Mas se $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq N$, então $x_n = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} = x_N$. Logo podemos escrever

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ tal que } \ n \geq N \Longrightarrow |x_n - 0| < \epsilon.$$

O leitor talvez conheça a notação $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x_n = x$ para $x_n \longrightarrow x$. Vamos refletir sobre ela. Por enquanto, façamos de conta que não conhecemos a definição de limite. Suponhamos que ao abrir um livro de Cálculo, pela primeira vez, encontremos as seguintes inscrições:

$$x_n \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad x_n \longrightarrow 1.$$

Não ficaríamos chocados. Porém, se estivesse escrito

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} x_n = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \longrightarrow +\infty} x_n = 1.$$

Seríamos levados a concluir que $0 = 1$. Ora, é o sinal " $=$ " que nos leva a esta confusão. Se não tivermos a unicidade do limite, então a notação $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x_n = x$ é fortemente enganosa.

Teorema 2.1. Sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência e $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x_n \longrightarrow x$ e $x_n \longrightarrow y$. Então $x = y$.

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que $x \neq y$. Seja $\epsilon = \frac{|x-y|}{2} > 0$. Como $x_n \longrightarrow x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Longrightarrow |x_n - x| < \epsilon.$$

Também temos $x_n \longrightarrow y$. Logo existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N' \Longrightarrow |x_n - y| < \epsilon.$$

Seja n o maior dos números N e N'. Para tal n as duas conclusões anteriores são válidas. Temos então

$$|x - y| \geq |x - x_n| + |x_n - y| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |x - y|.$$

Concluímos que $|x - y| < |x - y|$, o que é um absurdo. ■

Exemplo 2.3.3. (Teorema do Confronto) Suponha que exista um natural n_1 tal que, para todo $n \geq n_1$, $a_n \leq b_n \leq c_n$. Prove que se

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n = L = \lim_{n \longrightarrow +\infty} c_n$$

com $L \in \mathbb{R}$, então

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} b_n = L.$$

Demonstração: Como $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} a_n = L = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} c_n$, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ que podemos supor maior que n_1, tal que se $n > N \Longrightarrow$

$$L - \epsilon < a_n < L + \epsilon \quad \text{e} \quad L - \epsilon < c_n < L + \epsilon.$$

Tendo em vista a hipótese,

$$n > n_0 \Longrightarrow L - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \epsilon$$

e, portanto,

$$n > n_0 \Longrightarrow L - \epsilon < b_n < L + \epsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} b_n = L.$$

Exemplo 2.3.4. Suponha $0 < t < 1$. Mostre que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1}{1-t}.$$

Demonstração: Temos pelo Exemplo 2.2.5 que

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}$$

. Logo

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n} t^k = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1-t^{n+1}}{1-t} = \frac{1}{1-t}.$$

■

A proxima proposição nos fornece um critério para testarmos a convergência de uma seqüência dada.

Proposição 1. Uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tende a x se, e somente se, toda subseqüência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tende a x.

Demonstração: Suponhamos que exista $x \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Seja $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma subseqüência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, isto é, $y_k = x_{n_k}$ para alguma seqüência $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ estritamente crescente. Mostremos que $y_k \longrightarrow x$. Seja $\epsilon > 0$. Como $x_n \longrightarrow x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $|x_n - x| < \epsilon$. Como $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é estritamente crescente, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq K$, então $n_k \geq N$. Segue que

$$k \geq K \Longrightarrow |y_k - x| < \epsilon.$$

Portanto $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge para x. A recíproca é imediata (basta observar que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma subseqüência de si mesma). ■

Exemplo 2.3.5. A seqüência $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ é divergente. De fato, se ela fosse convergente, então pela proposição anterior todas as suas subseqüências seriam convergente para o mesmo limite. Porém, $(1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$ e $(0, 0, 0, 0, 0, \ldots)$ são duas de suas subseqüências sendo que a primeira converge para 1 e a segunda para 0.

Como corolário da proposição anterior, obtemos que se x_n tende a x, então x_{n+2008} tende a x. Não há nada de especial com o número 2008. Mais geralmente, fixado $p \in \mathbb{N}$, temos que se x_n tende a x, então x_{n+p} tende a x. É fácil perceber que a recíproca também é válida, ou seja, se para algum $p \in \mathbb{N}$ temos que x_{n+p} tende a x, então x_n tende a x. A importância deste fato é o seguinte: Se conhecemos alguma propriedade que garanta a convergência de uma seqüência e soubermos que tal propriedade só é válida a partir do $p-$ésimo termo então, ainda sim, podemos concluir que a seqüência é convergente. Vejamos um exemplo esclarecedor.

Exemplo 2.3.6. Sabemos que seqüências constantes são convergentes. Considere a seqüência (não constante) dada por $x_n = \lfloor 1000/n \rfloor$, sendo $\lfloor x \rfloor$ a função Parte Inteira de x, definida abaixo:

$$\lfloor x \rfloor = m \quad \text{se} \quad m \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad m \leq x \leq m + 1.$$

É fácil ver que $x_n = 0$ para todo $n > 1000$. Ou seja, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é constante a partir do seu milésimo-primeiro termo. Concluímos que ela é convergente.

Teorema 2.2. Toda seqüência convergente é limitada.

Demonstração: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência convergente para $x \in \mathbb{R}$. Tomemos $\epsilon = 1$ na definição de seqüência convergente, concluímos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $|x_n - x| < 1$, isto é, $x_n \in (x-1, x+1)$. Tomando

$$a = min\{x_1, \ldots, x_N, x-1\} \quad \text{e} \quad b = max\{x_1, \ldots, x_N, x+1\}$$

temos imediatamente que $x_n \in [a, b]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. ■

2.4 Seqüências Monótonas e Seqüência Limitadas

A recíproca do Teorema 2.2 é falsa como mostra o Exemplo 2.3.5. Porém, existem algumas recíprocas parciais que veremos nesta seção.

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência. Dizemos que tal seqüência é crescente se, quaisquer que sejam $m, n \in \mathbb{N}$,

$$m < n \Longrightarrow x_m \leq x_n.$$

Se $x_m \leq x_n$ for trocado por $x_m \geq x_n$, então diremos que a seqüência é decrescente.

Uma seqüência é dita monótona se for crescente ou decrescente.

Dizemos que a seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada inferiormente se existir um número real α tal que, para $x_n \geq \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dizemos que a seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente se existir um número real β tal que, para $x_n \leq \beta$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Uma seqüência é dita limitada se for limitada inferiormente e superiormente.

O teorema que enunciaremos, e provaremos a seguir, será muito importante para o que segue.

Teorema 2.3. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente e limitada superiormente, então $x_n \longrightarrow \sup\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Da mesma forma, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente e limitada inferiormente, então $x_n \longrightarrow \inf\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

Demonstração: Vamos provar apenas a primeira parte do teorema já que a segunda se demonstra de modo análogo. Seja $s = \sup\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Dado $\epsilon > 0$, tome $N \in \mathbb{N}$ tal que $x - \epsilon < x_N \leq s$. Logo, para $n \geq N$, temos $x - \epsilon < x_N \leq x_n \leq s$. Concluímos daí que $|x_n - s| < \epsilon$. ■

O teorema que acabamos de provar conta-nos que para uma seqüência crescente só há duas possibilidades: convergente ou divergente para $+\infty$. Será convergente se for limitada superiormente e divergirá para $+\infty$ se não for limitada superiormente.

Exemplo 2.4.1. A seqüência de termo geral $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ é convergente ou divergente? Justifique.

Solução: Observamos, inicialmente, que a seqüência é crescente. De fato, qualquer que sejam os naturais m e n, com $1 \leq m < n$, tem-se

$$s_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2}$$

e

$$s_n = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Como $\displaystyle\sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2} > 0$, resulta que $s_n > s_m$.

Vamos provar a seguir que a seqüência é limitada superiormente.

Temos (Veja Figura 2.5)

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2} dx$$

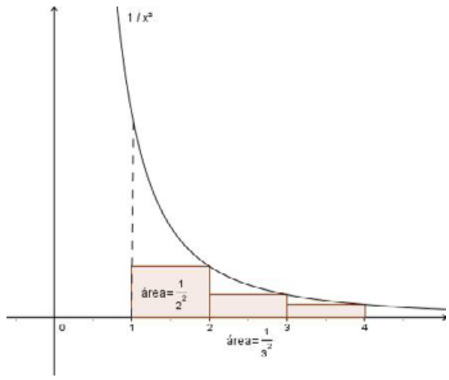

Figura 2.5: Soma Inferior

Como a seqüência de termo geral $\int_1^n \frac{1}{x^2}$ é crescente e

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_1^n \frac{1}{x^2} dx = \lim_{n \longrightarrow +\infty} (\frac{-1}{n} + 1) = 1$$

resulta

$$s_n \leq 2, \ \forall n \geq 1.$$

Segue que a seqüência é convergente, pois é crescente e limitada superiormente por 2.

Exemplo 2.4.2. A seqüência de termo geral $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ é convergente ou divergente? Justifique.

Solução:

Para todo $n \geq 1$, (Veja Figura 2.6)

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx$$

Como

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \ln n + 1 = +\infty$$

resulta

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} s_n = +\infty.$$

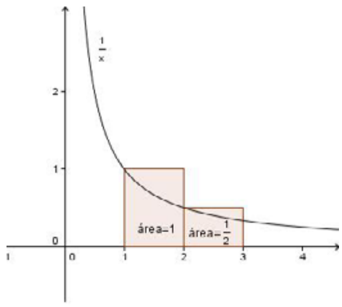

Figura 2.6: Soma Superior

Exemplo 2.4.3. Investigue seqüência de termo geral x_n definida pela relação de recorrência:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + 6), \ \forall n > 1.$$

Solução: Observamos, inicialmente, que a seqüência é crescente. De fato, usaremos indução finita:

1) se $n = 1$ então $x_1 = 2 < 4 = x_2$;

2) suponhamos que $x_{k-1} < x_k, \ \forall k \geq 2$;

3) provemos que $x_k < x_{k+1}, \ \forall k \geq 2$: Temos que $x_{k-1} < x_k$. Somando 6 dew ambos os lados da última desigualdade, obtemos $x_{k-1} + 6 < x_k + 6$. Agora, multiplicando, ambos os lados da última desigualdade, por $\frac{1}{2}$, concluímos que $\frac{1}{2}(x_{k-1} + 6) < \frac{1}{2}(x_k + 6)$, ou seja,

$$x_k < x_{k+1}, \ \forall k \geq 2.$$

Vamos provar agora, usando indução finita, que a seqüência é limitada superiormente:

1) se $n = 1$ então $x_1 = 2 < 6$;

2) suponhamos que $x_{k-1} < 6, \ \forall k \geq 2$;

3) Provemos que $x_k < 6, \ \forall k \geq 2$: Temos que $x_{k-1} < 6$. Somando 6

de ambos os lados da última desigualdade, obtemos $x_{k-1}+6 < 12$. Agora, multiplicando, ambos os lados da última desigualdade, por $\frac{1}{2}$, concluímos que $\frac{1}{2}(x_{k-1}+6) < 6$, ou seja,

$$x_k < 6, \ \forall k \geq 2.$$

Portanto, a seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente e limitada superiormente, logo é convergente, digamos que para L. Aplicando o limite, quando n tende a infinito, de ambos os lados de $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n+6)$, temos:

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\longrightarrow+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{2}(x_n+6) \\
\Longrightarrow \quad & \lim_{n\longrightarrow+\infty} x_{n+1} = \frac{1}{2}(6 + \lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n) \\
\Longrightarrow \quad & L = \frac{1}{2}(6+L) \Longrightarrow L = 6.
\end{aligned}$$

Finalizamos esta Aula com o seguinte:

Teorema 2.4. (Bolzano-Weierstrass) Toda seqüência limitada possui uma subseqüência convergente.

Demonstração: Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência limitada. Considere o seguinte conjunto:

$$N = \{n \in \mathbb{N}; \ x_n > x_m, \ \forall m > n\}.$$

Existem duas possibilidades: N é infinito ou N é finito.

1) N é infinito: Escrevamos $N = \{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$ com $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$. Assim, se $i < j$ então $n_i < n_j$ e, como $n_i \in \mathbb{N}$, obtemos que $x_{n_i} > x_{n_j}$. Concluímos que a subseqüência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é decrescente. Sendo ela limitada obtemos, finalmente, que ela é convergente.

2) N é finito: Como N é finito, existe $n_1 \in \mathbb{N} \setminus N$ cota superior

de N. Ora, $n_1 \notin N$ logo, existe $n_2 > n_1$ (e, portanto, $n_2 \notin N$) tal que $x_{n_1} \leq x_{n_2}$. Mas $n_2 \notin N$ segue que existe $n_3 > n_2$ (e, portanto, $n_3 \notin N$) tal que $x_{n_2} \leq x_{n_3}$. Por indução, definimos uma subseqüência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que é crescente e, portanto, convergente (pois ela é limitada). ■

2.5 Resumo

Vimos que uma seqüência é uma função que associa a cada número natural um e só um número real. Deste modo, estudar seqüência de números reais é estudar um caso particular de função real cujo domínio é o conjunto dos números naturais.

O limite de uma seqüência é o limite do termo geral da seqüência, para n tendendo ao infinito. Quando este limite existe e é finito, dizemos que a seqüência é convergente e converge para o seu limite. Vimos, também, nesta aula, alguns principais resultados que nos auxiliam a estudar a convergência de uma seqüência qualquer.

Na próxima aula, estudaremos um seqüência especial denominada série numérica.

2.6 Atividades

01. Liste os dez primeiros termos da seqüência:

(a) $x_n = 1 - (0,2)^n$ (c) $x_1 = 1,\ x_n = 2x_{n-1} + 1$

(b) $x_n = \dfrac{(-2)^n}{n!}$ (d) $x_n = \dfrac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}$

02. Encontre o termo geral da seqüência:

(a) $\left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{8},\ \cdots\right\}$ (c) $\left\{1,\ -\frac{2}{3},\ \frac{4}{9},\ -\frac{8}{27},\ \cdots\right\}$

(b) $\left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots\right\}$ (d) $\{1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots\}$

03. Determine se a seqüência converge ou diverge. Se ela convergir, encontre seu limite:

(a) $x_n = \dfrac{n^3+3n+1}{4n^3+2}$ (e) $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{x^\alpha}$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$

(b) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ (f) $x_n = nsen\ \dfrac{1}{n}$

(c) $x_n = \dfrac{1}{n}sen\ \dfrac{1}{n}$ (g) $x_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)$

(d) $x_n = \dfrac{2^n}{3^{n+1}}$ (h) $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

04. Suponha que, para todo $n \geq 1$, $|x_n - x| \leq \frac{1}{n}$, onde x é um número real fixo. Calcule $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n$ e justifique.

05. Uma seqüência x_n é dada por

$$x_1 = \sqrt{2},\ x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}.$$

(a) Mostre que x_n é crescente e limitada superiormente por 3. Aplique o Teorema 2.3 para mostrar que a seqüência é convergente.

(b) Calcule $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n$.

2.7 Comentário das Atividades

Se você (aluno) conseguiu resolver as Atividades 01. e 02., então entendeu a definição de seqüências de números reais. Viu que uma seqüência nada mais é que uma função que associa a cada número natural (denominado índice) um e só um número real.

Na Atividade 03. você utilizou (ou utilizará) as propriedades de limites (vistas no Cálculo I) para testar a convergência das seqüência dadas.

A Atividade 04. você utilizou (ou deve utilizar) a seguinte propriedade de módulo de números reais:

$$|y-x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq y-x \leq a \Leftrightarrow x-a \leq y \leq x+a,\ \forall a, x, y \in \mathbb{R},\ a > 0.$$

Após utilizar essa propriedade, basta aplicar o limite para n tendendo ao infinito, de ambos os lados da desigualdade resultante.

Conseguiu resolver a Atividade 05.? Ótimo!!! Você aprendeu que toda seqüência monótona e limitada é convergente.

Lembrem-se sempre que há tutores a distância e presenciais para ajudá-los na resolução dessas atividades. Estudar em grupo com seus colegas, pode tornar a resolução dessas atividades mais fácil e interessante.

2.8 Referências

- GUIDORIZZI, H. L., **Um Curso de Cálculo** (Vol. 1 e 4). Rio de Janeiro: LTC Editora, 2006.
- STEWART, J., **Cálculo** (vol. 1 e 2). São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.
- THOMAS, G. B., **Cálculo** (vol. 1 e 2). São Paulo: Addison Wesley, 2002.