1
LIVRO

6
AULA

Equações Paramétricas

META

Estudar funções que a cada ponto do domínio associa um par ordenado de $\mathbb{R}^2$

OBJETIVOS

Estudar movimentos de partículas no plano.

PRÉ-REQUISITOS

Ter compreendido os conceitos de funções reais, vistas no Cálculo 1.

6.1 Introdução

Até agora descrevemos as curvas planas, dando y como uma função de x $[y = f(x)]$ ou x em função de y $[x = g(y)]$ ou fornecendo a relação entre x e y que define y implicitamente como uma função de x $[f(x, y) = 0]$. Nesta aula discutiremos um novo método para descrever as curvas no plano. Esse método consiste em escrever as variáveis x e y em termos de uma terceira variável t, chamada parâmetro $[x = f(t),\ y = g(t)]$. Tais equações serão denominadas equações paramétricas.

6.2 Equações Paramétricas

Imagine que a trajetória de uma partícula que se move no plano é descrita pela curva dada na Figura 6.9. Note que é impossível descrever C por uma equação do tipo $y = f(x)$. Mas as coordenadas x e y da partícula são funções de uma terceira variável t (denominada **parâmetro**) e, assim, podemos escrever $x = f(t)$ e $y = g(t)$. Esse par de equações é, muitas vezes, uma maneira conveniente para descrever uma curva. Tais equações são denominadas **Equações Paramétricas**. Para cada valor de t determina um ponto (x, y), que podemos plotar em um plano coordenado. Quando t varia, o ponto $(x, y) = (f(t), g(t))$ varia e traça a curva C, que chamamos de **Curva Paramétrica**. Em muitas aplicações das curvas paramétricas, t denota o tempo e, portanto, podemos interpretar $(x, y) = (f(t), g(t))$ como a posição de uma partícula no tempo t.

Exemplo 6.2.1. Seja a curva paramétrica $\alpha(t) = (sen\, t,\ cos^2 t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Isto equivale as equações paramétricas $x = sen\ t,\ y =$

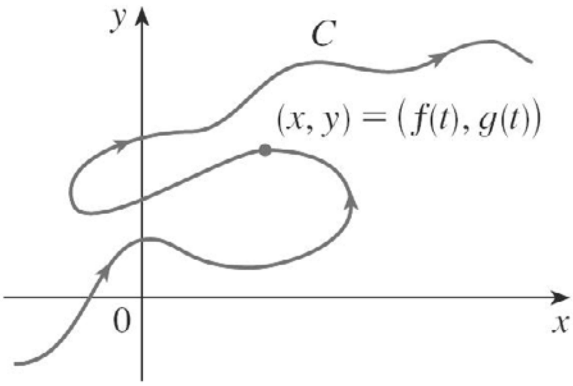

Figura 6.9: Curva no plano.

$cos^2 t$, com $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Pela relação fundamental, estas equações nos conduzem à equação cartesiana $y = 1 - x^2$, que é a equação de uma parábola. Na verdade, é apenas um ramo da parábola tal que $0 \leq x \leq 1$. (Veja a figura 6.10)

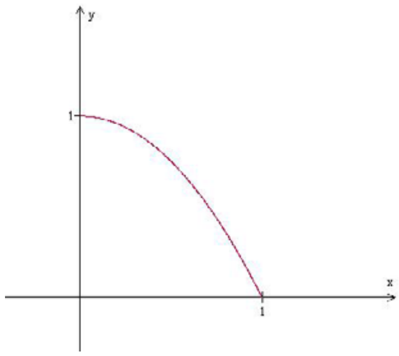

Figura 6.10: Ramos da parábola $y = 1 - x^2$.

Em geral, a curva com equações paramétricas

$$x = f(t) \quad y = g(t) \quad a \leq t \leq b$$

tem ponto inicial $(f(a), g(a))$ e ponto final $(f(b), g(b))$.

Exemplo 6.2.2. A curva representada pelas equações paramétricas $x = cos\ t,\ y = sen\ t,\ 0 \leq t \leq 2\pi$ é um círculo. De fato, eliminando o parâmetro t,

$$x^2 + y^2 = cos^2 t + sen^2 t = 1.$$

Note que, nesse exemplo, o parâmetro t pode ser interpretado como o ângulo (em radianos) mostrado na figura 6.11. Quando t aumenta de 0 a 2π, o ponto $(x, y) = (cos\ t, sen\ t)$ se move uma vez ao redor do círculo no sentido anti-horário partindo do ponto $(1, 0)$.

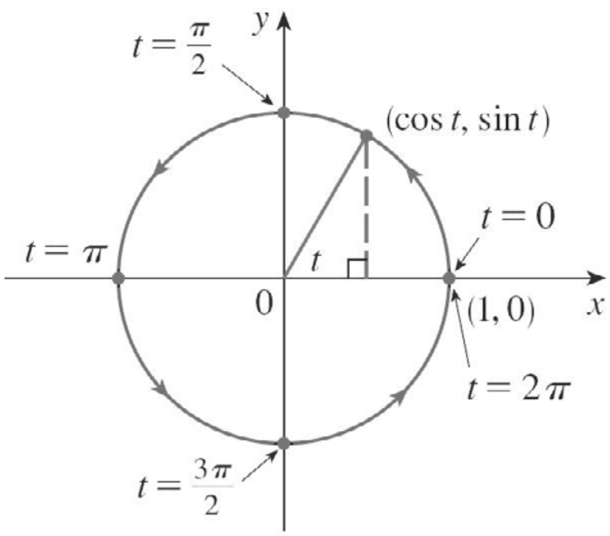

Figura 6.11: Círculo percorrido no sentido anti-horário.

Observe que a curva representada pelas equações paramétricas $x = sen\ 2t,\ y = cos\ 2t,\ 0 \leq t \leq 2\pi$ também é um circulo, pois eliminando o parâmetro t, temos que,

$$x^2 + y^2 = sen^2 2t + cos^2 2t = 1.$$

Mas quando t aumenta de 0 a 2π, o ponto $(x, y) = (sen\ 2t, cos\ 2t)$ começa em $(0, 1)$ e se move duas vezes ao redor do círculo no sentido horário, como indicado na figura 6.12.

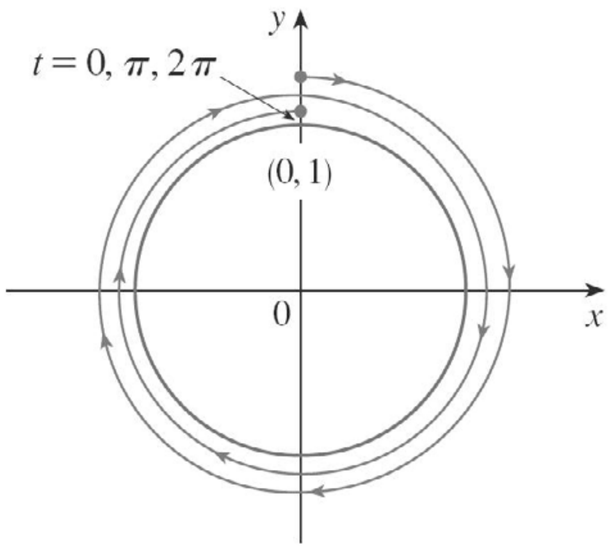

Figura 6.12: Círculo percorrido no sentido horário.

O exemplo acima mostra que diferentes conjuntos de equações paramétricas podem representar a mesma curva. Então distinguimos uma curva, que é um conjunto de pontos, e uma curva paramétrica, na qual os pontos são traçados em uma ordem particular.

Exemplo 6.2.3. Vamos descrever a curva de equações paramétricas $x = t^3$, $y = t^2$, com t real. É fácil ver que a equação cartesiana da curva é $x^2 = y^3$, ou seja $y = \sqrt[3]{x^2}$. (Veja a figura 6.13)

6.3 Cálculo com Curvas Paramétricas

Nesta seção vamos introduzir os métodos de cálculo com curvas paramétricas. Em particular, vamos resolver os problemas envolvendo tangentes, áreas, arco e superfície de área.

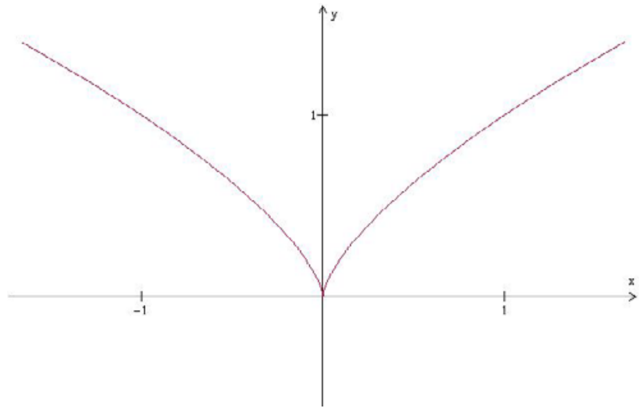

Figura 6.13: Curva Paramétrica.

6.3.1 Tangentes

Na seção anterior, vimos que algumas curvas definidas por equações paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$ podem também ser expressas pela eliminação do parâmetro na forma $y = F(x)$. Em geral temos o seguinte:

Teorema 6.19. Se f' for contínua e $f'(t) \neq 0$ para $a \leq t \leq b$, a curva paramétrica $x = f(t),\ y = g(t),\ a \leq t \leq b$, pode ser colocada na forma $y = F(x)$.

Se substituirmos $x = f(t)$ e $y = g(t)$ na equação $y = F(x)$, obteremos:

$$g(t) = F(f(t))$$

assim, se $g,\ F$ e f forem diferenciáveis, a Regra da Cadeia fornece

$$g'(t) = F'(f(t))f'(t) = F'(x)f'(t).$$

Se $f'(t) \neq 0$, podemos resolver para $F'(x)$:

$$F'(x) = \frac{g'(t)}{f'(t)} \tag{6.1}$$

Como a inclinação da tangente à curva $y = F(x)$ em $(x, F(x))$ é $F'(x)$, a Equação (6.1) nos permite encontrar tangentes a curvas paramétricas sem ter que eliminar o parâmetro. Usando a notação de Leibniz podemos reescrever a Equação (6.1) de uma maneira fácil de lembrar:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad \text{se} \quad \frac{dx}{dt} \neq 0 \tag{6.2}$$

Podemos ver da Equação (6.2) que a curva tem uma tangente horizontal quando $\frac{dy}{dt} = 0$ (desde que $\frac{dx}{dt} \neq 0$) e tem uma tangente vertical quando $\frac{dx}{dt} = 0$ (desde que $\frac{dy}{dt} \neq 0$). Essa informação é útil para esboçar as curvas paramétricas.

Para o estudo da concavidade da curva, é útil considerar $\frac{d^2y}{dx^2}$. Isso pode ser encontrado mudando y por $\frac{dy}{dx}$ na Equação (6.2):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} \quad \text{se} \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

Exemplo 6.3.1. Uma curva C é definida pelas equações paramétricas $x = t^2$ e $y = t^3 - 3t$.

(a) Mostre que C tem duas tangentes no ponto $(3, 0)$ e encontre suas equações.

(b) Encontre os pontos em C onde a tangente é horizontal ou vertical.

(c) Determine onde a curva sobre e desce e onde sua concavidade se encontra para cima ou para baixo.

Solução:

(a) Note que $y = t^3 - 3t = t(t^2 - 3) = 0$ quando $t = 0$ ou $t = \pm\sqrt{3}$. Portanto, o ponto $(3, 0)$ em C surge de dois valores do parâmetro, $t = \sqrt{3}$ e $t = -\sqrt{3}$. Isso indica que C intercepta ele mesmo em

$(3, 0)$. Como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 - 3}{2t} = \frac{3}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$$

a inclinação da tangente quando $t = \pm\sqrt{3}$ é

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{6}{2\sqrt{3}} = \pm\sqrt{3};$$

assim, as equações das tangentes em $(3, 0)$ são

$$y = \sqrt{3}(x - 3) \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{3}(x - 3).$$

(b) C tem uma tangente horizontal quando $\frac{dy}{dx} = 0$ isto é, $\frac{dy}{dt} = 0$ e $\frac{dx}{dt} \neq 0$. Uma vez que $\frac{dy}{dt} = 3t^2 - 3$, isso é apropriado quando $t^2 = 1$, isto é $t = \pm 1$. Os pontos correspondentes em C são $(1, -2)$ e $(1, 2)$. C tem uma tangente vertical quando $\frac{dx}{dt} = 2t = 0$, isto é, $t = 0$. O ponto correspondente em C é $(0, 0)$.

(c)Para determinar a concavidade, calculamos a derivada segunda:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)}{2t} = \frac{3(t^2 + 1)}{4t^3}.$$

Então a concavidade da curva é para cima quando $t > 0$ e para baixo quando $t < 0$.

(d) Usando as informações das partes (b) e (c), esboçamos C na Figura 6.14.

Exemplo 6.3.2. (a) Encontre a tangente para a ciclóide $x = r(\theta - sen\theta)$, $y = r(1 - cos\theta)$, no ponto $\theta = \frac{\pi}{3}$.

(b) Em que ponto a tangente é horizontal? Quando é vertical?

Solução:

(a) A inclinação da reta tangente é

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{r\ sen\theta}{r(1 - cos\theta)} = \frac{sen\theta}{1 - cos\theta}$$

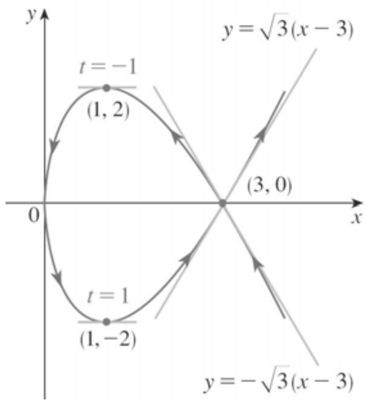

Figura 6.14: Curva referente ao Exemplo 6.3.1.

Quando $\theta = \frac{\pi}{3}$, temos

$$x = r(\frac{\pi}{3} - sen\frac{\pi}{3}) = r(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}) \quad y = r(1 - cos\frac{\pi}{3}) = \frac{r}{2}$$

e

$$\frac{dy}{dx} = \frac{sen\frac{\pi}{3}}{1 - cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Portanto a inclinação da tangente é $\sqrt{3}$ e sua equação é

$$y = \frac{r}{2} = \sqrt{3}(x - r\frac{\pi}{3} + r\frac{\sqrt{3}}{2}) \quad \text{ou} \quad \sqrt{3}x - y = r(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 2).$$

A tangente está esboçada na Figura 6.15.

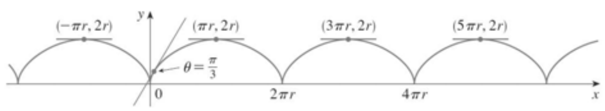

Figura 6.15: Ciclóide

(b) A tangente é horizontal quando $\frac{dy}{dx} = 0$, o que ocorre quando $sen\theta = 0$ e $1 - cos\theta \neq 0$, isto é, $\theta = (2n-1)\pi,\ n \in \mathbb{Z}$. O ponto correspondente da ciclóide é $((2n-1)\pi r, 2r)$.

Quando $\theta = 2nr$, tanto $\frac{dx}{d\theta}$ e $\frac{dy}{d\theta}$ são 0. a partir do gráfico parece que as tangentes são verticais naqueles pontos. Podemos verificar isso usando a Regra de L'Hôspital, como a seguir:

$$\lim_{\theta \longrightarrow 2n\pi^+} \frac{dy}{dx} = \lim_{\theta \longrightarrow 2n\pi^+} \frac{sen\theta}{1 - cos\theta} = \lim_{\theta \longrightarrow 2n\pi^+} \frac{cos\theta}{sen\theta} = \infty$$

Um cálculo similar mostra que $\displaystyle\lim_{\theta \longrightarrow 2n\pi^-} \frac{dy}{dx} = -\infty$; assim, realmente existem tangentes verticais quando $\theta = 2n\pi$, isto é, quando $x = 2n\pi r$.

6.3.2 Áreas

O Teorema Fundamental do Cálculo no diz que a áreas sob uma curva $y = F(x)$ de a até b é $A = \int_a^b F(x)dx$, onde $F(x) \geq 0$. Se a curva for dada por equações paramétricas $x = f(t),\ y = g(t)$ e for percorrida quando t aumenta de α para β, então podemos adaptar a fórmula anterior usando a Regra da Substituição para Integrais Definidas como a seguir:

$$A = \int_a^b ydx = \int_\alpha^\beta g(t)f'(t)dt$$

ou

$$A = \int_\beta^\alpha g(t)f'(t)dt$$

se $(f(\beta), g(\beta))$ for o extremo esquerdo.

Exemplo 6.3.3. Encontre a área sob um arco da ciclóide $x = r(\theta - sen\theta),\ y = r(1 - cos\theta)$.

Solução:

Um arco da ciclóide é dado por $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Usando a Regra de

Substituição com $y = r(1 - cos\theta)$ e $dx = r(1 - cos\theta)d\theta$, temos

$$\begin{aligned} A = \int_0^{2\pi r} y dx &= \int_0^{2\pi} r(1 - cos\theta)r(1 - cos\theta)d\theta \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - cos\theta)^2 d\theta = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2cos\theta + cos^2\theta)d\theta \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} [1 - 2cos\theta + \frac{1}{2}(1 + cos2\theta)]d\theta \\ &= r^2[\frac{3}{2}\theta - 2sen\theta + \frac{1}{4}sen2\theta]_0^{2\pi} \\ &= r^2(\frac{3}{2} \cdot 2\pi) = 3\pi r^2. \end{aligned}$$

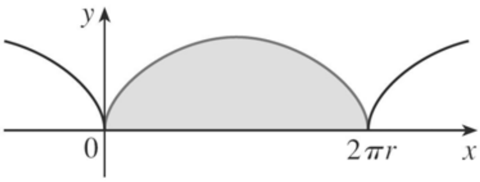

Figura 6.16: Arco daциclóide.

6.3.3 Comprimento de Arco

Sabemos que, se uma curva C é dada na forma $y = F(x),\ a \leq x \leq b$ e F' for contínua, então o comprimento L da curva C é dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Se a curva C for dada por equações paramétricas $x = f(t),\ y = g(t),\ \alpha \leq t \leq \beta$, onde f' e g' são contínuas em $[\alpha, \beta]$ e for percorrida exatamente uma vez quando t aumenta de α para β, então adaptando a fórmula anterior, obtemos

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

Exemplo 6.3.4. Encontre o comprimento de arco da curva $x = sen\ t - tcos\ t,\ y = cos\ t + tcos\ t,\ -1 \leq t \leq 1$.

Solução:

Temos que

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(tsen\ t)^2 + (tcos\ t)^2} = \sqrt{t^2} = |t|$$

Logo,

$$L = \int_{-1}^{1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_{-1}^{1} |t| dt = \int_{-1}^{0} (-t) dt + \int_{0}^{1} t dt = 1.$$

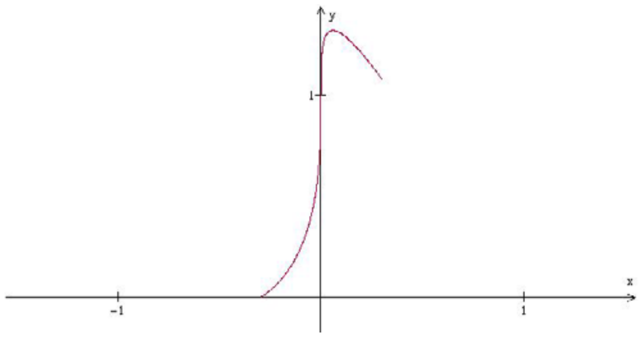

Figura 6.17: Curva referente ao Exemplo 6.3.4.

Neste caso, dizemos que a curva C é parametrizada pelo comprimento de arco.

6.3.4 Área de Superfície

Dada uma curva C com equações paramétrica $x = f(t),\ y = g(t),\ \alpha \leq t \leq \beta$ onde f', g' são contínuas e $g(t) \geq 0$, queremos calcular a área da superfície gerada à partir da rotação da curva C em torno do eixo-x. A área resultante é dada por

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

Exemplo 6.3.5. Mostre que a área da superfície de uma esfera de raio r é $4\pi r^2$.

Solução:

A esfera é obtida pela rotação do semicírculo

$$x = rcos\ t \quad y = sen\ t \quad 0 \leq t \leq \pi$$

ao redor do eixo-x. Portanto,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi} 2\pi sen\ t\sqrt{(-rsen\ t)^2 + (rcos\ t)^2}dt \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} rsen\ t\sqrt{r^2(sen^2t + cos^2t)}dt \\ &= 2\pi r^2 \int_0^{\pi} sen\ tdt = 2\pi r^2(-cos\ t)\Big]_0^{\pi} = 4\pi r^2. \end{aligned}$$

6.4 Resumo

Nesta aula, conhecemos um novo tipo de função, as funções que a cada valor de t associa um par ordenado (x, y) no plano. Vimos que tais funções são úteis na descrição da trajetória de uma partícula no plano.

Além disso, aprendemos a fazer cálculos com curvas paramétricas. Em particular, resolvemos problemas envolvendo tangentes, áreas, arco e superfície de área.

Na próxima aula, estudaremos as curvas paramétricas em coordenadas polares.

6.5 Atividades

01. Elimine o parâmetro para encontrar uma equação cartesiana da curva, esboce a curva e indique com uma seta a direção na qual a curva é traçada quando o parâmetro aumenta.

(a) $x = 3t - 5,\ y = 2t + 1$

(b) $x = t^2 - 2,\ y = 5 - 2t,\ -3 \leq t \leq 4$

(c) $x = 4\ cos\ \theta,\ y = 5\ sen\ \theta,\ -\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$

(d) $x = e^t,\ y = e^{-t}$

02. Descreva o movimento de uma partícula com posição (x, y) dada por

$$x = cos^2 t,\ y = cos\ t$$

quando $0 \leq t \leq 4\pi$.

03. (a) Mostre que as equações paramétricas

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)t$$

onde $0 \leq t \leq 1$ descrevem o segmento de reta que une os pontos $(x_1,\ x_2)$ e $(y_1,\ y_2)$.

(b) Encontre as equações paramétricas para representar o segmento de reta de $(-2, 7)$ até $(3, -1)$.

04. Encontre os pontos da curva dada por

$$x = t^4 + 1,\ y = t^3 + t$$

em que a tangente é horizontal. Em que pontos a tangente é vertical? Calcule a equação da reta tangente e da reta normal a curva dada no ponto em que $t = -1$.

05. Encontre os pontos da curva dada por

$$x = 2\ cos\ \theta,\ y = sen\ 2\theta$$

em que a tangente é horizontal. Em que pontos a tangente é vertical? Calcule a equação da reta tangente a curva dada no ponto em que $\theta = \frac{\pi}{2}$.

06. Calcule o comprimento da curva dada por

$$x = e^t + e^{-t},\ y = 5 - 2t$$

para $0 \leq t \leq 3$.

07. Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva dada por

$$x = 3t - t^3,\ y = 3t^2,\ 0 \leq t \leq 1$$

ao redor do eixo x.

6.6 Comentário das Atividades

Essas atividades tem o objetivo de você (aluno) exercitar os conceitos desenvolvidos nesta aula.

As atividades 01, 02 e 03 são referentes ao estudo das curvas paramétricas no plano. Se conseguiu resolve-las, então você aprendeu a descrever o movimento de uma partícula no plano.

As atividades 04, 05, 06 e 07 são referentes ao cálculo com curvas paramétricas. Cálculo de retas tangentes, retas normais, comprimento de arco e área de superfícies de rotação. Se conseguiu resolver todas essas atividades. Parabéns. Você sabe fazer cálculo com curvas paramétricas.

6.7 Referências

- GUIDORIZZI, H. L., **Um Curso de Cálculo** (Vol. 1 e 2). Rio de Janeiro: LTC Editora, 2006.
- STEWART, J., **Cálculo** (vol. 1 e 2). São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.
- THOMAS, G. B., **Cálculo** (vol. 1 e 2). São Paulo: Addison Wesley, 2002.