1
LIVRO

11 AULA

Limites, Continuidade e Derivadas Parciais

META

Estudar limite, continuidade e as derivadas parciais de funções de duas variáveis a valores reais.

OBJETIVOS

Estender os conceitos de limite e continuidade, e estudar as derivadas parciais de funções de uma variável a valores reais.

PRÉ-REQUISITOS

Limite, Continuidade e Derivadas de funções de uma variável a valores reais.

11.1 Introdução

Nesta aula, vamos apresentar os conceitos de limite, continuidade e derivadas parciais. Você que entendeu e lembra dos conceitos de limite, continuidade e derivadas de funções de uma variável real, visto no curso de Cálculo 1, não terá dificuldade alguma em compreender o assunto dessa aula.

11.2 Limite

Definição 11.21. Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, (x_0, y_0) um ponto de acumulação de A e L um número real. Dizemos que o limite da função f no ponto (x_0, y_0) é igual a L e escrevemos

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

quando:
Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $(x, y) \in D(f)$, $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Longrightarrow |f(x, y) - L| < \epsilon$.

Notação 5. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} f(x, y) = L$ e $f(x, y) \longrightarrow L$ quando $(x, y) \longrightarrow (x_0, y_0)$.

Note que $|f(x, y)-L|$ corresponde à distância entre os números $f(x, y)$ e L, e $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ é a distância entre os pontos (x, y) e o ponto (x_0, y_0). Assim a Definição 11.21 diz que a distância entre $f(x, y)$ e L pode ser arbitrariamente pequena se tomarmos a distância de (x, y) a (x_0, y_0) suficientemente pequena (mais não nula). A Figura 11.62 ilustra a Definição 11.21 por meio de um diagrama de setas. Se nos é dado um pequeno intervalo $(L-\epsilon,\ L+\epsilon)$ em torno de L, então podemos determinar uma bola aberta $B((x_0, y_0),\ \delta)$ com centro em (x_0, y_0)

e raio $\delta > 0$ tal que f leve todos os pontos de $B((x_0, y_0),\ \delta)$ [exceto possivelmente (x_0, y_0)] no intervalo $(L - \epsilon,\ L + \epsilon)$.

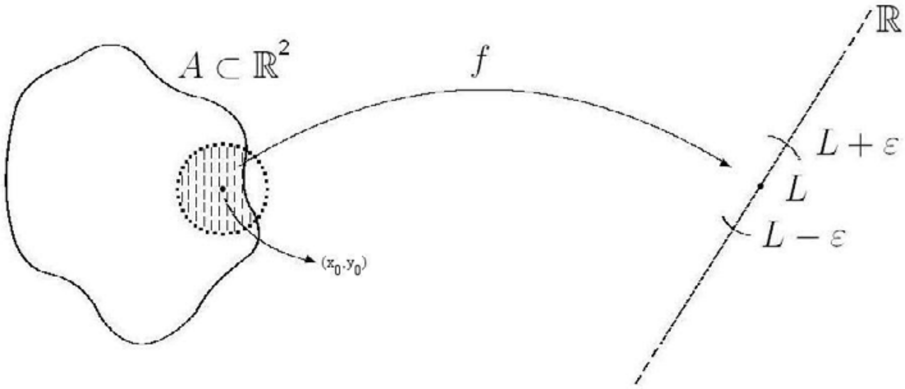

Figura 11.62: Representação geométrica do limite.

Observação 11.11. De agora em diante, sempre que falarmos que f tem limite em (x_0, y_0), fica subentendido que (x_0, y_0) é ponto de acumulação de $D(f)$.

Exemplo 11.2.1. Se $f(x, y) = k$ é uma função constante, então, para todo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$,

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} k = k.$$

Solução: Temos que $|f(x, y) - k| = |k - k| = 0$. Assim, dado $\epsilon > 0$ e tomando-se um $\delta > 0$ qualquer,

$$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Longrightarrow |f(x, y) - k| < \epsilon.$$

Logo

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} k = k.$$

Exemplo 11.2.2. Se $f(x, y) = x$, para todo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$,

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} x = x_0.$$

Solução: Temos que

$$|f(x,y) - x_0| = |x - x_0| = \sqrt{(x-x_0)^2}$$
$$\leq \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \|(x,y) - (x_0,y_0)\|$$

Deste modo, dado $\epsilon > 0$ e tomando $\delta = \epsilon$ vem:

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \Longrightarrow |f(x,y) - k| < \epsilon.$$

Logo,

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} x = x_0.$$

Exemplo 11.2.3. Se $f(x,y) = x+y^2$ então $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(2,1)} f(x,y) = 3.$

Solução: Temos que

$$|f(x,y) - 3| = |x + y^2 - 3| = |x - 2 + y^-1| \leq |x-2| + |y+1||y-1|.$$

Então, dado $\epsilon > 0$ tomando $\delta = min\{1, \frac{\epsilon}{3}\}$ obtemos que $|y+1| < 3$ e

$$\|(x,y) - (2,1)\| = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} < \delta \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow |f(x,y) - 3| \leq |x-2| + |y+1||y-1| \leq \delta + 3\delta = 4\delta \leq 4\frac{\epsilon}{4} = \epsilon.$$

Para as funções de uma única variável, quando fazemos x se aproxima de x_0, só existe duas direções possíveis de aproximação: pela direita e pela esquerda. Lembremos la do Cálculo 1 que, se os limites laterais são diferentes então o limite não existe.

Já para as funções de duas variáveis essa situação não é tão simples porque existem infinitas maneiras de (x,y) se aproximar de (x_0,y_0) por uma quantidade infinita de direções e de qualquer maneira que se queira (veja a Figura 11.63), bastando que (x,y) se mantenha no domínio de f.

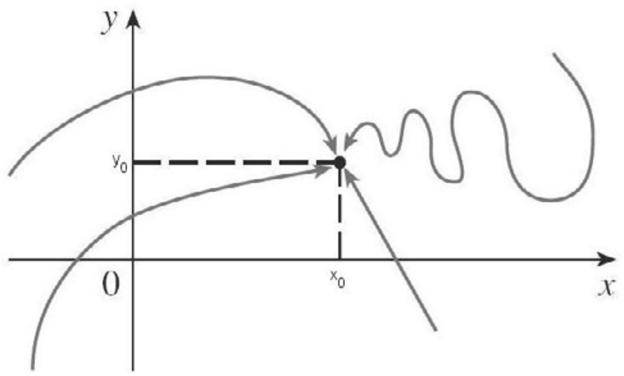

Figura 11.63: Infinitas maneiras de (x, y) se aproximar de (x_0, y_0).

O proximo teorema nos diz que se o limite de uma função f existe em (x_0, y_0) e é igual a L então não importa a maneira que (x, y) se aproxima de (x_0, y_0) que o limite sempre vai ser L.

Teorema 11.21. Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e (x_0, y_0) um ponto de acumulação. Suponha que $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} f(x, y) = L$ e seja γ uma curva em $\mathbb{R}^2$, contínua em t_0, com $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ e, para todo $t \neq t_0$, $\gamma(t) \neq (x_0, y_0)$ com $\gamma(t) \in D(f)$. Então

$$\lim_{t\longrightarrow t_0} f(\gamma(t)) = L.$$

Demonstração: De $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} f(x, y) = L$ segue que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x, y) - L| < \epsilon. \qquad (11.1)$$

Sendo γ contínua em t_0, para todo $\gamma_1 > 0$ acima, existe $\gamma > 0$ tal que

$$0 < \|t - t_0\| < \delta \Longrightarrow |\gamma(t) - \gamma(t_0)| < \delta_1. \qquad (11.2)$$

De (11.1) e (11.2) segue

$$0 < \|t - t_0\| < \delta \Longrightarrow |f(\gamma(t)) - L| < \epsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{t \longrightarrow t_0} f(\gamma(t)) = L.$$

■

Sejam γ_1 e γ_2 duas curvas nas condições do Teorema 11.21. Segue do Teorema 11.21 que se ocorrer

$$\lim_{t \longrightarrow t_0} f(\gamma_1(t)) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{t \longrightarrow t_0} f(\gamma_2(t)) = L_2 \tag{11.3}$$

com $L_1 \neq L_2$, então $\displaystyle\lim_{(x,y) \longrightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ não existirá. Da mesma forma, tal limite não existirá de um dos limites em (11.1) não existir.

Exemplo 11.2.4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{para } x \neq 0 \\ 0, & \text{para } x = 0 \end{cases}$$

Não existe o $\displaystyle\lim_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} f(x,y)$. De fato, considerando as curvas $\gamma_1(t) = (t,0)$ e $\gamma_2(t) = (0,t)$, temos que

$$\lim_{t \longrightarrow 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t \longrightarrow 0} 1 = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{t \longrightarrow 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t \longrightarrow 0} 0 = 0.$$

Logo, $\displaystyle\lim_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} f(x,y)$ não existe.

Exemplo 11.2.5. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$. Observe que $f(x,y) \equiv 0$ quando (x,y) está em um dos eixos coordenados, de modo que $f(x,y)$ converge para 0 quando (x,y) aproxima-se de $(0,0)$ pelos eixos. Por outro lado, considerando a curva $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ dada por $\gamma(t) = (t,t)$ temos que

$$\lim_{t \longrightarrow 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, $\displaystyle\lim_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ não existe.

Observamos que continuam válidas para funções de duas variáveis reais a valores reais as seguintes propriedades dos limites cujas demonstrações são exatamente iguais às que voce fez para funções de uma variável real, na disciplina de Cálculo 1.

1. (Teorema do Confronto) Se $f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y)$ para $0 < \|(x,y)-(x_0,y_0)\| < r$ e se

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} f(x,y) = L = \lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} h(x,y)$$

então

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} g(x,y) = L.$$

2. Se $\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$ e se $|g(x,y)| \leq M$ para $0 < \|(x,y)-(x_0,y_0)\| < r$ onde $r > 0$ e $M > 0$ são reais fixos, então

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} f(x,y)g(x,y) = 0.$$

3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} |f(x,y)| = 0.$

4. $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} f(x,y) = L \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} [f(x,y)-L] = 0.$

5. $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} f(x,y) = L \Leftrightarrow \lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} f(x_0+h,y_0+k) = L.$

6. Se $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} f(x,y) = L_1$ e $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} g(x,y) = L_2$, então,

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} [f(x,y)+g(x,y)] = L_1 + L_2;$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} kf(x,y) = kL_1;$ (k constante)

$$(c) \lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} f(x,y)g(x,y) = L_1L_2;$$

$$(d) \lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L_1}{L_2} \text{ desde que } L_2 \neq 0.$$

7. (Conservação do sinal) Se $\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} f(x,y) = L,\ L > 0$, então existirá $\delta > 0$, tal que, para todo $(x,y) \in D(f)$,

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \Longrightarrow f(x,y) > 0.$$

Exemplo 11.2.6. Calcula, caso exista, $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$.
Solução: Note que

$$\frac{x^3}{x^2+y^2} = x \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2}.$$

$\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} x = 0$ e $\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| \leq 1$, para todo $(x,y) \neq (0,0)$. Logo, segue da Propriedade 2 acima que

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} x \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} = 0.$$

11.3 Continuidade

Definição 11.22. Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e (x_0,y_0) um ponto de acumulação de A com $(x_0,y_0) \in A$. Dizemos que f é contínua em (x_0,y_0) se

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0),$$

ou seja:

Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $(x,y) \in D(f)$, $0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \Longrightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \epsilon$.

Definição 11.23. Uma função é dita contínua em um conjunto B quando for contínua em todos os pontos de B. Diremos, simplesmente, que f é contínua se o for em todos os pontos de seu domínio.

Exemplo 11.3.1. A função constante $f(x,y) = k$ é contínua, pois,

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} f(x,y) = k = f(x_0,y_0)$$

para todo $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. (Veja Exemplo 11.2.1).

Exemplo 11.3.2. A função $f(x,y) = x$ é contínua, pois,

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} x = x_0 = f(x_0,y_0)$$

para todo $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. (Veja Exemplo 11.2.2).

Exemplo 11.3.3. A função $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ não é contínua em $(0,0)$. De fato, tomando-se as curvas $\gamma_1(t) = (t,0)$ e $\gamma_2(t) = (0,t)$ vem,

$$\lim_{t\longrightarrow 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{t^2}{t^2} = 1$$

e

$$\lim_{t\longrightarrow 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{-t^2}{t^2} = -1.$$

Segue das propriedades de limite, as seguintes propriedades de funções contínuas:

1. A soma de m funções contínuas em um ponto é uma função contínua no ponto.

2. O produto de m funções contínuas em um ponto é uma função contínua no ponto.

Conseqüência imediata dessas propriedades: A função polinomial $p(x,y)$ em x e y dada pela soma de parcelas do tipo

$$ax^{l_1}x^{l_2}$$

onde a é constante e $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$ é uma função contínua como produto e soma de funções contínuas.

Definição 11.24. Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow B \subset \mathbb{R}$ e $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$. A função composta de g com f, indicada por $g \circ f$ é definido por

$$\begin{array}{rcl} g \circ f : A \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (g \circ f)(x,y) & = & g(f(x,y)) \end{array}$$

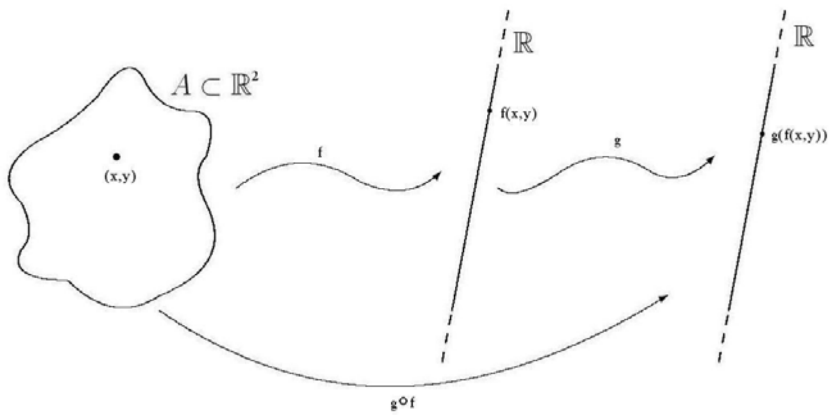

Figura 11.64: Função composta

O próximo teorema nos diz que se $g(u)$ e $f(x,y)$ forem contínuas e se $Im(f) \subset D(g)$, então a função composta $h(x,y) = g(f(x,y))$ também o será.

Teorema 11.22. Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow B \subset \mathbb{R}$ e $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que f seja contínua em (x_0, y_0) e g é contínua em $f(x_0, y_0)$. Então $g \circ f$ é contínua em (x_0, y_0).

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, queremos encontrar $\delta > 0$ tal que, se $(x, y) \in A$,

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Longrightarrow |(g \circ f)(x, y) - (g \circ f)(x_0, y_0)| < \epsilon.$$

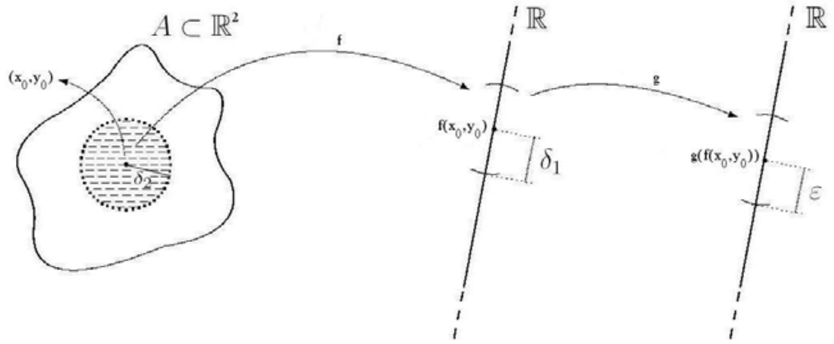

Figura 11.65: Esboço da demonstração

Sabemos que existe $\delta_1 = \delta_1(\epsilon,\ f(x_0, y_0))$ tal que

$$z \in B,\ |z - f(x_0, y_0)| < \delta_1 \Longrightarrow |g(z) - g(f(x_0, y_0))| < \epsilon$$

Como f é contínua em (x_0, y_0) sabemos que dado $\delta_1 > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$(x, y) \in A,\ \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta_2 \Longrightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \delta_1.$$

Logo para

$$(x, y) \in A,\ \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta_2 \Longrightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \delta_1$$
$$\Longrightarrow |g(f(x, y)) - g(f(x_0, y_0))| < \epsilon.$$

Portanto, $g \circ f$ é contínua em (x_0, y_0). ■

Como conseqüência deste teorema, segue que se $g(x)$ for contínua, então a função $h(x, y) = g(x)$ também será contínua. De fato, sendo $f(x, y) = x$, teremos $h(x, y) = g(f(x, y))$, com g e f contínuas.

Exemplo 11.3.4. $h(x,y) = x^2 + \sqrt{x}$ é contínua em seu domínio.

Exemplo 11.3.5. Sendo $f(x,y)$ contínua, as compostas *sen* $f(x,y)$, *cos* $f(x,y)$, $[f(x,y)]^2$, etc.

Exemplo 11.3.6. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é contínua em $\mathbb{R}^2$. De fato, temos que (Veja Exemplo 11.2.6)

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0).$$

11.4 Derivadas Parciais

Seja $z = f(x,y)$ uma função de duas variáveis a valores reais definida em um conjunto aberto A e seja $(x_0, y_0) \in A$. Então para x suficientemente próximo de x_0 todos os pontos (x, y_0) estão em A, logo podemos considerar a função g de uma variável real dada por

$$g(x) = f(x, y_0).$$

A derivada desta função no ponto $x = x_0$ (caso exista) denomina-se derivada parcial de f, em relação a x, no ponto (x_0, y_0).

Notação 6. $f_x(x_0,y_0)$; $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$; $f_1(x_0,y_0)$; $z_x(x_0,y_0)$; $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)$.

Assim:

$$\begin{aligned} f_x(x_0,y_0) &= \left[\frac{dg(x)}{dx}\right]_{x_0} = \lim_{\Delta x\longrightarrow 0} \frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\longrightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

ou, ainda,

$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{x\longrightarrow x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}.$$

Seja B o subconjunto aberto de A formado por todos os pontos (x, y) tais que $f_x(x, y)$ existe, fica assim definida uma nova função, indicada por $f_x(x, y)$ e definida em B, para cada $(x, y) \in B$ associa o número $f_x(x, y)$, onde

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Tal função denomina-se função derivada parcial de 1.ª ordem de f, em relação a x, ou simplesmente, derivada parcial de f em relação a x.

Considerando $z = f(x, y)$ como uma função de y, para x fixo, obtemos de maneira semelhante a derivada parcial de f, em relação a y, no ponto (x_0, y_0).

Notação 7. $f_y(x_0, y_0)$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$; $f_2(x_0, y_0)$; $z_y(x_0, y_0)$; $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Temos

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \longrightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta x) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

ou

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{y \longrightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Interpretação Geométrica da Derivada Parcial

Podemos interpretar geometricamente a derivada parcial como uma inclinação: Consideremos a secção da superfície $z = f(x, y)$ pelo plano vertical $y = y_0$. Neste plano a curva $z = f(x, y_0)$ tem uma tangente com inclinação $f_x(x_0, y_0)$ em x_0.

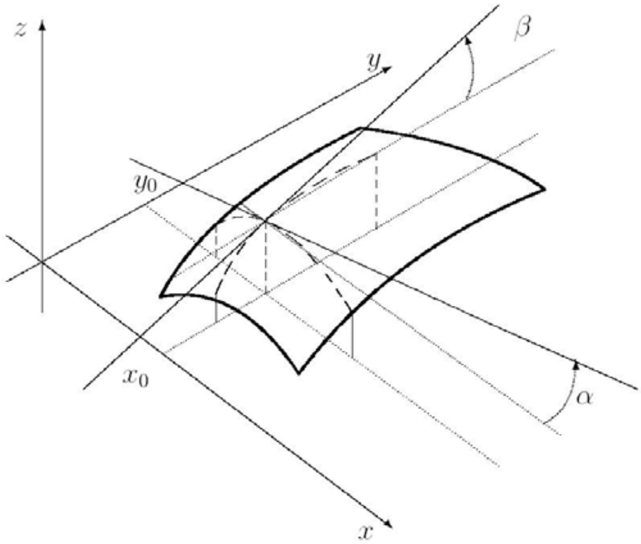

Figura 11.66: Interpretação geométrica das derivadas parciais

As secções da superfície $z = f(x, y)$ com os planos $y = y_0$ e $x = x_0$ são dadas, respectivamente, nas Figuras 11.67 e 11.68.

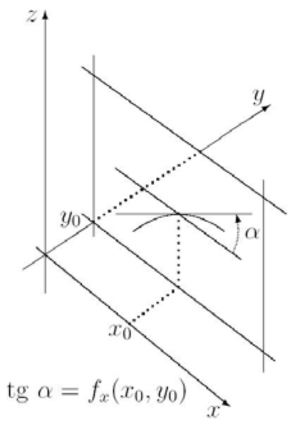

Figura 11.67: Secções da superfície $z = f(x, y)$ com o plano $y = y_0$.

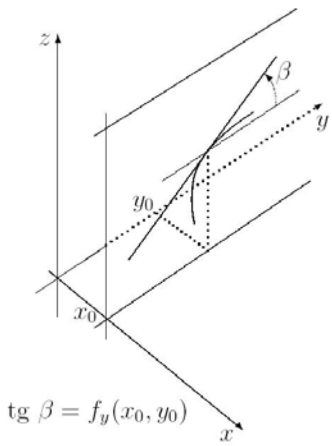

Figura 11.68: Secções da superfície $z = f(x, y)$ com o plano $x = x_0$.

Para se calcular $f_x(x_0, y_0)$ fixa-se $y = y_0$ em $z = f(x, y)$ e calcula-se a derivada de $g(x) = f(x, y_0)$ em $x = x_0 : f_x(x_0, y_0) = g'(x_0)$. Da mesma forma, $f_x(x, y)$ é a derivada, em relação a x, de $f(x, y)$, mantendo-se y constante. Por outro lado, $f_y(x, y)$ é a derivada em relação a y, de $f(x, y)$, mantendo-se x constante.

Exemplo 11.4.1. Se $f(x, y) = x^2y + ycos\ x$, determine $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$, $f_x(1, 0)$ e $f_y(1, 0)$.

Solução: Para encontrarmos $f_x(x, y)$ devemos olhar y como constante em $f(x, y) = x^2 + ycos\ x$ e derivar em relação a x:

$$f_x(x, y) = 2xy - ysen\ x.$$

Para encontramos $f_y(x, y)$ devemos olhar x como constante em $f(x, y) = x^2 + ycos\ x$ e derivar em relação a y:

$$f_y(x, y) = x^2 + cos\ x.$$

Agora $f_x(1, 0) = 2 \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot sen\ 1 = 0$ e $f_y(1, 0) = 1^2 + cos\ 1 = 1 + cos\ 1$.

11.5 Derivadas parciais de ordem superior

Se $z = f(x, y)$ é uma função de duas variáveis reais a valores reais, então f_x e f_y são também funções de duas variáveis reais a valores reais. Se estas duas funções f_x e f_y estiverem definidas em um aberto A poderemos considerar suas derivadas parciais $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$ e $(f_y)_y$ chamadas derivadas parciais de 2.ª (segunda) ordem de f, denotadas como segue:

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$
$$(f_x)_y = f_{xx} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$
$$(f_y)_x = f_{xx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$
$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Se estas derivadas parciais existirem em todos os pontos de um aberto A, poderemos falar nas derivadas parciais de 3.ª (Terceira) ordem, e assim sucessivamente.

Definição 11.25. Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, A aberto. Dizemos que f é de classe C^k $(k \geq 1)$ em $B \subset A$ se f e as derivadas parciais até a ordem k forem contínuas em todos os pontos de B. f é dita de classe C^∞ se f é de classe C^k, $\forall k \geq 1$.

Notação 8. $f \in C^k$ e $f \in C^\infty$.

Exemplo 11.5.1. Seja $f(x, y) = xy$. Temos que: $f_x(x, y) = y$, $f_y(x, y) = x$, $f_{xx}(x, y) = 0$, $f_{xy}(x, y) = 1$, $f(yx)(x, y) = 1$ e $f_{yy}(x, y) = 0$. Observe que as derivadas de ordem k, $k \geq 3$ existem e são todas nulas. Portanto $f \in C^\infty$.

Exemplo 11.5.2. A função $z = f(x, y) = xsen\ y + y^2 cos\ x$ é de classe C^∞. De fato, temos que $f_x(x, y) = sen\ y - y^2 sen\ x$, $f_y(x, y) = xcos\ y + 2ycos\ x$, $f_{xx}(x, y) = -y^2 cos\ x$, $f_{xy}(x, y) = cos\ y - 2ysen\ x$, $f_{yx}(x, y) = cos\ y - 2ysen\ x$ e $f_{yy}(x, y) = -xsen\ y + 2cos\ x$. Observe que existem e são contínuas todas derivadas parciais.

Neste dois exemplos notamos que $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$, isto é, a ordem de derivação não influi no resultado, mais isto nem sempre é válido. De fato: Consideremos $z = f(x, y) = x + |y|$. Temos que $f_x(x, y) \equiv 1$ e $f_{xy}(0, 0) = 0$. No entanto,

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y \longrightarrow 0} \frac{f(0,\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \longrightarrow 0} \frac{|\Delta y|}{\Delta y}$$

que não existe. e assim $f_{yx}(0, 0)$ não existe.

O próximo teorema fornece condições sob as quais podemos afirmar que $f_{xy} = f_{yx}$.

Teorema 11.23. (Teorema de Schwartz) Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, A aberto. Se f for de classe C^2 em A, então

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

para todo $(x, y) \in A$.

Vejamos outro exemplo, onde não temos a igualdade $f_{xy} = f_{yx}$.

Exemplo 11.5.3. Consideremos $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$
Neste caso, temos que $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$. De fato,

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{xy^4 + 3x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\
f_y(x,y) &= \frac{y^5 - x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, \quad \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\
f_x(0,0) &= \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f(\Delta x,0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0 \\
f_y(0,0) &= \lim_{\Delta y \longrightarrow 0} \frac{f(0,\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0 \\
f_{xy}(0,0) &= \lim_{\Delta y \longrightarrow 0} \frac{f_x(0,\Delta y) - f_x(0,0)}{\Delta y} = 1 \\
f_{yx}(0,0) &= \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f_y(\Delta x,0) - f_y(0,0)}{\Delta x} = 0
\end{aligned}$$

Observação 11.12. No exemplo anterior podemos observar que f, f_x e f_y são contínuas em todo $\mathbb{R}^2$. Assim, pelo Teorema anterior f_{xy} não pode ser contínua em $(0, 0)$, pois caso fosse $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$, o que não é o caso.

11.6 Resumo

Faremos, agora, um resumo das principais definições e resultados vistos nesta aula.

Definição 11.26. Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, (x_0, y_0) um ponto de acumulação de A e L um número real. Dizemos que o limite da função f no ponto (x_0, y_0) é igual a L e escrevemos

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

quando:

Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $(x, y) \in D(f)$, $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Longrightarrow |f(x, y) - L| < \epsilon$.

Teorema 11.24. Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e (x_0, y_0) um ponto de acumulação. Suponha que $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ e seja γ uma curva em $\mathbb{R}^2$, contínua em t_0, com $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ e, para todo $t \neq t_0,\ \gamma(t) \neq (x_0, y_0)$ com $\gamma(t) \in D(f)$. Então

$$\lim_{t\longrightarrow t_0} f(\gamma(t)) = L.$$

Sejam γ_1 e γ_2 duas curvas nas condições do Teorema 11.21. Segue do Teorema 11.21 que se ocorrer

$$\lim_{t\longrightarrow t_0} f(\gamma_1(t)) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{t\longrightarrow t_0} f(\gamma_2(t)) = L_2 \tag{11.1}$$

com $L_1 \neq L_2$, então $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} f(x,y)$ não existirá. Da mesma forma, tal limite não existirá de um dos limites em (11.1) não existir.

Definição 11.27. Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e (x_0, y_0) um ponto de acumulação de A com $(x_0, y_0) \in A$. Dizemos que f é contínua em (x_0, y_0) se

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0),$$

ou seja:

Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $(x, y) \in D(f)$, $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Longrightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon$.

Definição 11.28. Uma função é dita contínua em um conjunto B quando for contínua em todos os pontos de B. Diremos, simplesmente, que f é contínua se o for em todos os pontos de seu domínio.

11.7 Atividades

01. Mostre, pela definição, que:

$a)$ $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} (x^2 + y^2 - 4) = 0$;

$b)$ $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} (x^2 + 2xy + y^2) = 9$.

02. Seja a função $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ .Prove que a função tem limite igual a 1 nos pontos (x_0, y_0) com $x_0 > 0$ e que tem limite igual a -1 nos pontos (x_0, y_0) com $x_0 < 0$. Prove ainda que não tem limite non pontos $(0, y_0)$.

03. Determine o valor dos limites, quando existirem:

$a)$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}$; $b)$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x^2 + y^2}$;

$c)$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2 + y^2 sen\dfrac{1}{xy}$; $d)$ $\lim\limits_{(x,y)\to(4,\pi)} x^2 sen\dfrac{y}{x}$;

$e)$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1 + y^2 sen\ x}{x}$; $f)$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1 + x - y}{x^2 + y^2}$;

$g)$ $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{4x - y - 3z}{2x - 5y + 2z}$.

04. Usando a definição, prove que $f(x, y) = xy + 6x$ é contínua em:

$a)$ $(1,2)$; $b)$ (x_0, y_0).

05. Investigue a continuidade de cada uma das funções abaixo, no ponto $(0,0)$:

$$a)\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{3x+5y}, & 3x+5y \neq 0 \\ 0, & 3x+5y = 0 \end{cases};$$

$$b)\ f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2\ sen\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{se} \quad (x,y) \neq 0 \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = 0 \end{cases};$$

$$c)\ f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x-y}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq 0 \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = 0 \end{cases};$$

06. Se $f(x,y) = (x-y)sen\ (3x+2y)$ calcule: $a)$ $f_x(0, \frac{\pi}{3})$; $b)$ $f_y(0, \frac{\pi}{3})$.

07. Calcule u_x e u_y quando:

$a)$ $u(x,y) = e^{xy}sen(x+y)$; $b)$ $u(x,y) = ln(x^4+y^4)arcsen\sqrt{1-x^2-y^2}$.

08. Se $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2+xy}{x+y}, & \text{se} \quad x \neq -y \\ 0, & \text{se} \quad x = -y \end{cases}$.

$a)$ Calcule $f_x(x,0)$ e $f_y(0,y)$;

$b)$ Observe que f não é constante em nenhuma vizinhança de $(0,0)$.

09. Ache $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y)$ se $f(x,y) = ln(x+y)$.

10. Mostre que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ esta satisfeita por:

$a)$ $ln(x^2+y^2)$; $b)$ $x^3 - 3xy^2$.

11. Calcule $f_y(1,2)$ onde

$$f(x,y) = x^{x^{x^y}} + sen(\pi x)[x^2 + sen(x+y) + e^x cos^2 y].$$

11.8 Comentário das Atividades

Essas atividades, são referentes aos assuntos discutidos no decorrer desta aula e têm o objetivo de você (aluno) exercitar os conceitos aprendidos.

Lembre-se, sempre, que existem tutores para ajuda-los na resolução dessas atividades.

11.9 Referências

- GUIDORIZZI, H. L., **Um Curso de Cálculo** (Vol. 1 e 2). Rio de Janeiro: LTC Editora, 2006.
- STEWART, J., **Cálculo** (vol. 1 e 2). São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.
- THOMAS, G. B., **Cálculo** (vol. 1 e 2). São Paulo: Addison Wesley, 2002.