1
LIVRO

4
AULA

Séries de Potências

META

Apresentar os conceitos e as principais propriedades de Séries de Potências. Além disso, introduziremos as primeiras maneiras de escrever uma função dada como uma série de potências.

OBJETIVOS

Representar funções em séries de potências.

PRÉ-REQUISITOS

Séries Numéricas (Aula 3).

4.1 Introdução

Uma série de potências de x é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots$$

Observe que esta série pode ser vista como a generalização de um polinômio. O principal objetivo de estudar essas séries é que é possível (veremos a diante) representar uma função dada como uma série de potências.

Você pode imaginar por que queremos expressar uma função conhecida como uma soma infinita de termos. Veremos mais tarde que essa estratégia é útil para integrar funções que não têm antiderivadas elementares e para aproximar as funções por polinômios. Cientistas fazem isso para simplificar expressões que eles utilizam e para poder representar as funções em calculadoras e computadores.

Nesta aula, introduziremos os conceitos de séries de potências. Além disso, iniciaremos o estudo de representação de funções em séries de potências.

4.2 Série de Potências

Seja a_n, $n \geq 0$, uma seqüência numérica dada e seja x_0 um real dado. A série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n \tag{4.1}$$

denomina-se série de potências, com coeficientes a_n, em volta de x_0 (ou centrada em x_0). Se $x_0 = 0$, temos a série de potências em volta de zero:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots. \tag{4.2}$$

Para cada x fixo, a série de potências é uma série de constantes que podemos testar sua convergência ou divergência. Uma série de potências pode convergir para alguns valores de x e divergir para outros. A soma da série é uma função de x, cujo domínio é o conjunto de todos os x para os quais a série converge. Esta função assemelha a um polinômio. A única diferença é que f tem infinitos termos.

Exemplo 4.2.1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ é uma série de potências em volta de zero e com coeficientes $a_n = \dfrac{1}{n!}$.

Nosso objetivo, de agora em diante, é encontrar os valores de x para os quais uma série de potências é convergente.

Teorema 4.12. Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ for convergente para $x = x_1$, com $x_1 \neq 0$, então a série convergirá absolutamente para todo x no intervalo aberto $(-|x_1|, |x_1|)$.

Demonstração: Sendo, por hipótese, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_1^n$ convergente, segue que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n x_1^n = 0.$$

Tomando-se $\epsilon = 1$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$,

$$|a_n x_1^n| \leq 1.$$

Como

$$|a_n x_n| = |a_n x_1^n| \left|\frac{x}{x_1}\right|^n,$$

resulta que, para todo x e todo $n \geq N$,

$$|a_n x_n| \leq \left|\frac{x}{x_1}\right|^n.$$

Para $|x| < |x_1|$, a série geométrica $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$ é convergente. Segue do Teste da Comparação que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge absolutamente para todo x, com $|x| < |x_1|$. ■

Exemplo 4.2.2. A série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ converge para $x = -1$. Pelo Teorema anterior, a série converge absolutamente para todo $x \in (-1, 1)$. Para $x = -1$ a série não é absolutamente convergente.

Exemplo 4.2.3. Para quais valores de x a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n$ é convergente?

Solução: Usamos o Teste da Razão. Se fizermos a_n, como habitualmente, denotar o n-ésimo termo da série, então $a_n = n! x^n$. Se $x \neq 0$, temos

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left|\frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n}\right| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} (n+1)|x| = \infty$$

Pelo Teste da Razão, a série diverge quando $x \neq 0$. Então, a série converge apenas quando $x = 0$.

Exemplo 4.2.4. Para quais valores de x a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ é convergente?

Solução: Seja $a_n = \frac{(x-3)^n}{n}$. Então

$$\begin{aligned} \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left|\frac{(x-3)^{n+1}!}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-3)^n}\right| \\ &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} |x-3| = |x-3| \end{aligned}$$

Pelo Teste da Razão, a série dada é absolutamente convergente, e portanto convergente, quando $|x - 3| < 1$ e é divergente quando $|x - 3| > 1$. Agora

$$|x - 3| < 1 \Leftrightarrow -1 < x - 3 < 1 \Leftrightarrow 2 < x < 4$$

assim a série converge quando $2 < x < 4$ e diverge quando $x < 2$ e $x > 4$. O Teste da Razão não fornece informação quando $|x-3| = 1$; assim, devemos considerar $x = 2$ e $x = 4$ separadamente. Se colocarmos $x = 4$ na série, ela se tornará $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}$, a série harmonica, que é divergente. Se $x = 2$, a série é $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ que é convergente pelo Teste da Série Alternada. Então a série dada converge para $2 \leq x < 4$.

Exemplo 4.2.5. Encontre o domínio da função definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

. **Solução:** Seja $a_n = \dfrac{x^n}{n!}$. Então

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}\right| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n+1}|x| = 0 < 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Então pelo Teste da Razão, a série dada converge para todos os valores de x. Em outras palavras, o domínio da função dada é $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Para as séries de potências que temos vistos até agora, o conjunto de valores de x para os quais a série é convergente tem sempre sido um intervalo (um intervalo finito nos exemplos 4.2.2 e 4.2.4, o intervalo infinito $(-\infty, +\infty)$ no exemplo 4.2.5 e um intervalo colapsado $[0, 0] = \{0\}$ no exemplo 4.2.3). O teorema a seguir, diz que isso, em geral, é verdadeiro.

Teorema 4.13. Para uma dada série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ existem apenas três possibilidades:

(i) a série converge apenas quando $x = x_0$;

(ii) a série converge para todo $x \in \mathbb{R}$;

(iii)existe um número R tal que a série converge se $|x - x_0| < R$ e diverge de $|x - x_0| > R$. Nos extremos $x_0 - R$ e $x_0 + R$ a série poderá convergir ou não.

Demonstração: Fazendo $u = x - x_0$ na série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ obtemos $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n$, deste modo basta provarmos que

(i) a série converge apenas quando $u = 0$;

(ii) a série converge para todo $u \in \mathbb{R}$;

(iii)existe um número R tal que a série converge se $|u| < R$ e diverge de $|u| > R$. Nos extremos R e R a série poderá convergir ou não.

Provemos: Seja A o conjunto de todos $u \geq 0$ para os quais a série converge.

$1.^0$ Caso: $A = \{0\}$

Se a série convergisse para algum valor $u_1 \neq 0$, pelo Teorema 4.12, convergiria, também, para todo $u \in (-|u_1|, |u_1|)$, que contradiz a hipótese $A = \{0\}$. Logo, se $A = \{0\}$ a série convergirá apenas para $u = 0$.

$2.^0$ Caso: $A = (0, +\infty) = \mathbb{R}_+$

Para todo $u \in \mathbb{R}$, existe $u_1 > 0$ tal que

$$|u| < u_1.$$

Como a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_1^n$ é convergente, pelo teorema 4.12, a série convergirá absolutamente para todo u, com $|u| < u_1$. Portanto, a série converge absolutamente para todo u.

$3.^0$ Caso: $A \neq \mathbb{R}_+$ e $A \neq \{0\}$

Se, para todo $r > 0$, existisse $u_1 > r$ tal que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_1^n$$

fosse convergente, pelo teorema 4.12, a série seria absolutamente convergente para todo u, que contradiz a hipótese $A \neq \mathbb{R}_+$. Portanto, se $A \neq \mathbb{R}_+$, então A será limitado superiormente; logo, admitirá supremo R :

$$R = \sup A.$$

Como $A \neq \{0\}$, teremos, evidentemente, $R > 0$. Sendo R o supremo de A, para todo x com $|u| < R$, existe $u_1 \in A$, com $|u| < u_1$. Resulta novamente do teorema 4.12, que a série converge absolutamente para todo $u \in (-R, R)$. Fica a cargo do leitor verificar que a série diverge para todo u, com $|u| > R$. ■

O número R que aparece no Teorema anterior é chamado Raio de Convergência da série de Potência. Por convenção, o raio de convergência é $R = 0$ no caso (i) e $R = \infty$ no caso (ii).

Exemplo 4.2.6. Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+2)^n}{n2^n}.$$

Solução: Seja $a_n = (-1)^n \dfrac{(x+2)^n}{n2^n}$. Então

$$\begin{aligned}
\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}(x+2)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \cdot \frac{n2^n}{(-1)^n (x+2)^n} \right| \\
&= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{n}{n+1} |x+2| \\
&= \frac{1}{2}|x+2|.
\end{aligned}$$

Pelo Teste da Razão, a série dada converge se $\frac{1}{2}|x+2| < 1$ e diverge se $\frac{1}{2}|x+2| > 1$. Então, ela é convergente se $|x+2| < 2$ e divergente se $|x+2| > 2$. Isso significa que o raio de convergência é $R = \frac{1}{2}$.

A desigualdade $|x+2| < 2$ pode ser escrita como $-4 < x < 0$; assim, testamos a série nos extremos -4 e 0. Quando $x = -4$, a série é

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(-4+2)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

que é uma série harmonica e, portanto, diverge. Quando $x = 0$, a série é

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(0+2)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}.$$

que converge pelo Teste das Séries Alternadas. Então a série converge apenas quando $-4 < x \leq 0$, assim, o intervalo de convergência é $(-4, 0]$.

Exemplo 4.2.7. Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n.$$

Solução: Seja $a_n = n!(2x-1)^n$. Então

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{(n+1)!(2x-1)^{n+1}}{n!(2x-1)^n}\right| \\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}(n+1)|2x-1| = 0 < 1\end{aligned}$$

se, e somente se, $|2x-1| = 0$, ou seja, $x = \frac{1}{2}$. Então, o raio de convergência é $R = 0$. E o intervalo de convergência é $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

4.3 Representação de Funções em Séries de Potências

Nesta seção aprenderemos como representar certos tipos de funções como soma de séries de potências pela manipulação de séries geométricas ou pela diferenciação ou integração de tais séries.

Começaremos com uma equação que vimos antes:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad |x| < 1 \tag{4.1}$$

Encontramos essa equação no Exemplo 3.2.1, onde a obtivemos observando que ela é uma série geométrica com $a = 1$ e $r = x$. Mas aqui nosso ponto de vista é diferente. Agora nos referiremos à Equação 4.1 como uma expressão da função $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ como uma soma de uma série de potências.

Uma ilustração geométrica da Equação 4.1 é mostrada na Figura 4.8. Como a soma de uma série é o limite da seqüência de somas parciais, temos

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{n\longrightarrow\infty} S_n(x)$$

onde $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$ é a n-ésima soma parcial. Note que, quando n aumenta, $S_n(x)$ se torna uma aproximação de $f(x)$ para $-1 < x < 1$.

Exemplo 4.3.1. Expresse $f(x) = \dfrac{1}{1+9x^2}$ como a soma de uma série de potências e encontre o intervalo de convergência.

Solução: Temos que

$$\frac{1}{1+9x^2} = \frac{1}{1-[-(3x)^2]}$$

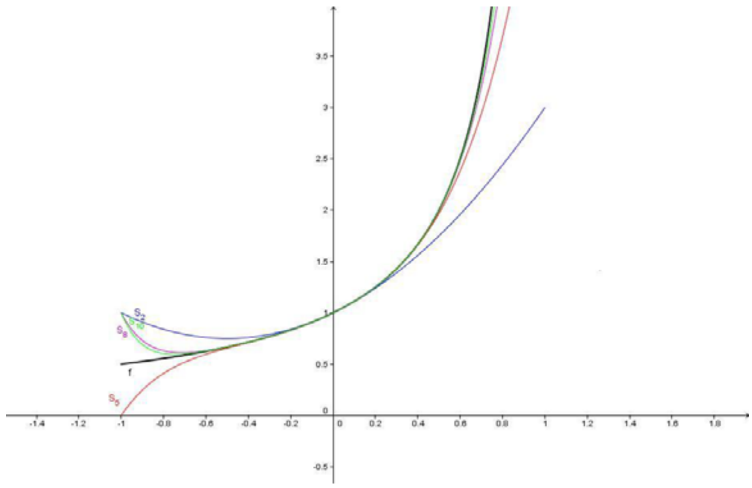

Figura 4.8: $f(x)$ e algumas somas parciais

Trocando x por $-(3x)^2$ na Equação 4.1, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+9x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty}[-(3x)^2]^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^{2n} x^{2n} \\ &= 1 - 3^2x^2 + 3^4x^4 - 3^6x^6 + \ldots\end{aligned}$$

Como essa é uma série geométrica, ela converge quando $|-(3x)^2| < 1$, isto é, $9x^2 < 1$, ou seja, $|x| < \dfrac{1}{3}$. Portanto o intervalo de convergência é $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

Exemplo 4.3.2. Encontre a representação em série de potências para $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$.

Solução: Note que

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)}$$

Trocando x por $-\frac{x}{2}$ na Equação 4.1, obtemos:

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$$

Como essa é uma série geométrica, ela converge quando $|-\frac{x}{2}| < 1$, isto é, $|x| < 2$. Portanto o intervalo de convergência é $(-2, 2)$.

4.4 Resumo

Uma série de potências de x em volta de x_0 (ou centrada em x_0) é uma série do tipo Seja . A série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n \tag{4.1}$$

onde $a_n,\ n \geq 0$ (coeficientes) é uma seqüência numérica dada e x_0 um real dado.

Para cada x fixo, a série de potências é uma série de constantes que podemos testar sua convergência ou divergência. Uma série de potências pode convergir para alguns valores de x e divergir para outros. A soma da série é uma função de x, cujo domínio é o conjunto de todos os x para os quais a série converge.

Dada uma série de potências de x, utilizamos principalmente o Critério da Razão, visto na Aula 3, para encontrarmos o domínio da série dada.

Vimos uma primeira maneira de representar funções em série de potências, através da série geométrica que foi estudada com detalhes na Aula 3.

Nosso objetivo com essa aula era que você (aluno) aprendesse a representar funções em séries de potências, através da série geométrica.

Na próxima aula, estudaremos outras maneiras (mais eficientes) de representar funções em séries de potências.

4.5 Atividades

01. Determine o domínio das seguintes séries de potências de x :

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n4^n x^n$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{n^n}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$

02. Encontre uma representação em série de potências para $\dfrac{x^3}{x+2}$. Encontre seu domínio.

4.6 Comentário das Atividades

Essas atividades tem o objetivo de você (aluno) exercitar os conceitos desenvolvidos nesta aula.

A Atividade 01. pede para encontrar o domínio de algumas séries de potências dadas. Para tanto, você precisa encontra o raio de convergência (usando o Critério da Razão) e testar a série nos extremos do intervalo de convergência da série.

Na Atividade 02. você deve utilizar a série geométrica para representar a função dada em série de potências.

4.7 Referências

- GUIDORIZZI, H. L., **Um Curso de Cálculo** (Vol. 1 e 4). Rio de Janeiro: LTC Editora, 2006.

- STEWART, J., **Cálculo** (vol. 1 e 2). São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

Livro de Cálculo II

- THOMAS, G. B., **Cálculo** (vol. 1 e 2). São Paulo: Addison Wesley, 2002.