1
LIVRO

5
AULA

Métodos de Representação de Funções em Séries de Potências

META

Apresentar os principais métodos de representação de funções em séries de potências.

OBJETIVOS

Representar funções em séries de potências.

PRÉ-REQUISITOS

Série de Potências (Aula 4).

5.1 Introdução

Na aula anterior pudemos encontrar representações para uma certa classe restrita de funções, utilizando as Séries Geométricas. Nesta aula, investigaremos problemas mais gerais: quais funções têm representações em série de potências? Como podemos achar tais representações?

Iniciaremos esta aula, com a diferenciação e integração de séries de potências que será uma ferramenta muito poderosa de representação de funções em série de potências. Posteriormente, estudaremos a Série de Taylor e a Série de MacLaurin. Mostraremos que, se uma função puder ser representada como uma série de potências, então essa função é igual à soma de sua série de Taylor.

5.2 Diferenciação e Integração de Séries de Potências

A soma de uma série de potências é uma função $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-x_0)^n$ cujo domínio é o intervalo de convergência da série. Gostaríamos de poder diferenciar e integrar tais funções, e o teorema a seguir (que não provaremos) diz que podemos fazer isso por diferenciação e integração de cada termo individual da série, como faríamos para um polinômio. Isso é chamado diferenciação e integração termo a termo.

Teorema 5.14. Se a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-x_0)^n$ tiver um raio de convergência $R > 0$, então a função f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-x_0)^n$$

é diferenciável (e portanto contínua) no intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$ e

(i) $f'(x) = c_1 + 2c_2(x - x_0) + 3c_3(x - x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} nc_n(x - x_0)^{n-1}$

$$
\begin{aligned}
(ii) \quad \int f(x)dx &= C + c_0(x - x_0) + c_1\frac{(x - x_0)^2}{2} + c_2\frac{(x - x_0)^3}{3} + \ldots \\
&= C + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1}
\end{aligned}
$$

Os raios de convergência da série de potência nas Equações (i) e (ii) são ambos R.

Observação 5.2. Embora o Teorema 5.14 diga que o raio de convergência permanece o mesmo quando uma série de potências é diferenciada ou integrada, isso não significa que o intervalo de convergência permanece o mesmo. Pode acontecer de a série original convergir em um extremo enquanto a série diferenciada diverge nesse ponto.

Exemplo 5.2.1. Expresse $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ como uma série de potências e encontre seu raio de convergência.

Solução: Diferenciando cada lado da equação

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

obtemos

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}.$$

De acordo com o Teorema 5.14, o raio de convergência da série diferenciada é o mesmo que o raio de convergência da série original, a saber, $R = 1$

Exemplo 5.2.2. Encontre uma representação em série de potências para $\ln(1-x)$ e seu raio de convergência.

Solução: Temos que

$$ln(1-x) = -\int \frac{1}{1-x}dx.$$

Mas

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Daí

$$ln(1-x) = -\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) dx = -\sum_{n=0}^{\infty} \int x^n dx = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Para determinarmos o valor de C, colocamos $x = 0$ nessa equação e obtemos $\ln(1-0) = C$. Então, $C = 0$ e

$$\begin{aligned} ln(1-x) &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

O raio de convergência é o mesmo que o da série original: $R = 1$.

5.3 Séries de Taylor e de Maclaurin

Veremos nessa seção que, se uma função f puder ser representada como uma série de potências, então f é igual à soma de sua Série de Taylor.

Supondo que f seja qualquer função que pode ser representada por uma série de potências.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \qquad (5.1) \\ &= c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \dots, \ |x-x_0| < R \end{aligned}$$

Queremos determinar os coeficientes c_n em função de f. Para começar, note que, se colocarmos $x = x_0$ na equação (5.1), então todos os termos depois do primeiro são nulos e obtemos:

$$f(x_0) = c_0.$$

Pelo Teorema 5.14, podemos diferenciar a série na equação (5.1) termo a termo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= c_1 + 2c_2(x - x_0) + \\ &\quad +3c_3(x - x_0)^2 + 4c_4(x - x_0)^3 + \ldots,\ |x - x_0| < R \end{aligned} \tag{5.2}$$

e a substituição de $x = x_0$ na equação (5.2) fornece:

$$f'(x_0) = c_1.$$

Agora diferenciando ambos os lados da equação (5.2) temos:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x - x_0) + \\ &\quad +3 \cdot 4c_4(x - x_0)^2 + \ldots,\ |x - x_0| < R. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Novamente colocando $x = x_0$ na equação (5.3). O resultado é

$$f''(x_0) = 2c_2.$$

Vamos aplicar o procedimento mais uma vez. A diferenciação da série na equação (5.3) fornece

$$\begin{aligned} f'''(x) &= 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4(x - x_0) + \\ &\quad +3 \cdot 4 \cdot 5c_4(x - x_0)^2 + \ldots\ |x - x_0| < R. \end{aligned} \tag{5.4}$$

e a substituição de $x = x_0$ na equação (5.4) resulta em

$$f'''(x_0) = 2 \cdot 3c_3 = 3!c_3.$$

Métodos de Representação de Funções em Séries de Potências

Agora você pode ver o padrão. Se continuarmos a diferenciar e substituir $x = x_0$, obteremos

$$f^{(n)}(x_0) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot nc_n = n!c_n.$$

Resolvendo essa equação para o n-ésimo coeficiente c_n, obteremos:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Esta fórmula permanecerá válida mesmo para $n = 0$ se adotarmos as convenções de que $0! = 1$ e $f^{(0)} = f$. Então provamos o teorema a seguir:

> A série de Taylor recebeu esse nome em homenagem ao matemático inglês Brook Taylor (1685-1731), e a série de Maclaurin tem esse nome em homenagem ao matemático escocês Colin Maclaurin (1698-1746), apesar do fato de a série de Maclaurin ser apenas um caso especial da série de Taylor. Mas a idéia da representação de funções particulares em somas de séries de Potências remonta a Newton, e a série geral de Taylor era conhecida pelo matemático escocês James Gregory em 1668 e pelo matemático suíço John Bernoulli na década de 1690. Taylor aperentemente não conhecia do trabalho de Gregory e Bernoulli quando publicou suas descobertas sobre séries em 1715 no livro *Methodus incrementorum directa et inversa.*

Teorema 5.15. Se f tiver uma representação (expansão) em série de potências em x_0, isto é, se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \qquad |x - x_0| < R$$

então seus coeficientes são dados pela fórmula

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Segue desse teorema que, se f tiver uma expansão em série de potências em x_0, então ela deve ser da forma a seguir:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (5.5) \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \end{aligned}$$

A série na equação (5.5) é chamada **Série de Taylor da função f em x_0** (ou ao redor de x_0 ou centrada em x_0). Para o caso especial $x_0 = 0$ a série de Taylor se torna

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots \qquad (5.6) \end{aligned}$$

Esse caso surge com freqüência, e lhe foi dado o nome especial se **Série de Maclaurin**.

Exemplo 5.3.1. Encontre a série de Maclaurin da função $f(x) = e^x$ e seu raio de convergência.

Solução: Temos que $f^{(n)}(x) = e^x$, então $f^{((n))}(0) = e^0 = 1$ para todo n. Portanto a série de Maclaurin para f é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Para encontrarmos o raio de convergência fazemos $a_n = \dfrac{x^n}{n!}$. Então

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

assim pelo Teste da Razão, a série converge para todo x, e o raio de convergência é $R = \infty$.

Segue do Teorema 5.15 e do exemplo 5.3.1 que se e^x tiver uma expansão em série de potências em 0, então

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

A questão agora é como determinar se e^x tem uma representação em série de potências.

Vamos investigar uma questão mais geral: sob quais circunstâncias uma função é igual à soma de uma série de Taylor? Em outras palavras, se f tiver derivadas de todas as ordens, quando é verdade que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Segue da definição de séries convergentes que, $f(x)$ é o limite das somas parciais. No caso da série de Taylor, as somas parciais são

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \end{aligned}$$

Note que $T_n(x)$ é um polinômio de grau n chamado polinômio de Taylor de grau n de f em x_0.

Em geral, $f(x)$ é a soma de uma série de Taylor se

$$f(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} T_n(x).$$

Se fizermos $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ de maneira que $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ então $R_n(x)$ é denominado resto da série de Taylor. Se pudermos de alguma maneira mostrar que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} R_n(x) = 0,$$

segue que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} T_n(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} [f(x) - R_n(x)] = f(x) - \lim_{n \longrightarrow \infty} R_n(x) = f(x).$$

Aqui, portanto, provamos o seguinte:

Teorema 5.16. Se $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, onde $T_n(x)$ é o polinômio de Taylor de grau n de f em x_0 e

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} R_n(x) = 0,$$

para $|x - x_0| < R$, então f é igual a soma de sua série de Taylor no intervalo $|x - x_0| < R$.

Ao tentar mostrar que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} R_n(x) = 0,$$

para uma função específica f, geralmente usamos o fato a seguir (que não demonstraremos)

Teorema 5.17. (Desigualdade de Taylor) Se $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ para $|x - x_0| \leq d$, então o resto $R_n(x)$ da série de Taylor satisfaz a desigualdade

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} \qquad \text{para} \qquad |x - x_0| \leq d.$$

Exemplo 5.3.2. Prove que e^x é igual à soma de sua série de Maclaurin.

Solução: Temos que $f^{(n+1)}(x) = e^x$ para todo n. Se d for qualquer número positivo e $|x| \leq d$, então $|f^{(n+1)}(x)|e^x \leq e^d$. Assim a desigualdade de Taylor, com $x_0 = 0$ e $M = e^d$, diz que

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} \qquad \text{para} \qquad |x| \leq d$$

e

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} = e^d \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Agora, segue do Teorema do Confronto que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} R_n(x) = 0$ para todos os valores de x. Pelo Teorema 5.16, e^x é igual à soma de sua Série de Maclaurin,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{para todo} \quad x. \tag{5.7}$$

Exemplo 5.3.3. Encontre a série de Taylor para $f(x) = e^x$ em $x_0 = 2$.

Solução: Temos que $f^{(n)}(2) = e^2$; e assim, colocando $x_0 = 2$ na definição de uma série de Taylor, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n$$

Novamente pode ser verificado, como no Exemplo 5.3.1, que o raio de convergência é $R = \infty$. Como no Exemplo 5.3.2, podemos verificar que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} R_n(x) = 0$, assim

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n \quad \text{para todo} \quad x. \tag{5.8}$$

Observe que temos duas expansão em série de potências da função e^x. A primeira, dada pela equação (5.7), é melhor se estivermos interessados em valores de e^x para x próximos de 0 e, a segunda, dada pela equação (5.8), é melhor se x estiver próximo de 2.

Exemplo 5.3.4. Encontre a série de Maclaurin da função $f(x) = sen\ x$ e prove que ela representa $sen\ x$ para todo x.

Solução: Temos que

$$\begin{aligned}
f'(x) &= cos\ x \Longrightarrow f'(0) = cos\ 0 = 1\\
f''(x) &= -sen\ x \Longrightarrow f''(0) = -sen\ 0 = 0\\
f'''(x) &= -cos\ x \Longrightarrow f'''(0) = -cos\ 0 = -1\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

Portanto a série de Maclaurin para f é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

É fácil ver que, $|f^{(n+1)}(x)| \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Assim a desigualdade de Taylor, com $x_0 = 0$ e $M = 1$, diz que

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1} \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}$$

e

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1} = 0$$

Agora, segue do Teorema do Confronto que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} R_n(x) = 0$ para todos os valores de x. Pelo Teorema 5.16, *sen* x é igual à soma de sua Série de Maclaurin, ou seja,

$$sen\ x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 5.3.5. Encontre a série de Maclaurin da função $f(x) = cos\ x$.

Solução: Temos que

$$cos\ x = \frac{d}{dx} sen\ x$$

e, pelo Exemplo 5.3.5, $sen\ x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, logo

$$\begin{aligned} cos\ x &= \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{d}{dx}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

Logo

$$cos\ x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}.$$

5.4 Séries Binomiais

Concluiremos esse capítulo com um exemplo muito importante: a série binomial, descoberta por Isac Newton. De fato, estamos aqui revertendo a ordem histórica: originalmente, a série binomial foi descoberta por Newton sem fazer uso da série de Taylor (então desconhecida). De certa forma, foi o estudo da série binomial uma das motivações de Newton no desenvolvimento do cálculo, daí sua importância histórica.

Métodos de Representação de Funções em Séries de Potências

Com o nosso conhecimento de s´eries de Taylor, porém, obteremos um caminho mais rápido e simples que o de Newton para expandir a função

$$(1+x)^k$$

em série de potências. Aqui, não estamos supondo que k é uma inteiro positivo! O argumento a seguir funciona para qualquer valor real de k (podendo ser inclusive negativo). Observe que uma vez obtida a expansão para $(1+x)^k$, obteremos facilmente uma expansão para $(x+y)^k$, por meio da igualdade $(x+y)^k = x^k(1+\frac{y}{x})^k$.

Teorema 5.18. Seja k um número real. A Série de Taylor para $f(x) = (1+x)^k$ em torno de $x = 0$ (chamada *Série Binomial*) é

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{n!} x^n;$$

seu raio de convergência é $R = 1$, e a série de Taylor converge para $f(x)$ no intervalo $(-1, 1)$.

Observe que quando k é um inteiro positivo, podemos escrever o n-ésimo coeficiente da série acima como

$$\binom{a}{b} = \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{n!}.$$

Neste caso os termos são todos nulos para $n > k$, e a igualdade de $(1+x)^k$ com sua série de Taylor nada mais é que a fórmula do binômio de Newton.

Observe que se definimos, motivados pelo caso que acabamos de discutir,

$$\binom{a}{b} = \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{n!} \quad \text{para} \quad n \geq 1; \quad \binom{k}{0} = 1$$

quaisquer que seja a constante real k, então a série Binomial to teorema pode ser escrita sob a forma

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$$

Para verificarmos o teorema, primeiro calculamos as derivadas de $f(x) = (1+x)^k$:

$$f^{(n)}(x) = k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)(1+x)^{k-n}.$$

Obtemos então para os coeficientes da série de Taylor:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{n!}.$$

Assim, obtemos a fórmula para a série de Taylor dada no enunciado do teorema. Para calcular o raio de convergência, utilizaremos o Teste da Razão. Observe que o termo geral da série é $a_n x^n$, logo para aplicarmos o teste temos q estudar o limite de

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}x\right|.$$

Temos

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x| &= \frac{|k(k-1)\dots(k-n)|}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|k(k-1)\dots(k-n+1)|}|x| \\ &= \frac{|k-n|}{n+1}|x|; \end{aligned}$$

Como k é uma constante, vemos que o limite dessa expressão quando $n \longrightarrow \infty$ é $L = |x|$. O teste da razão nos diz que a série converge de $L < 1$, e diverge de $L > 1$; ou seja: a série binomial converge para $|x| < 1$ e diverge para $|x| > 1$. A convergência da série nos casos em que o teste não dá informações, $x = 1, -1$, depende do valor de k e não será de interesse para nós.

Exemplo 5.4.1. Expanda $(8+x)^{1/3}$ em série de potências.

Solução: Usaremos a série binomial com $k = \frac{1}{3}$. O coeficiente binomial é

$$\begin{aligned} & \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{n!} \\ = & \frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\dots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!} \\ = & \frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{-5}{3}\right)\dots\left(\frac{4-3n}{3}\right)}{n!} \\ = & (-1)^{n+1}\frac{(1)\,(2)\,(5)\dots(3n-4)}{n!3^n} \end{aligned}$$

e, assim, quando $|x| < 1$,

$$(8+x)^{1/3} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(1)\,(2)\,(5)\dots(3n-4)}{n!3^n}x^n$$

Como Newton calculava... Newton fez uso da série binomial; a partir desta série ele calculou expansões para diversas funções. Vamos exemplificar o método de Newton calculando a série de Taylor de $f(x) = arcsen\ x$ em torno de $x = 0$. Primeiro notamos que

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$$

que é uma função da forma estudada anteriormente com $k = -1/2$, mas calculada em $-x^2$. Assim, $f'(x)$ pode ser expandida numa série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-x^2)^n,$$

onde $a_0 = 1$ e, para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{n!} \\ &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} \\ &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\dots\left(\frac{-2n+1}{2}\right)(-1)^n}{n!} \end{aligned}$$

Esta expansão é válida para $|-x^2| < 1$, isto é, $|x| < 1$. Como $(-x^2)^n = (-1)^n x^{2n}$, obtemos

$$(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)\,(3)\,(5)\ldots(2n-1)}{n!2^n} x^{2n} \quad \text{para} \quad |x| < 1.$$

Agora, observando que

$$arcsen\ x = \int_0^x (1-t^2)^{-1/2} dt,$$

e integrando termo a termo a expressão acima, obtemos

$$arcsen\ x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)\,(3)\,(5)\ldots(2n-1)}{n!2^n(2n+1)} x^{2n+1} \quad \text{para} \quad |x| < 1.$$

5.5 Resumo

Vimos, nesta aula, três métodos muito eficientes na representação de funções em série de potências.

O primeiro método é dado pelo Teorema 5.14 que trata-se da diferenciação e integração e séries de potências.

O segundo método é dado pela Série de Taylor: Se uma função f admitir expansão em série de potências então sua expansão em torno de x_0 é dada por

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots \end{aligned}$$

O Teorema 5.17, nos da uma condição suficiente para que uma dada função admita expansão em série de potências.

A série de Taylor em torno da origem é dada por

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} x^n \\ &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots \end{aligned}$$

Esta série é denominada Série de Maclaurin.

Terminamos essa aula, estudando da Série Binomial. Tal série é útil para expandirmos funções do tipo $(1+x)^k$ em série de potências.

Com essa aula, terminamos a primeira parte do curso de Cálculo II.

Nossa primeira avaliação tem o objetivo de avaliar o vosso conhecimento relativo às aulas 1,2,3,4 e 5.

Nas próximas aula, passaremos a estudar novos tipos de funções.

5.6 Atividades

01. (a) Use diferenciação para achar a representação em série de potências para

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Qual é o raio de convergência.

(b) Use o item (a) para encontrar uma série de potências para

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}.$$

(c) Use o item (b) para achar a série de potências para

$$f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^3}.$$

02. Encontre uma representação em série de potências para a função e determine o raio de convergência.

(a) $f(x) = \ln(1+x)$ (b) $f(x) = x\ln(1+x)$

03. Avalie a integral indefinida $\displaystyle\int \frac{x - tg^{-1}x}{x^3}$ como uma série de potências. Qual é o raio de convergência?

04. Assuma que a função $f(x) = xe^x$ admita expansão em série de potências em torno da origem e encontre sua expansão.

05. Assuma que a função $f(x) = x^3$ admita expansão em série de potências em torno de $x_0 = -1$ e encontre sua expansão.

06. Prove que a função $f(x) = cos^2 x$ admite expansão em série de potências em torno da origem e encontre tal expansão.

07. Use a série binomial para expandir a função $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^4}$ como uma série de potências. Encontre seu raio de convergência.

5.7 Comentário das Atividades

Essas atividades tem o objetivo de você (aluno) exercitar os conceitos desenvolvidos nesta aula.

Na resolução das atividades 01. e 02. você (aluno) deve utilizar o método de diferenciação e integração de série de potências e também as propriedades de série de potências. Se você conseguiu resolver essas atividades então entendeu os conceitos e o método de diferenciação e integração de série de potências.

A atividade 03. mostra uma das vantagens de representarmos funções em séries de potências. Para resolver a integral da atividade 03. você deve, inicialmente, expandir a função $f(x) = tg^{-1}x$ em série de potências, em torno da origem. Feito isso, substitua tal expansão no integrando e integra a expressão resultante. Note que a expressão resultante é um polinômio de fácil integração.

Na resolução das atividades 04., 05, 06. e 07, basta utilizar as séries de Taylor, de Maclaurin e a Binomial.

Se sentir muita dificuldade na resolução dessas atividades, volte ao inicio da aula e reveja com cuidado os conceitos apresentados. E não esqueça dos tutores, eles existem para ajuda-lo em vosso aprendizado.

5.8 Referências

- GUIDORIZZI, H. L., **Um Curso de Cálculo** (Vol. 1 e 4). Rio de Janeiro: LTC Editora, 2006.
- STEWART, J., **Cálculo** (vol. 1 e 2). São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.
- THOMAS, G. B., **Cálculo** (vol. 1 e 2). São Paulo: Addison Wesley, 2002.