1
LIVRO

10
AULA

Funções de Varias Variáveis Reais a Valores Reais

META

Estudar o domínio, o gráfico e as curvas de níveis de funções de duas variáveis a valores reais.

OBJETIVOS

Estender os conceitos de domínio e de gráfico de funções de uma variável a valores reais.

PRÉ-REQUISITOS

Funções de uma variável a valores reais.

10.1 Introdução

No mundo real, quantidades físicas freqüentemente dependem de duas ou mais variáveis, de modo que, nesta aula, focalizaremos nossa atenção a funções de duas variáveis e estenderemos nossas idéias básicas do cálculo diferencial para funções de uma variável real a valores reais.

Antes de iniciarmos nosso estudo sobre funções de duas variáveis a valores reais, precisamos introduzir alguns conceitos da topologia do $\mathbb{R}^2$.

10.2 Noções Topológicas no $\mathbb{R}^2$

Nosso objetivo, nesta seção, é introduzir no $\mathbb{R}^2$ os conceitos de norma e de conjunto aberto, que generalizam os conceitos de módulo e de intervalo aberto, e que serão fundamentais em tudo o que veremos a seguir.

Considere $P = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Associamos ao ponto P um número real chamado sua norma, definido por:

$$\|P\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

.

Dizemos que a distância entre os pontos P e Q é dada por $d(P, Q) = \|P - Q\|$. Se $P = (x_1, x_2)$ e $Q = (y_1, y_2)$, então

$$d(P, Q) = \|P - Q\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Observação 10.6. Esta é a distância euclidiana. Tal distância pode ser estendida para n variáveis de maneira natural.

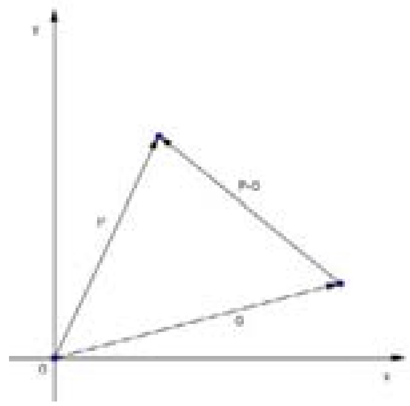

Figura 10.41: Distância entre os pontos P e Q.

Definição 10.12. Chama-se bola aberta (ou vizinhança) de centro em $P_0 \in \mathbb{R}^2$ e raio $\delta > 0$, ao seguinte conjunto:

$$B(P_0, \delta) = \{P \in \mathbb{R}^2;\ d(P, P_0) < \delta\}$$

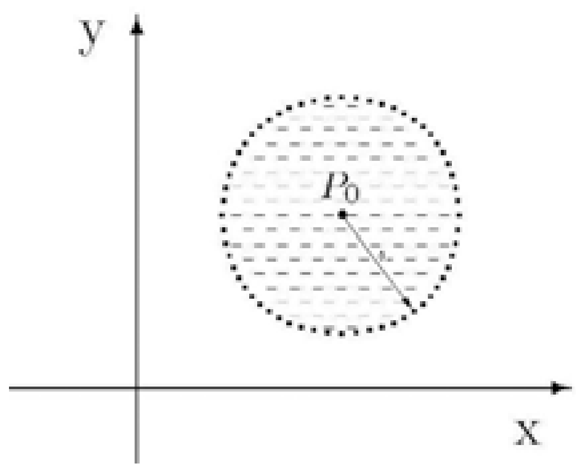

Figura 10.42: Bola aberta centrada em P_0 e raio δ.

Observação 10.7. Uma bola aberta de centro em P_0 e raio $\delta > 0$ também será chamada de vizinhança de raio δ do ponto P_0 que será denotada por $V_\delta(P_0)$.

Dado um conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$, qualquer, todo ponto de $\mathbb{R}^2$ tem uma das propriedades:

(a) dizemos que P é ponto interior a S, se existir $\delta > 0$ tal que $B(P, \delta) \subset S$.

(b) dizemos que P é ponto exterior a S, se existe $\delta > 0$ tal que $B(P, \delta)$ não contém qualquer elemento de S, isto é, $B(P, \delta) \cap S = \emptyset$.

(c) dizemos que P é ponto de fronteira de S, quando P não é interior nem exterior a S, isto é, para todo $\delta > 0$, $B(P, \delta)$ contém pontos de S e pontos que não são de S.

Exemplo 10.2.1. Observando a Figura 10.43 é fácil ver que P é ponto exterior a S, Q é ponto interior a S e R é ponto de fronteira de S.

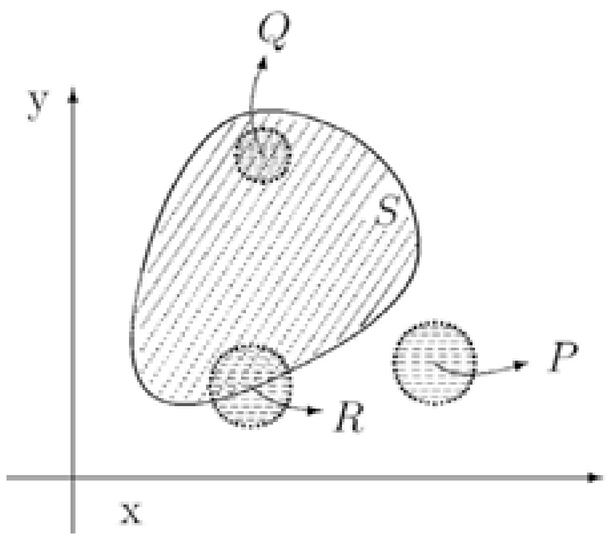

Figura 10.43: Pontos interiores, exteriores e de fronteira.

Exemplo 10.2.2. Considere o conjunto $S = \left\{ \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n} \right), n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}^2$. O esboço do conjunto S em $\mathbb{R}^2$ é dado na Figura 10.44. Note que os pontos P e Q são pontos de fronteira de S e o ponto R é ponto exterior a S.

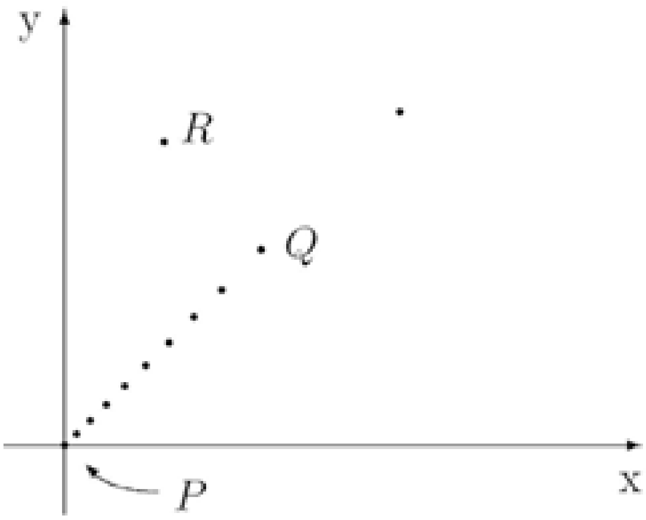

Figura 10.44: Pontos exteriores e de fronteira.

Definição 10.13. Seja $A \subset \mathbb{R}^2$. Dizemos que A é aberto, se todo ponto de A for interior a A, isto é, para todo $P \in A$ existe $\delta > 0$ tal que $B(P, \delta) \subset A$.

Exemplo 10.2.3. $\mathbb{R}^2$ é aberto em $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 10.2.4. $A = \{P = (x, y) \in \mathbb{R}^2; \|(x, y)\| < 1\}$ é aberto em $\mathbb{R}^2$. De fato: seja $P_0 = (x_0, y_0) \in A$. Logo $\|P_0\| = r < 1$. Consideremos a bola aberta $B\left(P_0, \dfrac{1-r}{2}\right)$. Mostremos que $B\left(P_0, \dfrac{1-r}{2}\right) \subset A$: Seja $P \in B\left(P_0, \frac{1-r}{2}\right)$ então

$$\begin{aligned} \|P\| &= \|P - P_0 + P_0\| \leq \|P - P_0\| + \|P_0\| \\ &= \|P - P_0\| + r < \frac{1-r}{2} + r < 1. \end{aligned}$$

Exemplo 10.2.5. Qualquer $B(P_0, \delta)$ é um conjunto aberto no $\mathbb{R}^2$.

Observação 10.8. Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$, o conjunto dos pontos interiores a A é chamado interior de A e é denotado por $intA$.

Definição 10.14. Dado $A \subset \mathbb{R}^2$. dizemos que P é um ponto de acumulação de A, se qualquer vizinhança de P contém pontos de A, diferentes de P.

Exemplo 10.2.6. Todo ponto $P \in \mathbb{R}^2$ é ponto de acumulação do $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 10.2.7. Nenhum ponto $P \in \mathbb{R}^2$ é ponto de acumulação do conjunto $\emptyset$.

Exemplo 10.2.8. O conjunto de pontos de acumulação de $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ é $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Exemplo 10.2.9. Considere o conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y > x\} \cup \{(1, 0)\}$. (Veja Figura 10.45) Observe que o ponto $(1, 0) \in A$

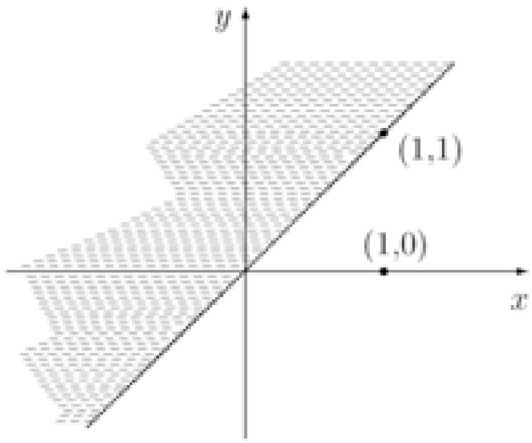

Figura 10.45: Esboço do conjunto A

mais não é ponto de acumulação de A e o ponto $(1, 1) \notin A$ mais é ponto de acumulação de A.

Definição 10.15. Um conjunto A é fechado se todo ponto de acumulação de A pertence a A.

Exemplo 10.2.10. $\mathbb{R}^2$ é fechado.

Exemplo 10.2.11. $\emptyset$ é fechado.

Exemplo 10.2.12. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < 1\}$ não é fechado.

Definição 10.16. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ é dito limitado se existe $\delta > 0$ tal que $A \subset B(0, \delta)$.

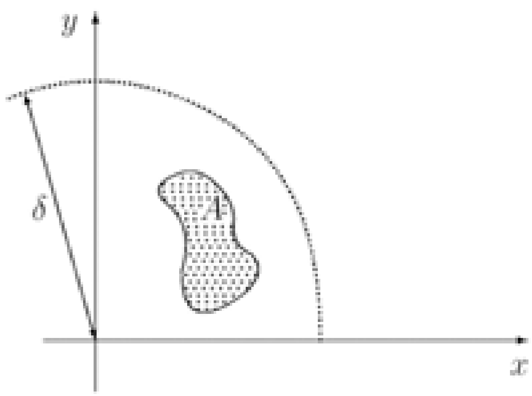

Figura 10.46: Conjunto limitado

Exemplo 10.2.13. Qualquer $B(P, \delta)$ é um conjunto limitado.

Exemplo 10.2.14. $\{(1, m) \in \mathbb{R}^2;\ m \in \mathbb{N}\}$ não é limitado. Desenhe-o.

Definição 10.17. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ se diz compacto quando é fechado e limitado.

Exemplo 10.2.15. Todo conjunto finito é compacto.

10.3 Funções

Nesta aula e nas seguintes daremos ênfase ao estudo das funções reais de duas variáveis reais, e você alunos que chegou até aqui, não terá dificuldade em generalizar os resultados para funções de mais de duas variáveis, já que não há diferenças importantes.

Definição 10.18. Seja $D \subset \mathbb{R}^2$. Uma função f definida em D com valores em $\mathbb{R}$ é uma correspondência que associa a cada ponto de D um e um só número real.

Notação 2. $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

O conjunto D é chamado **domínio** de f e representado por $D(f)$ ou D_f. O conjunto $B = \{f(P);\ P \in D\}$ é chamado **imagem** de f e denotado por $Im(f)$.

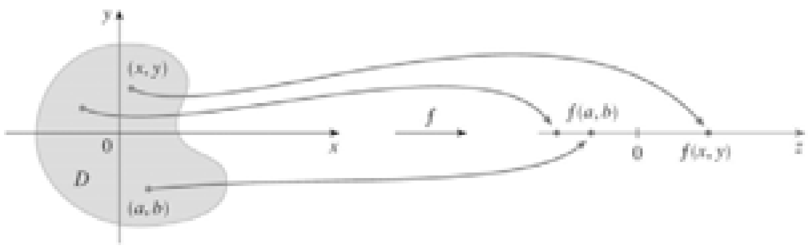

Figura 10.47: Função de duas variáveis reais a valores reais.

Exemplo 10.3.1. Seja f a função de duas variáveis reais a valores reais dada por

$$f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x - y^2}}.$$

O domínio de f é o conjunto de todos os pares (x, y) de números reais, com $x - y^2 > 0$, ou seja, $x > y^2$, isto é: $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x > y^2\}$. Esta função transforma o par ordenado (x, y) no número real $\frac{y}{\sqrt{x-y^2}}$. Uma representação gráfica do domínio de f é dada na Figura 10.48.

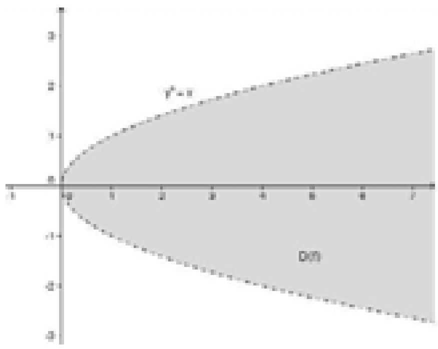

Figura 10.48: Representação gráfica do $D(f)$.

Exemplo 10.3.2. Represente graficamente o domínio da função $f : D(f) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \sqrt{y - x^2} + \sqrt{2x - y}.$$

Solução: O domínio de f é o conjunto de todos os pares (x, y), com $y - x^2 \geq 0$ e $2x - y \geq 0$: $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \geq x^2 \text{ e } y \leq 2x\}$. A representação gráfica do domínio de f é dada na Figura 10.49.

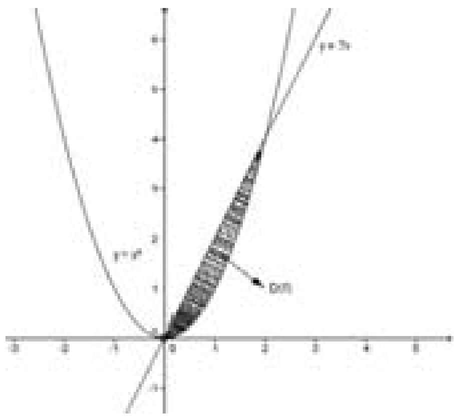

Figura 10.49: Representação gráfica do $D(f)$.

Exemplo 10.3.3. Represente graficamente o domínio da função

$z = f(x, y)$ dada por

$$z^2 + 4 = x^2 + y^2, \ z \geq 0.$$

Solução: $z^2 + 4 = x^2 + y^2, \ z \geq 0 \Longrightarrow z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$. Assim, f é a função dada por $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$. Seu domínio é o conjunto de todos (x, y), com $x^2 + y^2 - 4 \geq 0$. E

$$x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 4.$$

Portanto, o domínio de f é a parte exterior ao círculo de raio 2 e centro na origem. A representação gráfica do domínio de f é dada na Figura 10.50.

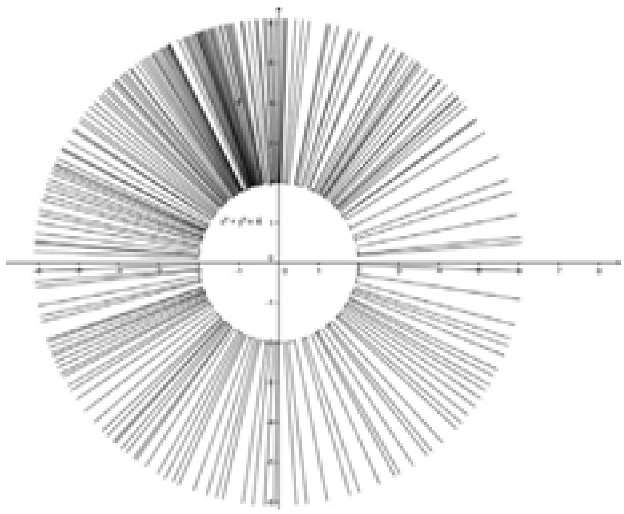

Figura 10.50: Representação gráfica do $D(f)$.

Exemplo 10.3.4. (Função Polinomial) Uma função polinomial de duas variáveis reais a valores reais é uma função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \sum_{m+n \leq p} a_{mn} x^m y^n$$

onde p é um natural fixo e os a_{mn} são números reais dados; a soma é estendida a todas as soluções (m, n), m e n naturais, da equação $m + n \leq p$.

(a) $f(x, y) = 3x^2y^2 - \frac{1}{3}xy + \sqrt{2}$ é uma função polinomial.

(b) $f(x, y) = ax+by+c$, onde a, b, c são reais dados, é uma função polinomial; tal função é denominada função afim.

Exemplo 10.3.5. (Função linear) Toda função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = ax + by$$

onde a, b são reais dados, denomina-se função linear.

Exemplo 10.3.6. (Função racional) Toda função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \frac{p(x, y)}{q(x, y)}$$

onde p e q são funções polinomiais, denomina-se função racional. O domínio de f é o conjunto $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ q(x, y) \neq 0\}$.

Observação 10.9. Analogamente como feito para funções $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ podemos definir, ponto a ponto, a soma, o produto e a divisão de duas funções $f, g : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Por exemplo: a soma $f + g$ é definida por: $(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$, $\forall (x, y) \in A$.

10.4 Gráficos

Uma forma, bastante eficiente, de visualizar o comportamento de uma função de duas variáveis é através de seu gráfico.

Definição 10.19. Se f é uma função de duas variáveis com domínio D, então o gráfico de f é o conjunto de todos os pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $z = f(x, y)$ e (x, y) pertençam a D.

Notação 3. $G(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z = f(x, y),\ (x, y) \in D\} = \{(x, y, f(x, y));\ (x, y) \in D\}$

Assim como o gráfico de uma função f de uma variável é uma curva C com equação $y = f(x)$, o gráfico de uma função de duas variáveis é uma superfície S com equação $z = f(x, y)$. Podemos enxergar a superfície S de f como estando diretamente em cima ou abaixo de seu domínio D que está no plano xy. (Veja a Figura 10.51).

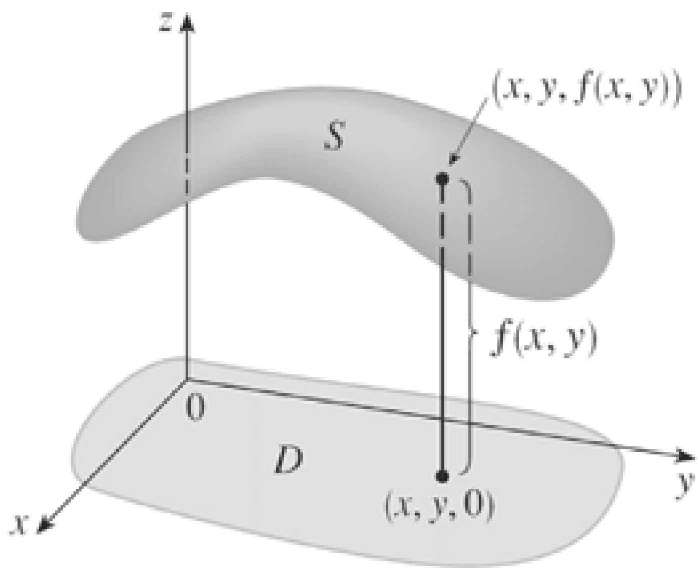

Figura 10.51: Gráfico de uma função de duas variáveis a valores reais.

Exemplo 10.4.1. O gráfico da função constante $f(x, y) = k$ é um plano paralelo ao plano xy.

Exemplo 10.4.2. O gráfico da função linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $z = f(x, y) = y$ é um plano passando pela origem e normal ao

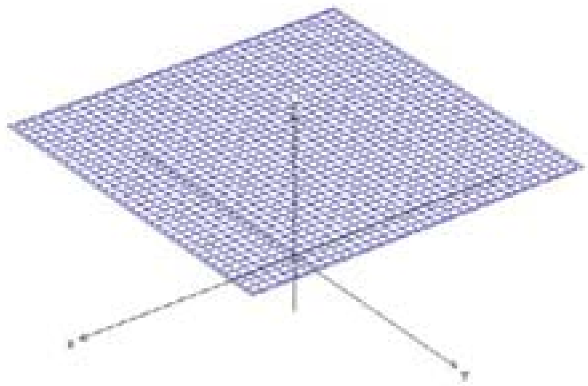

Figura 10.52: Gráfico da função constante.

vetor $(0, 1, -1)$:

$$z = y \Leftrightarrow y - z = 0 \Leftrightarrow (0, 1, -1) \cdot [(x, y, z) - (0, 0, 0)] = 0$$

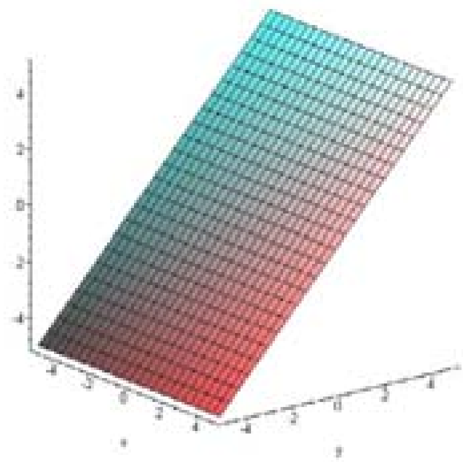

Figura 10.53: Gráfico da função $f(x, y) = y$.

Exemplo 10.4.3. O gráfico da função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 + y^2$ é dado por

$$G(f) = \{(x, y, x^2 + y^2),\ (x, y) \in A\}$$

e é denominado o parabolóide.

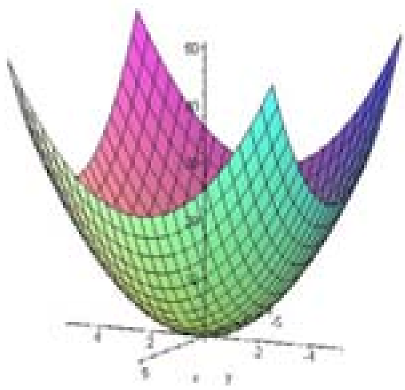

Figura 10.54: Esboço do parabolóide, feito no Software Maple através do comando "$plot3d(x^2 + y^2, x = -5..5, y = -5..5);$" .

Exemplo 10.4.4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada pela distância do ponto (x, y) ao ponto $(0, 0)$, ou seja $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. O gráfico de f é dado por

$$G(f) = \{(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

10.5 Curvas de Nível

Acabamos de estudar o gráfico de funções e vimos que este é um importante método para visualizar funções. Vamos agora estudar um novo método, empregado por cartógrafos, de visualização de funções de duas variáveis a valores reais. Trata-se de um mapa de

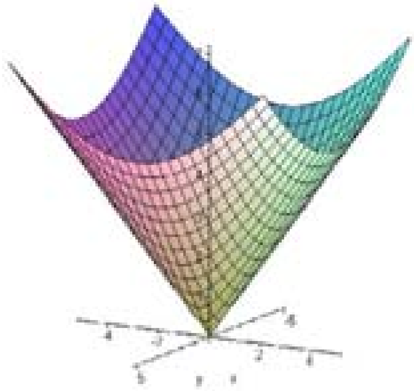

Figura 10.55: Esboço do gráfico de $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, feito no Software Maple através do comando "$plot3d(sqrt(x^2+y^2), x = -5..5, y = -5..5);$" .

contornos, em que os pontos com elevações constantes são ligados para formar curvas de contorno ou curvas de nível.

Definição 10.20. Sejam $z = f(x,y)$ uma função e $k \in Im(f)$. O conjunto de todos os pontos $(x,y) \in D(f)$ tais que $f(x,y) = k$ denomina-se curva de nível de f correspondente ao nível $z = k$. Em outras palavras, denomina-se curva de nível de f correspondente ao nível $z = k$ ao seguinte conjunto:

$$\{(x,y) \in D(f);\ f(x,y) = k\}.$$

Observação 10.10. Uma curva de nível de f correspondente ao nível $z = k$ é o conjunto de todos os pontos do domínio de f nos quais o valor de f é k.

Você pode ver na Figura 10.56 a relação entre as curvas de nível e os traços horizontais. As curvas de nível de f correspondente ao nível $z = k$ são apenas traços do gráfico de f no plano horizontal $z = k$ projetado sobre o plano xy. Assim, se você traçar as curvas de nível da função e visualiza-las elevadas para a superfície na altura indicada, poderá imaginar o gráfico da função colocando as duas informações juntas.

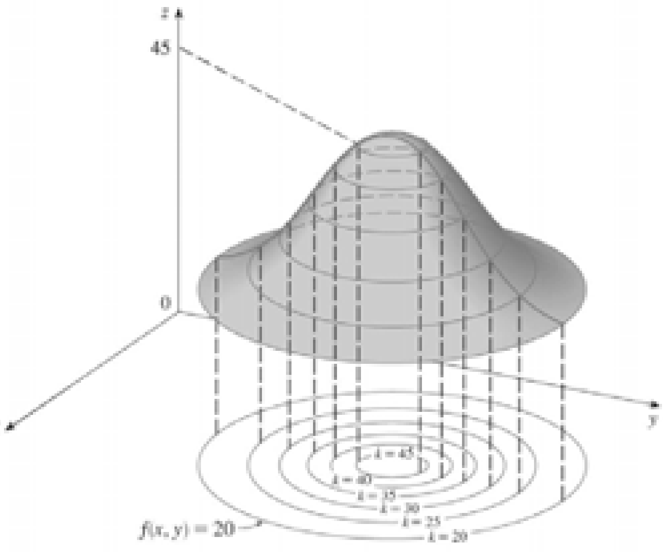

Figura 10.56: Curvas de nível de f correspondente ao nível $z = k$.

Exemplo 10.5.1. Esboce algumas curvas de nível da função $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Solução: A curva de nível de f correspondente ao nível k é dada por

$$x^2 + y^2 = k$$

que, para $k \geq 0$, descreve uma circunferência de raio $\sqrt{k}$ centrada no ponto $(0, 0)$. A Figura 10.57 mostra as curvas de nível de f correspondentes a alguns $k \geq 0$. Observe que, ao aumentarmos o valor de k estaremos aumentando o raio das circunferências. Deste modo, se elevarmos essas curvas aos seus nível correspondente e uni-las obtemos o gráfico do parabolóide.

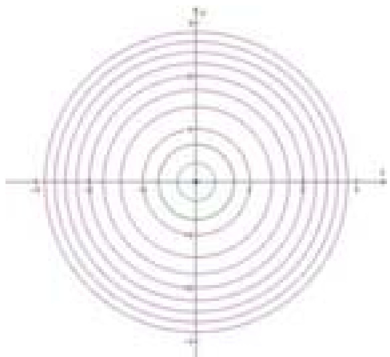

Figura 10.57: Curvas de nível de $f(x, y) = x^2 + y^2$ correspondente ao nível $z = k$.

Exemplo 10.5.2. Esboce algumas curvas de nível da função $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$.

Solução: A curva de nível de f correspondente ao nível k é dada por

$$\frac{1}{x^2 + y^2} = k \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{k}$$

que, para $k \geq 0$, descreve uma circunferência de raio $\frac{1}{\sqrt{k}}$ centrada no ponto $(0, 0)$. A Figura 10.58 mostra as curvas de nível de f correspondentes a alguns $k \geq 0$.

Observe que, ao aumentarmos o valor de k estaremos diminuindo o raio das circunferências. Agora, se elevarmos essas curvas aos seus nível correspondente e uni-las obtemos o seguinte gráfico (Ver Figura 10.59).

Exemplo 10.5.3. As Figuras 10.60 e 10.61 mostram, respectivamente, algumas curvas de níveis de $f(x, y) = \dfrac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$ e o gráfico correspondente.

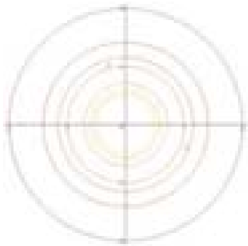

Figura 10.58: Curvas de nível de $f(x,y) = x^2 + y^2$ correspondente ao nível $z = k$.

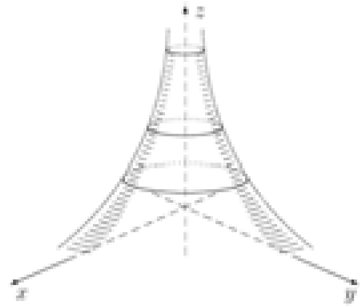

Figura 10.59: Esboço do gráfico da função $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$.

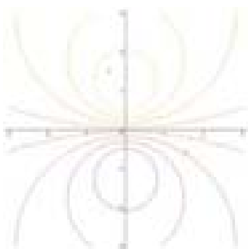

Figura 10.60: Curvas de Nível de $f(x,y) = \frac{-3y}{x^2+y^2+1}$.

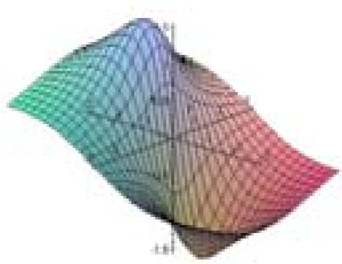

Figura 10.61: Esboço do gráfico da função $f(x,y) = \frac{-3y}{x^2+y^2+1}$.

10.6 Resumo

Uma função f de duas variáveis reais a valores reais é uma correspondência que associa a cada ponto de $D \subset \mathbb{R}^2$ um e um só número real.

Notação 4. $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

O conjunto D é chamado **domínio** de f e representado por $D(f)$ ou D_f. O conjunto $B = \{f(P);\ P \in A\}$ é chamado **imagem** de f e denotado por $Im(f)$.

O **gráfico** uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é o conjunto de todos os pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $z = f(x, y)$ e $(x, y) \in D(f)$.

O conjunto de todos os pontos $(x, y) \in D(f)$ tais que $f(x, y) = k$ denomina-se **curva de nível** de f correspondente ao nível $z = k$.

A extensão desses conceitos para funções de três ou mais variáveis é feita de modo natural. Se você (aluno) entendeu os conceitos estudados até hoje nesse curso, terá condições suficientes para estender os conceitos estudados nesta aula para mais de duas variáveis.

10.7 Atividades

01. Seja $f(x, y) = \ln(x + y - 1)$.
(a) Estime $f(1, 1)$.
(b) Estime $f(e, 1)$.
(c) Determine o domínio de f.
(d) Estabeleça a imagem de f.

02. Seja $f(x, y, z) = \ln(25 - x^2 - y^2 - z^2)$.
(a) Estime $f(1, 1, 1)$.
(b) Determine o domínio de f.
(c) Estabeleça a imagem de f.

03. Determine e faça um esboço do domínio da função:
(a) $f(x, y) = \sqrt{x + y}$
(b) $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - y^2)$.
(c) $f(x, y) = \dfrac{3x + 5y}{x^2 + y^2 - 4}$.

(d) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{y-x^2}}{1-x^2}$.
(e) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1} + \ln(4-x^2-y^2)$.

04. Esboce o gráfico da função:

(a) $f(x,y) = 1-x-y$

(b) $f(x,y) = 1-x^2$.

(c) $f(x,y) = y$.

(d) $f(x,y) = 3-x^2-y^2$.

(e) $f(x,y) = cos\ x$.

05. Traçar curvas de níveis para as funções:

$a)$ $f(x,y) = xy$;

$b)$ $f(x,y) = cos(x)$.

06. Ache as curvas de nível de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = sen(x-y)$. Esboce o gráfico de f.

10.8 Comentário das Atividades

Essas atividades, são referentes aos assuntos discutidos no decorrer desta aula e têm o objetivo de você (aluno) exercitar os conceitos aprendidos.

Lembre-se, sempre, que existem tutores para ajuda-los na resolução dessas atividades.

10.9 Referências

- GUIDORIZZI, H. L., **Um Curso de Cálculo** (Vol. 1 e 2). Rio de Janeiro: LTC Editora, 2006.
- STEWART, J., **Cálculo** (vol. 1 e 2). São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.
- THOMAS, G. B., **Cálculo** (vol. 1 e 2). São Paulo: Addison Wesley, 2002.