1
LIVRO

7
AULA

Curvas Polares

META

Estudar as curvas planas em coordenadas polares (Curvas Polares).

OBJETIVOS

Estudar movimentos de partículas no plano. Cálculos com curvas planas em coordenadas polares.

PRÉ-REQUISITOS

Curvas Paramétricas (Aula 06).

7.1 Introdução

Até agora temos usado as coordenadas cartesianas para representar um ponto no plano, por um par ordenado de números, chamados coordenadas, que são distâncias dirigidas a partir de dois eixos perpendiculares. Nesta aula descreveremos um sistema de coordenadas introduzido por Newton, denominado sistema de coordenadas polares. Tal sistema de coordenadas é muito útil no estudo de curvas no plano.

Escreveremos as curvas no plano em coordenadas polares. Além disso, faremos os cálculos relativos as tangentes, ao comprimento de arco e as áreas delimitadas por curvas no plano, utilizando coordenadas polares.

7.2 Coordenadas Polares

Escolhemos um ponto no plano conhecido como pólo (ou origem) e o denominamos O. Então, desenhamos um raio (semi-reta) começando de O, chamado eixo polar. Esse eixo é geralmente desenhado horizontalmente para a direita e corresponde ao eixo x positivo nas coordenadas cartesianas.

Se P for qualquer ponto no plano, seja r a distância de O a P e seja θ o ângulo entre o eixo polar e a reta OP como na Figura 7.18. Daí o ponto P é representado pelo par ordenado (r, θ) e r, θ são denominados coordenadas polares de P.

Usamos a convenção de que um ângulo é positivo se for medido no sentido anti-horário a partir do eixo polar e negativo se for medido no sentido horário. Se $P = O$, então $r = 0$, e concordamos que $(0, \theta)$ representa o pólo para quaisquer valor de θ.

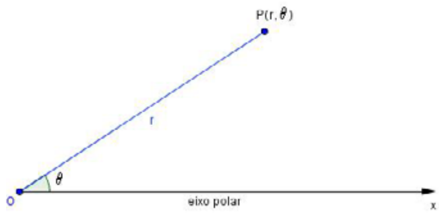

Figura 7.18: Sistema de Coordenadas Polares.

Exemplo 7.2.1. Plote os pontos cujas coordenadas polares são

(a) $(1, \frac{5\pi}{4})$ $\quad$ (b) $(2, 3\pi)$ $\quad$ (c) $(2, \frac{-2\pi}{3})$ $\quad$ (d) $(-3, \frac{3\pi}{4})$

Solução: Os pontos são plotados na Figura 7.19.

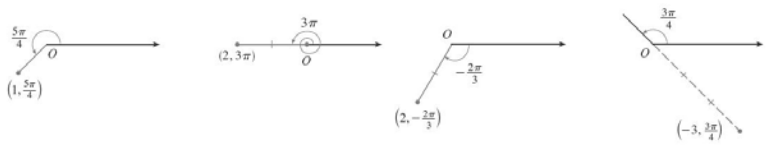

Figura 7.19: Figura referente ao Exemplo 7.2.1

No sistema de coordenadas cartesianas cada ponto tem apenas uma representação, mais no sistema de coordenadas polares cada ponto tem muitas representações. De fato, como uma rotação completa no sentido anti-horário é dada por um ângulo 2π, o ponto representado pelas coordenadas polares (r, θ) é também representado por

$$(r, \theta + 2n\pi) \qquad \text{e} \qquad (-r, \theta + (2n+1)\pi)$$

onde n é qualquer inteiro.

A relação entre as coordenadas polares e cartesianas pode ser vista a partir da Figura 7.20, na qual o pólo corresponde à origem e o eixo polar coincide com o eixo x positivo. Se o ponto P tiver coordenadas cartesianas (x, y) e coordenadas polares (r, θ), então,

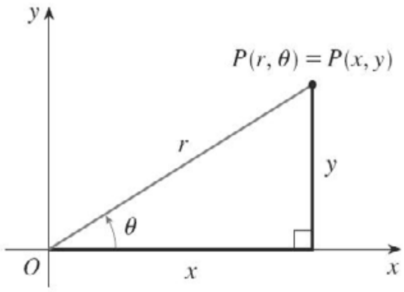

Figura 7.20: Coordenadas Cartesianas ↔ Coordenadas Polares.

a partir da figura, temos:

$$cos\theta = \frac{x}{r} \qquad sen\theta = \frac{y}{r}$$

e assim,

$$x = rcos\theta \qquad y = rsen\theta. \tag{7.1}$$

As Equações (7.1) nos permitem encontrar as coordenadas cartesianas de um ponto quando as coordenadas polares são dadas. Para encontrar r e θ onde x e y são conhecidos, usaremos as equações

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad tg\theta = \frac{y}{x}. \tag{7.2}$$

que podem ser deduzidas a partir das Equações (7.1).

Exemplo 7.2.2. Converta o ponto $(3, \frac{\pi}{2})$ de coordenadas polares para cartesianas.

Solução: Como $r = 3$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$, as Equações (7.1) fornecem

$$x = rcos\theta = 3cos\frac{\pi}{2} = 3 \cdot 0 = 0$$
$$y = rsen\theta = 3sen\frac{\pi}{2} = 3 \cdot 1 = 3$$

Portanto, o ponto é $(0, 3)$ nas coordenadas cartesianas.

Exemplo 7.2.3. Represente o ponto com coordenadas cartesianas $(1, -1)$ em termos de coordenadas polares.

Solução: Se escolhermos r positivo, então a Equação (7.2) fornece

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$tg\theta = \frac{y}{x} = -1$$

Como o ponto $(1, -1)$ estão no quarto quadrante, podemos escolher $\theta = -\frac{\pi}{4}$ ou $\theta = \frac{7\pi}{4}$. Então uma resposta possível é $(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$; e outra é $(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4})$.

Exercícios:

01. Plote o ponto cujas coordenadas polares são dadas. Então encontre dois outros pares de coordenadas polares desse ponto, um com $r > 0$ e outro com $r < 0$. Encontre as coordenadas cartesianas do ponto.

(a) $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ (b) $\left(-2, \frac{\pi}{4}\right)$

(c) $\left(2, -\frac{\pi}{4}\right)$ (d) $\left(-2, -\frac{\pi}{2}\right)$

(e) $\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$ (f) $\left(-2, -\frac{5\pi}{6}\right)$

02. As coordenadas cartesianas de um ponto são dadas. Encontre as coordenadas polares do ponto. Plote-os.

(a) $(1,\ 1)$ (b) $\left(2\sqrt{3},\ -2\right)$

(c) $\left(-1, -\sqrt{3}\right)$ (d) $(-2, -3)$

03. Esboce a região do plano que consiste em pontos cujas coordenadas polares satisfazem as condições dadas.

(a) $1 \leq r \leq 2$

(b) $r \geq 0, \ \dfrac{\pi}{3} \leq \theta \leq \dfrac{2\pi}{3}$
(c) $-1 \leq r \geq 1, \ \dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{3\pi}{4}$

04. (a) Encontre uma fórmula para a distância entre os pontos com coordenadas polares $(r_1,\ \theta_1)$ e $(r_2,\ \theta_2)$.
(b) Encontre a distância entre os pontos com coordenadas polares $\left(3, \dfrac{\pi}{2}\right)$ e $\left(-2, -\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

Observação 7.3. Conseguiu fazer todos esses exercícios??? SIM!!! Ótimo, você já pode continuar seus estudos relativos à essa aula. Se você sentiu dificuldades em resolver esses exercícios, volte a estudar as coordenadas polares, antes de prosseguir nesta aula.

7.3 Curvas Polares

Uma curva polar é representada por uma equação $r = f(\theta)$, ou mais geralmente, $F(r, \theta) = 0$ e seu gráfico consiste em todos os pontos P que têm pelo menos uma representação (r, θ) cujas coordenadas satisfazem a equação.

Exemplo 7.3.1. A circunferência de raio 3 e centro na origem é representada pela equação polar $r = 3$. De fato, temos que $x^2 + y^2 = r^2$, logo $x^2 + y^2 = 9$.

Exemplo 7.3.2. A curva com equação polar $r = 2cos\theta$ é uma circunferência com centro em $(1, 0)$ e raio 1. De fato, na Figura 7.22 encontramos os valores de r para alguns valores convenientes de θ e plotamos os pontos correspondentes (r, θ). Então juntamos esses pontos para esboçar a curva.

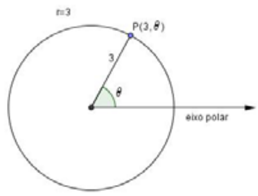

Figura 7.21: Circunferência de equação $r = 3$.

Vamos agora converter a equação dada em uma equação cartesiana, usando as Equações (7.1) e (7.2). A partir de $x = rcos\theta$, temos $cos\theta = \frac{x}{r}$; assim, a equação $r = 2cos\theta$ torna-se $\frac{r}{2} = \frac{x}{r}$, que fornece

$$2x = r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 - 2x = 0$$

Completando o quadrado, obtemos

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

que é uma equação do círculo com centro em $(1, 0)$ e raio 1.

θ	$r = 2\cos\theta$
0	2
$\pi/6$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}$
$\pi/3$	1
$\pi/2$	0
$2\pi/3$	-1
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}$
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}$
π	-2

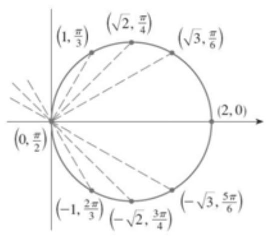

Figura 7.22: Circunferência de equação $r = 2cos\ \theta$.

Exemplo 7.3.3. A curva polar $r = 1 + sen\theta$ é denominada cardióide porque tem o formato parecido com o de um coração. Plotando a cardióide através do Software *Winplot*, obtemos a Figura 7.23:

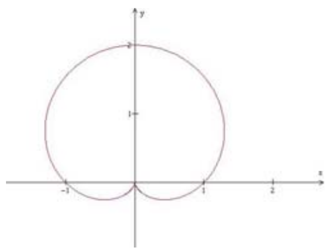

Figura 7.23: Cardióide

Exemplo 7.3.4. A curva polar $r = cos2\theta$ é denominada rosa de quatro pétalas (ou 4−rosácea). Plotando a curva através do Software *Winplot*, obtemos a Figura 7.24:

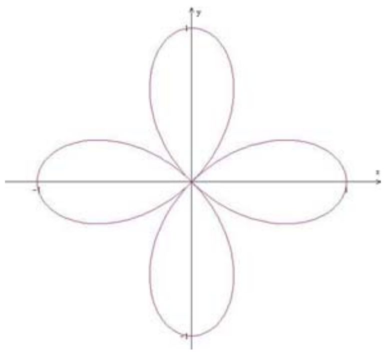

Figura 7.24: 4−rosácea.

7.4 Tangentes as Curvas Polares

Para encontrar a reta tangente a uma curva polar $r = f(\theta)$, vamos considerar θ como um parâmetro e escrever suas equações paramétricas como

$$x = rcos\theta = f(\theta)cos\theta \qquad y = rsen\theta = f(\theta)sen\theta$$

Então, usando o método para encontrar inclinações de curvas paramétricas(Equação (6.2)), e a Regra do Produto temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{dr}{d\theta}sen\theta + rcos\theta}{\frac{dr}{d\theta}cos\theta - rsen\theta} \tag{7.1}$$

Localizamos as tangentes horizontais achando os pontos onde $\frac{dy}{d\theta} = 0$ e $\frac{dx}{d\theta} \neq 0$. Do mesmo modo, localizamos as tangentes verticais nos pontos onde $\frac{dy}{d\theta} \neq 0$ e $\frac{dx}{d\theta} = 0$.

Exemplo 7.4.1. (a) Para a cardióide $r = 1 + cos\theta$, calcule a inclinação da reta tangente quando $\theta = \frac{\pi}{6}$.
(b) Encontre os pontos na cardióide onde a reta tangente é horizontal ou vertical.

Solução: Usando a Equação (7.1) com $r = 1 + cos\theta$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dr}{d\theta}sen\theta + rcos\theta}{\frac{dr}{d\theta}cos\theta - rsen\theta} = \frac{-sen\theta\ sen\theta + (1+cos\theta)cos\theta}{-sen\theta\ cos\theta - (1+cos\theta)sen\theta} \\ &= \frac{-sen^2\theta + cos\theta + cos^2\theta}{-2sen\theta\ cos\theta - sen\theta} = \frac{2cos^2\theta + cos\theta - 1}{-sen\theta(2cos\theta + 1)} \end{aligned}$$

(a) A inclinação da tangente no ponto onde $\theta = \frac{\pi}{6}$ é

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{2cos^2\frac{\pi}{6} + cos\frac{\pi}{6} - 1}{-sen\frac{\pi}{6}(2cos\frac{\pi}{6} + 1)} = \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{-\frac{1}{2}\left(2\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)} = -1 \end{aligned}$$

(b) Observe que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\theta} &= 2cos^2\theta + cos\theta - 1 = 0 \qquad \text{quando}\ \ \theta = \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5\pi}{3} \\ \frac{dx}{d\theta} &= -sen\theta(2cos\theta + 1) = 0 \qquad \text{quando}\ \ \theta = 0,\ \frac{2\pi}{3},\ \pi,\ \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

Portanto existem tangentes horizontais nos pontos $(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{3})$, $(\frac{3}{2}, \frac{5\pi}{3})$ e tangentes verticais em $(2, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{2\pi}{3})$, $(\frac{1}{2}, \frac{4\pi}{3})$. Quando $\theta = \pi$, $\frac{dx}{d\theta}$

e $\frac{dy}{d\theta}$ são 0 e, dessa forma, devemos ser cuidadosos. Usando a Regra de L'Hôspital, temos

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\longrightarrow\pi^-}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\theta\longrightarrow\pi^-}\frac{2cos^2\theta+cos\theta-1}{-sen\theta(2cos\theta+1)}\\ &= \lim_{\theta\longrightarrow\pi^-}\frac{-2cos\theta sen\theta-sen\theta}{-cos\theta(2cos\theta+1)-sen\theta(-2sen\theta)}=0\end{aligned}$$

Da mesma forma, prova-se que

$$\lim_{\theta\longrightarrow\pi^+}\frac{dy}{dx}=0.$$

Então existe uma reta horizontal no pólo (Veja Figura 7.25).

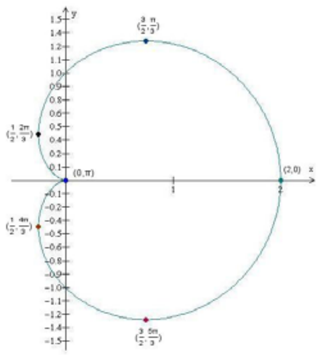

Figura 7.25: Cardióide

7.5 Áreas e Comprimentos em Coordenadas Polares

Seja $\mathfrak{R}$ a região ilustrada na Figura 7.26, limitada pela curva polar $r=f(\theta)$ e pelos raios $\theta=a$ e $\theta=b$, onde f é uma função contínua e positiva onde $0<b-a\leq 2\pi$.

Dividimos o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos iguais, cada qual com comprimento $\Delta\theta=\frac{b-a}{n}$. Sejam $a=\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_n=b$

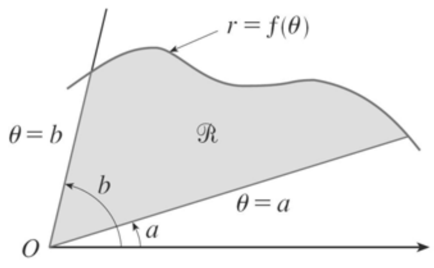

Figura 7.26: Área entre curvas polares.

os pontos dessa divisão. Os raios $\theta = \theta_i$, $i = 1, \cdots, n$, dividem a figura em n setores, o $i-$ésimo deles estando compreendido entre os raios $\theta = \theta_{i-1}$ e $\theta = \theta_i$ possui área aproximadamente igual a área do setor de um círculo com ângulo central $\Delta\theta$ e raio $f(\theta_i^*)$ para algum θ_i^* em $[\theta_{i-1}, \theta_i]$, ou seja, a área do $i-$ésimo setor é dada por $f(\theta_i^*) \cdot \frac{f(\theta_i^*)\Delta\theta}{2} = \frac{f(\theta_i^*)^2}{2}\Delta\theta$. (Veja Figura 7.27)

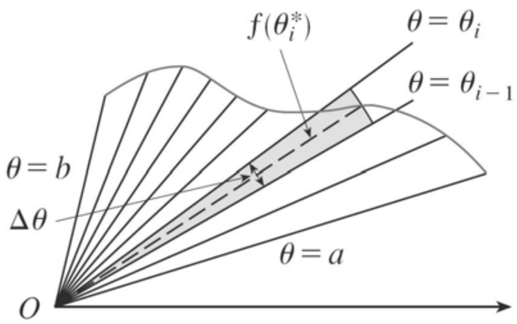

Figura 7.27: Partição da região em setores de um círculo.

Portanto, a área procurada é a soma de todas essas áreas (soma de Riemann), isto é,

$$A = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(\theta_i^*)^2}{2}\Delta\theta.$$

Tomando seu limite quando $n \longrightarrow \infty$, obtemos a integral

$$A = \int_a^b \frac{1}{2}[f(\theta)]^2 d\theta \qquad (7.1)$$

A fórmula (7.1) é freqüentemente escrita como

$$A = \int_a^b \frac{1}{2} r^2 d\theta \qquad (7.2)$$

entendendo que $r = f(\theta)$.

Exemplo 7.5.1. Calcule a área da cardióide $r = 1 + cos\theta$.

Solução: A curva cardióide esta plotada na Figura 7.25. Para calcular a área, usaremos a fórmula 7.2:

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + cos\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1 + 2cos\theta + cos^2\theta)d\theta = \frac{3\pi}{2}.$$

Exemplo 7.5.2. Calcule a área limitada por uma pétala da 4-rosácea $r = cos2\theta$.

Solução: Note a partir da Figura 7.28 que a região limitada por uma pétala da 4-rosácea é varrida pelo raio que gira de $\theta = \frac{\pi}{4}$ até $\theta = -\frac{\pi}{4}$. Desta forma, a fórmula (7.2) fornece

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} cos^2 2\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2 2\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(1 + cos4\theta)d\theta = \frac{1}{2}[\theta + \frac{1}{4}sen4\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Quando uma curva é dada em coordenadas polares, por exemplo, $r = f(\theta)$, obtemos facilmente suas equações paramétricas em termos do ângulo como parâmetro, ou seja:

$$x = rcos\theta = f(\theta)cos\theta$$

$$y = rsen\theta = f(\theta)sen\theta$$

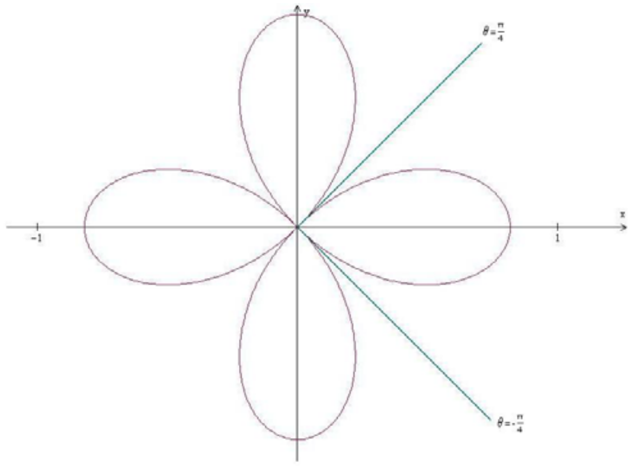

Figura 7.28: 4−rosácea

Segue que

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= [f'(\theta)cos\theta - f(\theta)sen\theta]^2+[f'(\theta)sen\theta + f(\theta)cos\theta]^2\\ &= f'(\theta)^2+f(\theta)^2.\end{aligned}$$

Logo, o comprimento de arco da curva com equação polar $r = f(\theta),\ a \leq \theta \leq b$ é

$$L=\int_a^b \sqrt{f(\theta)^2+f'(\theta)^2}d\theta$$

ou

$$L=\int_a^b \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta. \qquad (7.3)$$

Exemplo 7.5.3. Calcule o comprimento da curva polar $r = \theta^2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Solução: A curva é mostrada na Figura 7.29. Seu comprimento total é dado pelo intervalo de parâmetro $0 \leq \theta \leq 2\pi$, assim a fórmula 7.3 fornece

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + (2\theta)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{5\theta^2} d\theta = \sqrt{5} \int_0^{2\pi} \theta d\theta = 2\sqrt{5}\pi^2.$$

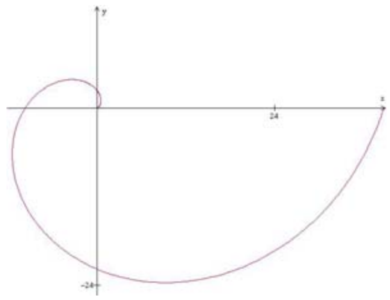

Figura 7.29: Figura referente ao Exemplo 7.5.3

7.6 Resumo

Nesta aula, introduzimos as coordenadas polares. Além disso, trabalhamos com as curvas planas em coordenadas polares. Aprendemos a fazer cálculos com curvas polares. Em particular, resolvemos problemas envolvendo tangentes, áreas, arco e superfície de área.

7.7 Atividades

01. Encontre a equação cartesiana para a curva descrita pela equação polar dada:

(a) $r = 2$ (b) $r = 3\ sen\ \theta$

(c) $r\ cos\ \theta = 1$ (d) $r = 2\ sen\theta + 2\ cos\theta$

02. Encontre a equação polar para a curva descrita pela equação cartesiana dada:

(a) $x = 3$ (b) $x^2 + y^2 = 9$

(c) $x = -y^2$ (d) $x + y = 9$

03. Esboce a curva com equação dada:

(a) $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$ (b) $r^2 - 3r + 2 = 0$

04. Esboce a curva com equação dada, calcule a área limitada por ela e encontre os pontos na curva onde a reta tangente é horizontal ou vertical:

(a) $r = 3\ cos\theta$ (b) $r = cos\ \theta + sen\ \theta$

(c) $r = sen\ \theta$ (d) $r = -3\ cos\ \theta$

(e) $r = 2\ cos\ 4\theta$ (f) $r = sen\ 5\theta$

(g) $r = 1 + sen\ \theta$ (h) $r = \cos 2\theta$

05. Encontre a área da região que é limitada pelas curvas dadas que está no setor especificado.

(a) $r = \sqrt{\theta},\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$;

(b) $r = sen\ \theta,\ \dfrac{\pi}{3} \leq \theta \leq \dfrac{2\pi}{3}$.

06. Encontre a área da região dentro de um laço da curva.

(a) $r = sen\ 2\theta$;

(b) $r = 1 + 2sen\ \theta$.

07. Encontre a área da região que está dentro da curva $r = 2 + sen\ \theta$ e fora da curva $r = 3sen\ \theta$.

08. Encontre a área da região que está dentro das curvas $r = sen\ \theta$ e $r = cos\ \theta$.

09. Calcule o comprimento da curva polar:

(a) $r = 3sen\ \theta,\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{3}$;

(b) $r = \theta,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

7.8 Comentário das Atividades

Essas atividades, são referentes aos assuntos discutidos no decorrer desta aula e têm o objetivo de você (aluno) exercitar os conceitos aprendidos.

Lembre-se, sempre, que existem tutores para ajuda-los na resolução dessas atividades.

7.9 Referências

- GUIDORIZZI, H. L., **Um Curso de Cálculo** (Vol. 1 e 2). Rio de Janeiro: LTC Editora, 2006.
- STEWART, J., **Cálculo** (vol. 1 e 2). São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.
- THOMAS, G. B., **Cálculo** (vol. 1 e 2). São Paulo: Addison Wesley, 2002.