1
LIVRO

9
AULA

Curvas Espaciais

META

Estudar as curvas no espaço ($\mathbb{R}^3$).

OBJETIVOS

Descrever o movimento de objetos no espaço.

PRÉ-REQUISITOS

Funções vetoriais (Aula 08).

9.1 Introdução

Na aula anterior, estudamos as funções vetoriais. Nesta aula, estudaremos o movimento de objetos no espaço utilizando tais funções.

9.2 Movimentos no espaço

Para descrever o movimento de uma partícula no espaço precisamos explicar onde a partícula está a cada instante de tempo t de um certo intervalo. Assim, a cada instante t no intervalo considerado I, corresponde um ponto $\vec{\mathbf{r}}(t)$ e o movimento é descrito por uma função vetorial $\vec{\mathbf{r}} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

Suponha que f, g e h sejam funções reais contínuas em um intervalo I da reta. Então o conjunto C de todos os pontos (x, y, z) no espaço para os quais

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases} \tag{9.1}$$

e t varia no intervalo I é chamado curva espacial ou curva em $\mathbb{R}^3$. As equações em (9.1) são denominadas equações paramétricas de C e t é denominado o parâmetro.

Se considerarmos a função vetorial $\vec{\mathbf{r}}(t) = (f(t), g(t), h(t))$, então $\vec{\mathbf{r}}(t)$ é um vetor posição do ponto $P(f(t), g(t), h(t))$ sobre C. Assim, qualquer função vetorial define uma curva espacial C que é traçada pela ponta do vetor em movimento.

Definição 9.11. Seja $\vec{\mathbf{r}} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva. O traço de $\vec{\mathbf{r}}$ é a imagem do intervalo I por $\vec{\mathbf{r}}$.

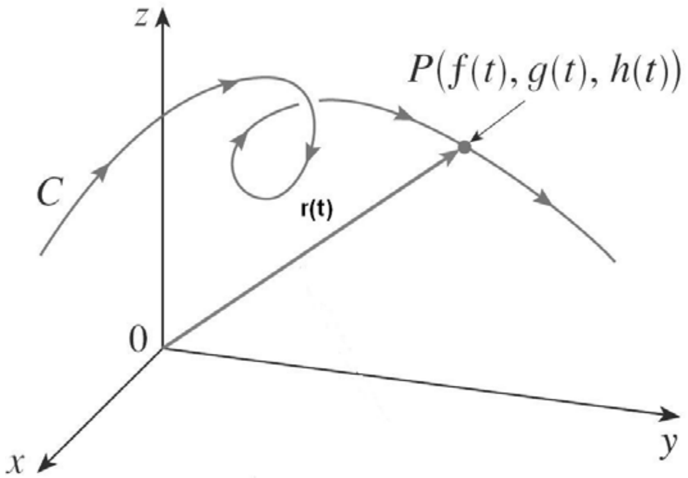

Figura 9.30: Traço de $\vec{\mathbf{r}}$.

Exemplo 9.2.1. Descreva o traço da curva espacial dada por

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = (2 - 3t,\ -t,\ -2 + t).$$

Solução: As equações paramétricas correspondentes são

$$x = 2 - 3t, \quad y = -t, \quad z = -2 + t$$

que são as equações paramétricas de uma reta passando pelo ponto $(2, 0, -2)$ e paralela ao vetor $(-3, -1, 1)$. Outro modo de ver é observar que a função pose ser escrita como $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + t\mathbf{v}$, onde $\vec{\mathbf{r}}_0 = (2, 0, -2)$ e $\mathbf{v} = (-3, -1, 1)$. (Ver Figura 9.31)

Exemplo 9.2.2. Esboce o traço da curva cuja equação vetorial é dada por

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = cos\ t\vec{i} + sen\ t\vec{j} + t\vec{k} \ \ t \in \left[0, \frac{5\pi}{2}\right].$$

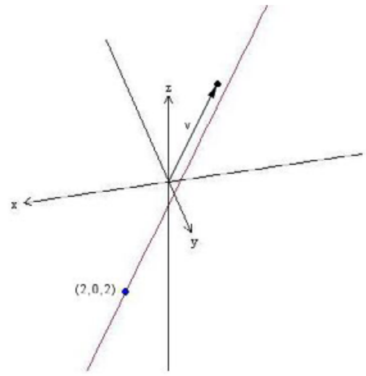

Figura 9.31: Traço da curva dada no Exemplo 9.2.1.

Solução: As equações paramétricas para essa curva são

$$\begin{cases} x = cos\ t \\ y = sen\ t \\ z = t \end{cases}$$

Como $x^2 + y^2 = cos^2t + sen^2t = 1$, a curva precisa pertencer ao cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$. O ponto (x, y, z) está diretamente acima do ponto $(x, y, 0)$, que se move no sentido anti-horário em torno da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ no plano xy. Como $z = t$, a curva faz uma espiral para cima ao redor de um cilindro quando t aumenta. A curva, mostrada na Figura 9.32, é chamada hélice.

Nos exemplos 9.2.1 e 9.2.2 demos as equações vetoriais das curvas e pedimos uma descrição geométrica ou esboço delas. No proximo exemplo daremos uma descrição geométrica da curva e pediremos para determinar suas equações paramétricas.

Exemplo 9.2.3. Determine a equação vetorial para o segmento de reta ligando o ponto $P(1, 3, -2)$ ao ponto $Q(2, -1, 3)$.

Solução: Uma equação para o segmento de reta de P a Q (Ver

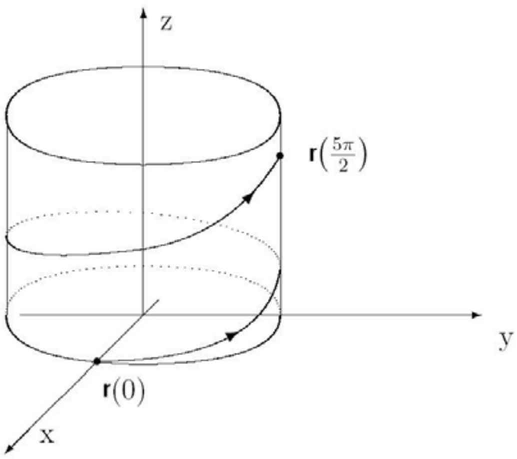

Figura 9.32: Hélice

Figura 9.33):

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = (1-t)(1,3,-2) + t(2,-1,3), \quad 0 \le t \le 1$$

ou

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = (1+t, 3-4t, -2+5t), \quad 0 \le t \le 1.$$

Como vimos, a função vetorial $\vec{\mathbf{r}}$ tem derivada $\vec{\mathbf{r}}'(t)$ em $t \in I$ se

$$\vec{\mathbf{r}}'(t) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\vec{\mathbf{r}}(t+h) - \vec{\mathbf{r}}(t)}{h}$$

Lembre que, se $\vec{\mathbf{r}}(t) = (f(t), g(t), h(t))$, então $\vec{\mathbf{r}}'(t) = (f'(t), g'(t), h'(t))$.

A Figura 9.34 mostra que o vetor $\dfrac{\vec{\mathbf{r}}(t+h) - \vec{\mathbf{r}}(t)}{h}$ tem a direção que, conforme h tende a zero, aproxima-se da direção que costumamos chamar a direção tangente à curva $\vec{\mathbf{r}}$ em $\vec{\mathbf{r}}(t)$.

A derivada $\vec{\mathbf{r}}'(t)$ se existe e é diferente do vetor nulo é chamado de vetor tangente a $\vec{\mathbf{r}}$ em $\vec{\mathbf{r}}(t)$. Deste modo, a equação da reta tangente à curva $\vec{\mathbf{r}}$ em $\vec{\mathbf{r}}(t_0)$ é dada por

$$(x, y, z) = \vec{\mathbf{r}}(t_0) + t\vec{\mathbf{r}}'(t_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

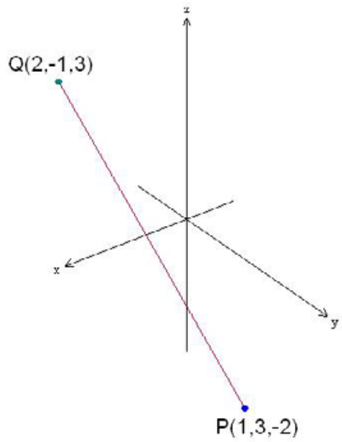

Figura 9.33: Segmento de reta ligando o ponto $P(1,3,-2)$ ao ponto $Q(2,-1,3)$.

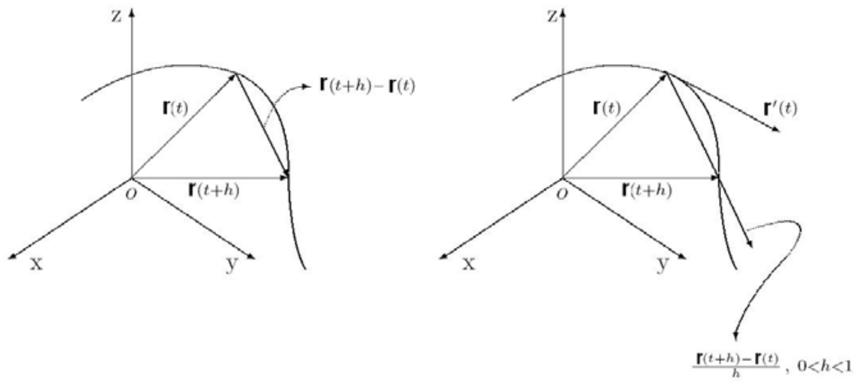

Figura 9.34: Vetor Secante (Figura à esquerda) e Vetor Tangente (Figura à direita).

Teremos ocasião de considerar o versor tangente, dado por

$$T(t) = \frac{\vec{\mathbf{r}}'(t)}{\|\vec{\mathbf{r}}'(t)\|}.$$

Temos que $\|T(t)\| = 1$, para todo $t \in I$, logo, segue do Exemplo 8.4.1, que $T(t) \cdot T'(t) = 0$, ou seja, os vetores $T(t)$ e $T'(t)$ são ortogonais. O vetor

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$$

é denominado vetor normal principal unitário a $\vec{\mathbf{r}}$ em $\vec{\mathbf{r}}(t)$.

O vetor $B(t) = T(t) \times N(t)$ é denominado vetor binormal, é perpendicular a T e N e também é unitário. (Veja Figura 9.35)

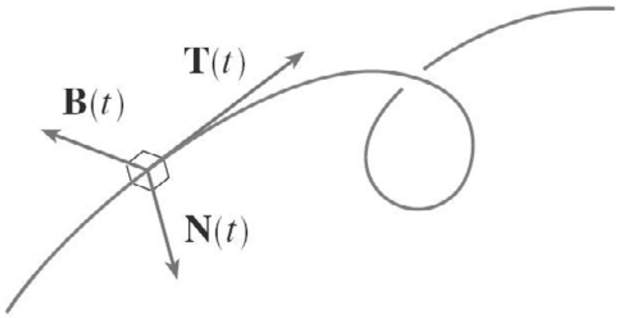

Figura 9.35: Vetores tangente, normal e binormal.

O número

$$k = \frac{\|\vec{\mathbf{r}}'(t) \times \vec{\mathbf{r}}''(t)\|}{\|\vec{\mathbf{r}}'(t)\|^3}$$

é denominado curvatura de uma curva espacial $\vec{\mathbf{r}}$ em $\vec{\mathbf{r}}(t)$ e mede quão rapidamente a curva muda de direção no ponto.

Exemplo 9.2.4. Considere a hélice com equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 2cos\ t \\ y = sen\ t \\ z = t \end{cases}$$

Determine as equações paramétricas para a reta tangente à hélice no ponto $(0, 1, \pi/2)$.

Solução: A equação vetorial da hélice é $\vec{\mathbf{r}}(t) = (2cos\ t,\ sen\ t,\ t)$, de modo que

$$\vec{\mathbf{r}}'(t) = (-2sen\ t,\ cos\ t,\ 1).$$

Note que o valor do parâmetro correspondente ao ponto $(0, 1, \pi/2)$ é $t = \pi/2$, e o vetor tangente é $\vec{\mathbf{r}}'(\pi/2) = (-2, 0, 1)$. A reta tangente que passa por $(0, 1, \pi/2)$ e é paralela ao vetor $(-2, 0, 1)$ é dada por

$$(x, y, z) = (-2, 0, 1) + t(0, 1, \pi/2), \quad t \in \mathbb{R}$$

ou

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = 1 \\ z = \frac{\pi}{2} + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

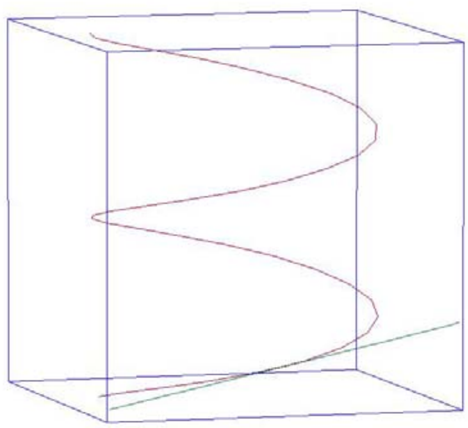

Figura 9.36: Traço da hélice e da reta tangente.

Exemplo 9.2.5. Determine os vetores normais e binormais da hélice circular

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = cos\ t\vec{i} + sen\ t\vec{j} + t\vec{k}.$$

Solução: Temos que

$$\vec{\mathbf{r}}'(t) = -sen\ t\vec{i} + cos\ t\vec{j} + 1\vec{k}$$
$$\|\vec{\mathbf{r}}'(t)\| = \sqrt{(-sen\ t)^2 + (cos\ t)^2 + 1} = \sqrt{2}$$
$$T(t) = \frac{\vec{\mathbf{r}}'(t)}{|\vec{\mathbf{r}}'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-sen\ t\vec{i} + cos\ t\vec{j} + 1\vec{k})$$
$$T'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-cos\ t\vec{i} - sen\ t\vec{j}) \qquad \|T'(t)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} = -cos\ t\vec{i} - sen\ t\vec{j} = (-cos\ t,\ sen\ t,\ 0)$$

A Figura 9.37 ilustra o Exemplo 9.2.5 mostrando os vetores T, N e B em dois pontos da hélice circular. Em geral, os vetores T, N e B começando nos vários ponto, formam um conjunto de vetores ortogonais, denominados triedro TNB, que se move ao longo da curva quando t varia.

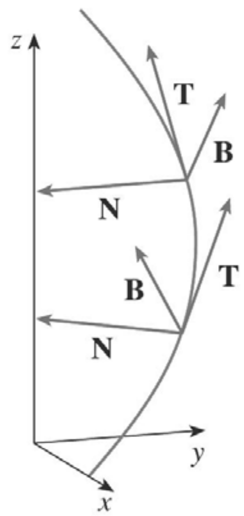

Figura 9.37: Triedro TNB

Isso mostra que o vetor normal em um ponto da hélice circular é horizontal e aponta em direção ao eixo-z. O vetor binormal é

$$\begin{aligned} B(t) &= T(t) \times N(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -sen\ t & cos\ t & 1 \\ -cos\ t & -sen\ t & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(sen\ t,\ -cos\ t,\ 1). \end{aligned}$$

Exemplo 9.2.6. Determine a curvatura da curva dada pela equação vetorial $\vec{\mathbf{r}}(t) = (t, t^2, t^3)$ em um ponto genérico e em $(0, 0, 0)$.

Solução: Temos que

$$\vec{\mathbf{r}}'(t) = (1, 2t, 3t^2) \quad \vec{\mathbf{r}}''(t) = (0, 2, 6t)$$

$$\|\vec{\mathbf{r}}'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$

$$\vec{\mathbf{r}}'(t) \times \vec{\mathbf{r}}''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2\vec{i} - 6t\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\|\vec{\mathbf{r}}'(t) \times \vec{\mathbf{r}}''(t)\| = \sqrt{36t^4 + 36t^2 + 4} = 2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}$$

Então a curvatura da curva $\vec{\mathbf{r}}$ em $\vec{\mathbf{r}}(t)$ é dada por

$$k(t) = \frac{\|\vec{\mathbf{r}}'(t) \times \vec{\mathbf{r}}''(t)\|}{\|\vec{\mathbf{r}}'(t)\|^3} = \frac{2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}}$$

Na origem, a curvatura é $k(0) = 2$.

9.3 Movimento no espaço: Velocidade e Aceleração

Nesta seção mostraremos como as idéias dos vetores tangente e normal, podem ser usadas na física para estudar o movimento de objetos, sua velocidade e sua aceleração, quando eles estão se movendo ao longo de uma curva espacial.

Suponha que uma partícula se mova no espaço de forma que seu vetor posição no instante t seja $\vec{\mathbf{r}}(t)$. Observe que o número

$$\frac{\|\vec{\mathbf{r}}(t + h) - \vec{\mathbf{r}}(t)\|}{|h|},$$

para h pequeno, é a velocidade média de $\vec{\mathbf{r}}$ no intervalo de t a $t + h$. Se $\vec{\mathbf{r}}'(t)$ existe, então

$$\|\vec{\mathbf{r}}'(t)\| = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\|\vec{\mathbf{r}}(t + h) - \vec{\mathbf{r}}(t)\|}{|h|}.$$

De fato, notemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{\|\vec{\mathbf{r}}(t+h) - \vec{\mathbf{r}}(t)\|}{|h|} - \|\vec{\mathbf{r}}'(t)\| \right| \leq^{(*)} \\ &\leq \left\| \frac{\vec{\mathbf{r}}(t+h) - \vec{\mathbf{r}}(t)}{|h|} - \vec{\mathbf{r}}'(t) \right\| \longrightarrow 0, \quad \text{com} \quad h \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

(*) Usamos a propriedade $\|\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|\| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\|$

Logo

$$\frac{\|\vec{\mathbf{r}}(t+h) - \vec{\mathbf{r}}(t)\|}{|h|} \longrightarrow \|\vec{\mathbf{r}}'(t)\|$$

com $h \longrightarrow 0$.

Assim $\|\vec{\mathbf{r}}'(t)\|$ é um limite de velocidades médias sobre um intervalo arbitrariamente pequeno. Por essa razão, $\|\vec{\mathbf{r}}'(t)\|$ é chamado a velocidade (ou rapidez) da partícula que se move no espaço sob a curva $\vec{\mathbf{r}}$ no ponto $\vec{\mathbf{r}}(t)$ e $v(t) = \vec{\mathbf{r}}'(t)$ é dito vetor velocidade de $\vec{\mathbf{r}}$ em $\vec{\mathbf{r}}(t)$.

Da mesma forma, $\|\vec{\mathbf{r}}''(t)\|$ é a aceleração da partícula que se move no espaço sob a curva $\vec{\mathbf{r}}$ no ponto $\vec{\mathbf{r}}(t)$ e $a(t) = v'(t) = \vec{\mathbf{r}}''(t)$ é dito vetor aceleração de $\vec{\mathbf{r}}$ em $\vec{\mathbf{r}}(t)$.

Exemplo 9.3.1. O vetor de um objeto se movendo no espaço é dado por $\vec{\mathbf{r}}(t) = (t^2 + 1,\ t^3,\ t^2 - 1)$. Determine a velocidade, a rapidez e a aceleração do objeto no instante $t = 1$.

Solução: A velocidade e a aceleração no instante t são

$$v(t) = \vec{\mathbf{r}}'(t) = (2t,\ 3t^2,\ 2t)$$

$$a(t) = \vec{\mathbf{r}}''(t) = (2,\ 6t,\ 2)$$

e a rapidez é

$$\|v(t)\| = \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2 + (2t)^2} = \sqrt{8t^2 + 9t^4}.$$

Quando $t = 1$, temos

$$v(1) = (2, 3, 2), \quad a(t) = (2, 6, 2), \quad \|v(1)\| = \sqrt{17}.$$

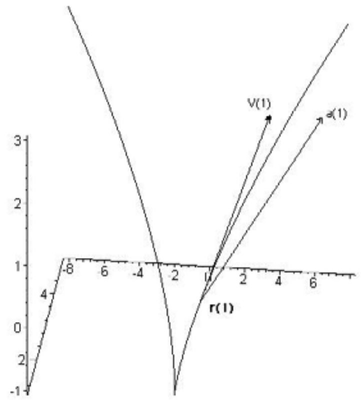

Figura 9.38: Vetor Velocidade e Vetor Aceleração.

Exemplo 9.3.2. Uma partícula de move de uma posição inicial $\vec{\mathbf{r}}(0) = (0,0,0)$ com velocidade inicial $v(0) = \vec{i} - \vec{j}$. Sua aceleração é dada por $a(t) = 4t\vec{i} + 6t\vec{j} + \vec{k}$. Determine sua velocidade e posição no instante t.

Solução: Como $a(t) = v'(t)$, temos

$$v(t) = \int a(t)dt = \int (4t\vec{i} + 6t\vec{j} + \vec{k})dt = 2t^2\vec{i} + 3t^2\vec{j} + t\vec{k} + C$$

Para determinar o valor de C, usaremos o fato de que $v(0) = \vec{i} - \vec{j}$. A equação anterior nos dá $v(0) = C$, assim $C = \vec{i} - \vec{j}$ e

$$v(t) = 2t^2\vec{i} + 3t^2\vec{j} + t\vec{k} + \vec{i} - \vec{j} = (2t^2+1)\vec{i} + (3t^2-1)\vec{j} + t\vec{k}.$$

Como $v(t) = \vec{\mathbf{r}}'(t)$, temos

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{r}}(t) &= \int v(t)dt = \int ((2t^2+1)\vec{i} + (3t^2-1)\vec{j} + t\vec{k})dt \\ &= \left(\frac{2}{3}t^3 + t\right)\vec{i} + (t^3 - t)\vec{j} + \frac{t^2}{2}\vec{k} + D\end{aligned}$$

Para determinar o valor de D, usaremos o fato de que $\vec{\mathbf{r}}(0) = 0$. A equação anterior nos dá $\vec{\mathbf{r}}(0) = D$, assim $D = 0$ e

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = \left(\frac{2}{3}t^3 + t\right)\vec{i} + (t^3 - t)\vec{j} + \frac{t^2}{2}\vec{k}.$$

9.4 Comprimento de Arco

O comprimento de uma curva é a distância total percorrida pela partícula móvel. Prova-se que dada uma curva $\vec{\mathbf{r}} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, seu comprimento é dado por

$$c(\vec{\mathbf{r}}) = \int_a^b \|\vec{\mathbf{r}}'(t)\| dt.$$

Vejamos uma interpretação:

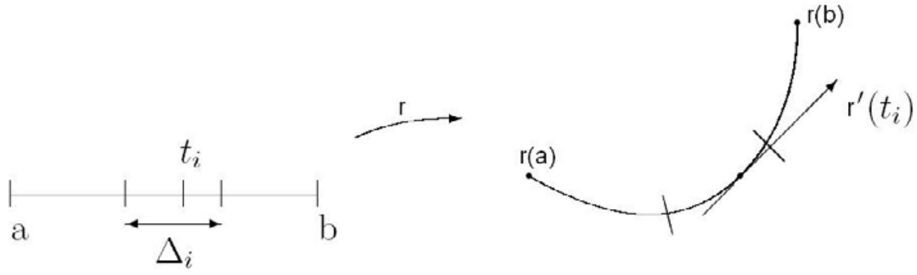

Figura 9.39: Comprimento de arco.

$\|\vec{\mathbf{r}}'(t_i)\| \cdot \Delta_i \backsimeq$ comprimento de arco destacado, melhorando a aproximação quando $Delta_i \longrightarrow 0$.

Assim:

$$c(\vec{\mathbf{r}}) = \lim_{\Delta_i \longrightarrow 0} \sum_{i=1}^{n} \|\vec{\mathbf{r}}_i'(t_i)\| \cdot \Delta_i = \int_a^b \|\vec{\mathbf{r}}'(t)\| dt$$

Observação 9.5. O Leitor interessado na dedução dessa fórmula pode consultar, por exemplo, o livro Advanced Calculus - Buck - pag. 321.

Exemplo 9.4.1. Considere a curva $\vec{\mathbf{r}} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\vec{\mathbf{r}}(t) = (cos\ t,\ 0)$. É fácil ver que (Veja a Figura 9.40) que o comprimento da curva é 4.

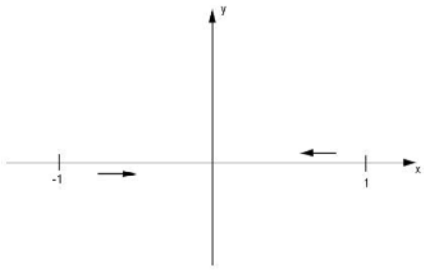

Figura 9.40: Traço da curva $\vec{\mathbf{r}}(t) = (cos\ t,\ 0)$.

Vamos calcular agora pela definição:

$$\begin{aligned} c(\vec{\mathbf{r}}) &= \int_0^{2\pi} \|\vec{\mathbf{r}}'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \|(-sen\ t,\ 0)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-sen\ t)^2} dt \\ &= 2\int_0^{\pi} sen\ t dt = 2[-cos\ t]_0^{\pi} = 2(-cos\ \pi + cos\ 0) = 2(2) = 4. \end{aligned}$$

Exemplo 9.4.2. Considere a hélice circular $\vec{\mathbf{r}}(t) = (cos\, t,\ sen\, t,\ t),\ t \in [0, 2\pi]$. Seu comprimento é dado por

$$\begin{aligned} c(\vec{\mathbf{r}}) &= \int_0^{2\pi} \|\vec{\mathbf{r}}'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \|(-sen\ t,\ cos\ t,\ 1)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-sen\ t)^2 + (cos\ t)^2 + 1} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

9.5 Resumo

Vimos nesta aula, que uma curva espacial é dada por uma função vetorial $\vec{\mathbf{r}} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

A derivada $\vec{\mathbf{r}}'(t)$ se existe e é diferente do vetor nulo é chamado de vetor tangente a $\vec{\mathbf{r}}$ em $\vec{\mathbf{r}}(t)$. O versor tangente é dado por

$$T(t) = \frac{\vec{\mathbf{r}}'(t)}{\|\vec{\mathbf{r}}'(t)\|}.$$

O vetor

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$$

é denominado vetor normal principal unitário a $\vec{\mathbf{r}}$ em $\vec{\mathbf{r}}(t)$.

O vetor $B(t) = T(t) \times N(t)$ é denominado vetor binormal, é perpendicular a T e N e também é unitário.

Se uma partícula se move no espaço de forma que seu vetor posição no instante t seja $\vec{\mathbf{r}}(t)$. Então sua velocidade e sua aceleração no instante t são dadas por $\|\vec{\mathbf{r}}'(t)\|$ e $\|\vec{\mathbf{r}}''(t)\|$, respectivamente.

O comprimento de uma curva é a distância total percorrida pela partícula móvel. Prova-se que dada uma curva $\vec{\mathbf{r}} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, seu comprimento é dado por

$$c(\vec{\mathbf{r}}) = \int_a^b \|\vec{\mathbf{r}}'(t)\| dt.$$

9.6 Atividades

01. Esboce o gráfico da curva cuja equação vetorial é dada por:

(a) $\vec{\mathbf{r}}(t) = t^2\vec{i} + t^4\vec{j} + t^6\vec{k}$;

(b) $\vec{\mathbf{r}}(t) = (sen\ t,\ 3,\ cos\ t)$;

(c) $\vec{\mathbf{r}}(t) = (1 + t,\ 3t,\ -t)$;

(d) $\vec{\mathbf{r}}(t) = t\vec{i} + t\vec{j} + cos\ t\vec{k}$.

02. Encontre uma equação vetorial e equações paramétricas para o segmento de reta que liga $P(-2,\ 4,\ 0)$ e $Q(6,\ -1,\ 2)$.

03. Duas partículas viajam ao longo das curvas espaciais

$$\vec{\mathbf{r}}_1(t) = (t,\ t^2,\ t^3) \quad \vec{\mathbf{r}}_2(t) = (1 + 2t,\ 1 + 6t,\ 1 + 14t).$$

As partículas colidem? Suas trajetórias se interceptam?

04. Determine os vetores tangente, normal, binormal e o versor tangente no ponto com valor de parâmetro t dado.

(a) $\vec{\mathbf{r}}(t) = (6t^5,\ 4t^3,\ 2t),\ t = 1;$

(b) $\vec{\mathbf{r}}(t) = 4\sqrt{t}\vec{i} + t^2\vec{j} + t\vec{k},\ t = 1;$

(c) $\vec{\mathbf{r}}(t) = e^{2t}\vec{i} + e^{-2t}\vec{j} + te^{2t}\vec{k},\ t = 0.$

05. Determine as equações paramétricas para a reta tangente à curva dada pelas equações paramétricas, no ponto especificado.

(a) $x = t^5,\ y = t^4,\ z = t^3;\ (1, 1, 1)$

(b) $x = e^{-t}cos\ t,\ y = e^{-t}sen\ t,\ z = e^{-t};\ (1, 0, 1)$

06. Determine o comprimento da curva dada:

(a) $\vec{\mathbf{r}}(t) = (2sen\ t,\ 5t,\ 2cos\ t),\ -10 \leq t \leq 10;$

(b) $\vec{\mathbf{r}}(t) = t^2\vec{i} + 2t\vec{j} + \ln\ t\vec{k},\ 1 \leq t \leq e;$

07. Determine a curvatura da curva dada por $\vec{\mathbf{r}}(t) = e^t cos\ t\vec{i} + e^t sen\ t\vec{j} + t\vec{k}$ no ponto $(1, 0, 0)$.

08. Determine os vetores velocidade e aceleração e a rapidez da partícula cuja função posição é dada:

(a) $\vec{\mathbf{r}}(t) = (\sqrt{2}t,\ e^t,\ e^{-t});$

(b) $\vec{\mathbf{r}}(t) = e^t(cos\ t\vec{i} + sen\ t\vec{j} + t\vec{k}).$

09. Determine os vetores velocidade e de posição de uma partícula dadas a sua aceleração, velocidade e posição iniciais.

$$a(t) = -5\vec{k},\ v(0) = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k},\ \vec{\mathbf{r}}(0) = 2\vec{i} + 3\vec{j}.$$

10. Mostre que, se uma partícula se move com rapidez constante, então os vetores velocidade e de aceleração são ortogonais.

9.7 Comentário das Atividades

Essas atividades, são referentes aos assuntos discutidos no decorrer desta aula e têm o objetivo de você (aluno) exercitar os conceitos aprendidos.

Lembre-se, sempre, que existem tutores para ajuda-los na resolução dessas atividades.

9.8 Referências

- GUIDORIZZI, H. L., **Um Curso de Cálculo** (Vol. 1 e 2). Rio de Janeiro: LTC Editora, 2006.
- STEWART, J., **Cálculo** (vol. 1 e 2). São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.
- THOMAS, G. B., **Cálculo** (vol. 1 e 2). São Paulo: Addison Wesley, 2002.