1
LIVRO

12
AULA

Funções Diferenciáveis

META

Estudar derivadas de funções de duas variáveis a valores reais.

OBJETIVOS

Estender os conceitos de diferenciabilidade de funções de uma variável a valores reais.

PRÉ-REQUISITOS

Limite, continuidade e derivadas parciais de funções de duas variáveis a valores reais.

12.1 Introdução

Nesta aula, vamos apresentar os conceitos de funções diferenciáveis, estendendo os conceitos de derivadas de funções de uma variável real a valores reais, vistos no curso de cálculo 1.

12.2 Diferenciabilidade

Sabemos que, quando uma função de uma variável real é derivável em um ponto, ela é contínua neste ponto. Observe agora o que acontece com o exemplo a seguir.

Exemplo 12.2.1. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Temos que f é derivável em relação a x e a y em $(0,0)$. De fato: fixando-se $y = 0$, então $z = f(x,0) \equiv 0$, e assim $f_x(0,0) = 0$. Agora, fixando $x = 0$, então $z = f(0,y) \equiv 0$, e assim $f_y(0,0) = 0$.

Mas, por outro lado, f não é contínua em $(0,0)$. Com efeito, o $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)$ não existe, pois considerando as curvas $\gamma_1(t) = (t,0)$ e $\gamma_2(t) = (t,t)$ temos que

$$\lim_{t\longrightarrow 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\longrightarrow 0} 0 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t\longrightarrow 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}.$$

Assim é possível que uma função tenha todas as derivadas parciais em um ponto e que não seja contínua naquele ponto.

Vamos então introduzir o conceito de diferenciabilidade, que entre outras propriedades, vai garantir a continuidade da função. Na realidade ele implicará que o gráfico da função não tem quinas, e em particular, que não tem saltos. será introduzido por analogia com o conceito de diferenciabilidade de funções de uma variável.

Para uma variável:

$y = f(x)$ é diferenciável (Ver Figura 12.69) em x_0, se existe uma reta passando por $(x_0, f(x_0))$ de equação

$$Y = f(x_0) + m(x - x_0),$$

tal que

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - Y}{x - x_0} = 0$$

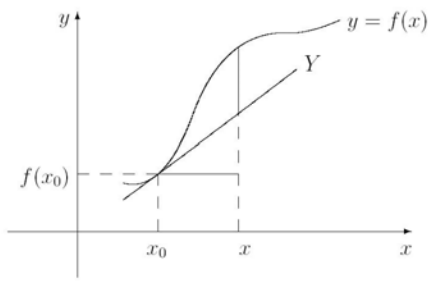

Figura 12.69: Reta tangente ao gráfico de uma função diferenciável.

$y = f(x)$ é derivável em x_0, se existe o seguinte limite

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Observe que, para funções de uma variável real, ser derivável é equivalente a ser diferenciável. De fato: suponhamos que f é derivável em x_0. Então existe

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m.$$

Considerando a reta de equação $Y = f(x_0) + m(x - x_0)$, temos que

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - Y}{x - x_0} = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \longrightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m \right) = 0$$

Portanto f é diferenciável em x_0.

Por outro lado, suponhamos que f é diferenciável em x_0.

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - Y}{x - x_0} = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \longrightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m \right) \Longrightarrow \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m. \end{aligned}$$

Portanto, f é derivável em x_0.

Passaremos agora a definir a diferenciabilidade de funções de duas variáveis reais a valores reais e faremos isso estendendo o conceito de diferenciabilidade de funções de uma variável real a valores reais.

Para duas variáveis:

Diz-se que $z = f(x, y)$ é **diferenciável** num ponto (x_0, y_0), se existir uma plano passando pelo ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, de equação

$$z = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0),$$

tal que

$$\lim_{\alpha \longrightarrow 0} \frac{f(x, y) - z}{\alpha} = 0 \tag{12.1}$$

onde $\alpha = \|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Em notação alternativa, tomando $x = x_0 + h$ e $y = y_0 + k$ e chamando

$$E(h, k) = f(x, y) - z = f(x_0 + h, y_0 + k) - [f(x_0, y_0) + Ah + Bk]$$

(12.1) pode ser reescrita como

$$\lim_{(h,k) \longrightarrow (0,0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0 \tag{12.2}$$

Ainda, com a notação alternativa, temos:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + Ah + Bk + E(h, k).$$

Passando o limite, com $(h,k) \longrightarrow (0,0)$, obtemos:

$$\lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0).$$

Acabamos de provar o seguinte:

Teorema 12.25. Se f for diferenciável em (x_0,y_0), então f será contínua em (x_0,y_0).

Voltemos em (12.2), fazendo $k=0$, obtemos:

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0) - Ah}{|h|} = 0$$

Isto equivale a:

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \left[\frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h} - A\right] = 0$$

ou

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \left[\frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h}\right] = A$$

Assim, $f_x(x_0,y_0) = A$.

Analogamente, $f_y(x_0,y_0) = B$.

Com isto, temos o seguinte:

Teorema 12.26. Se f for diferenciável em (x_0,y_0), então f admitirá derivadas parciais neste ponto.

As principais conclusões sobre funções diferenciáveis são dadas na Observação 12.13.

Observação 12.13. 1. Para mostrarmos que função f é diferenciável em (x_0,y_0) é suficiente provar que f admite derivadas parciais em (x_0,y_0) e que

$$\lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k}{\|(h,k)\|} = 0.$$

2. Se uma das derivadas parciais não existirem em (x_0, y_0), então f não será diferenciável neste ponto.
3. Se ambas as derivadas parciais existirem em (x_0, y_0), mais se o limite acima não for zero, então f não será diferenciável em (x_0, y_0).
4. Se f não for contínua em (x_0, y_0), então f não será diferenciável em (x_0, y_0).

Dizemos que f é diferenciável em $B \subset D(f)$ se f for diferenciável em todo $(x, y) \in B$. Diremos, simplesmente, que f é uma função diferenciável se f for diferenciável em todo ponto de seu domínio.

Exemplo 12.2.2. Prove que $f(x, y) = x + y$ é uma função diferenciável.

Solução: Precisamos provar que f é diferenciável em todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. f admite derivadas parciais em todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e

$$f_x(x, y) = 1 \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = 1.$$

Por outro lado, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} E(h, k) &= f(x + h, y + k) - f(x, y) - f_x(x, y)h - f_y(x, y)k \\ &= x + h + y + k - x - y - h - k = 0 \end{aligned}$$

Daí
$$\lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0.$$
Portanto, f é diferenciável para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo 12.2.3. Prove que $z = f(x, y) = xy$ é uma diferenciável.

Solução: Precisamos provar que f é diferenciável em todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. f admite derivadas parciais em todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e

$$f_x(x, y) = y \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = x.$$

Por outro lado, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} E(h,k) &= f(x+h, y+k) - f(x,y) - f_x(x,y)h - f_y(x,y)k \\ &= (x+h)(y+k) - xy - yh - xk \\ &= xy + xk + yh + hk - xy - yh - xk = hk \end{aligned}$$

Daí

$$\lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \text{ (Já visto anteriormente).}$$

Portanto, f é diferenciável para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Propriedades:

1. A soma (também o produto) de duas funções diferenciáveis em um ponto é uma função diferenciável no ponto.
2. Toda função polinomial em duas variáveis $P(x, y) = \sum_{ij} a_{ij}x^iy^j$ é diferenciável, como soma e produto de diferenciáveis.

Já vimos que toda função diferenciável é contínua, mas nem toda função contínua é diferenciável. Por exemplo:

Exemplo 12.2.4. A função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é contínua em $(0, 0)$ (Já visto anteriormente), mais não é diferenciável em $(0, 0)$. De fato, temos que

$$f_x(0,0) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$
$$f_y(0,0) = \lim_{y\longrightarrow 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0$$

e

$$\begin{aligned} E(h,k) &= f(0+h, 0+k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k \\ &= \frac{h^3}{h^2+k^2} - h \end{aligned}$$

Segue que

$$\frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} \;=\; \frac{\frac{h^3}{h^2+k^2}-h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{-hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = G(h,k)$$

Como $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} G(t,t) = \lim\limits_{t\longrightarrow 0} \dfrac{-t}{2\sqrt{2}|t|}$ não existe, resulta que

$$\lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|}$$

não existe. Logo, f não é diferenciável em $(0,0)$.

Vimos que se $z = f(x,y)$ é diferenciável em (x_0,y_0), então existem $f_x(x_0,y_0)$ e $f_y(x_0,y_0)$. No entanto pode ocorrer que existam $f_x(x_0,y_0)$ e $f_y(x_0,y_0)$ e f não ser diferenciável em (x_0,y_0).

Exemplo 12.2.5. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{se} & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Já foi visto que $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. Ainda: f não é contínua e, portanto, não é diferenciável em $(0,0)$.

Algumas vezes é difícil verificar diretamente a diferenciabilidade de uma função. O próximo teorema dá uma condição suficiente para que uma função f seja diferenciável e é importante dada a facilidade de verificação de suas hipóteses.

Teorema 12.27. (Critério de Diferenciabilidade) Se as derivadas parciais f_x e f_y existem em um conjunto aberto A contendo (x_0,y_0) e forem contínuas em (x_0,y_0), então f será diferenciável em (x_0,y_0).

Demonstração: Consideremos $(x_0,y_0) \in A$. Como A é aberto, para h e k suficientemente pequenos o retângulo formado pelos 4 pontos: (x_0,y_0), (x_0+h,y_0), (x_0,y_0+k) e (x_0+h,y_0+k) está contido em A. Temos então que

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) \\ &= [f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0+h,y_0)] + [f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)] \end{aligned}$$

Usando o Teorema do Valor Médio para funções de uma variável sobre cada uma das diferenças acima, obtemos

$$\Delta f = f_y(x_0 + h, y_1)k + f_x(x_1, y_0)h.$$

Por hipótese, f_x e f_y são contínuas em (x_0, y_0) e assim

$$f_x(x_1, y_0) = f_x(x_0, y_0) + eta_1 \quad \text{e} \quad f_x(x_0 + h, y_1) = f_y(x_0, y_0) + eta_2$$

onde ambos η_1 e η_2 tendem a zero com $\|(h, k)\| \longrightarrow 0$. Assim:

$$\Delta f = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + \eta_1 h + \eta_2 k.$$

Pela definição de diferenciabilidade nós temos somente que mostrar:

$$\frac{n_1 h + n_2 k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \longrightarrow 0$$

mas

$$\left|\frac{n_1 h + n_2 k}{\sqrt{h^2 + k^2}}\right| \leq (|n_1| + |n_2|) \longrightarrow 0$$

conforme $\sqrt{h^2 + k^2} \longrightarrow 0$. ■

Exemplo 12.2.6. A função $z = f(x, y) = sen\ (xy)$ é diferenciável, pois existem

$$f_x(x, y) = ycos\ (xy) \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = xcos\ (xy)$$

e são contínuas em todo ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Bem, caros alunos, o teorema anterior parece resolver todos os problemas no que se refere a mostrar que uma função é diferenciável, há casos em que ele não se aplica, ou seja: existem funções diferenciáveis em um ponto cujas derivadas parciais não são contínuas neste ponto. Neste caso a verificação da diferenciabilidade deve ser feita pela definição. Veja o exemplo a seguir:

Exemplo 12.2.7. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)sen\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Determine f_x e f_y;

(b) Mostre que f_x e f_y não são contínuas em $(0,0)$;

(c) Prove que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Solução:

$$(a)\ f_x(x,y) = \begin{cases} 2x\ sen\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x}{x^2+y^2}\ cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \quad \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_x(x,y) = \begin{cases} 2y\ sen\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2y}{x^2+y^2}\ cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \quad \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(b) $\lim_{t \longrightarrow 0} f_x(t,t)$ e $\lim_{t \longrightarrow 0} f_y(t,t)$ não existem e portanto f_x e f_y não são contínuas em $(0,0)$

(c) Para verificar que f é diferenciável em $(0,0)$ note que

$$\frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = \sqrt{h^2+k^2}\ sen\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right)$$

e que

$$\lim_{(h,k) \longrightarrow (0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

12.3 Plano Tangente e Reta Normal

Se f é diferenciável em (x_0, y_0), vimos na Seção 12.2 que o plano de equação

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0) \qquad (12.1)$$

aproxima o gráfico de $z = f(x, y)$ no seguinte sentido:

$$\lim_{\alpha \longrightarrow 0} \frac{f(x, y) - z}{\alpha} = 0$$

ou, na notação alternativa

$$\lim_{(h,k) \longrightarrow (0,0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0.$$

Este é um modo de exprimir o fato de que o plano é **tangente** à superfície no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Observe que só definimos o plano tangente em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ se f for diferenciável em (x_0, y_0). Se f não for diferenciável em (x_0, y_0), mais admitir derivadas parciais neste ponto, então o plano 12.1 existirá, mais não será plano tangente.

Em notação de produto escalar, o plano (12.1) se escreve:

$$(f_x(x_0, y_0),\ f_y(x_0, y_0),\ -1) \cdot [(x, y, z) - (x_0, y_0, f(x_0, y_0))] = 0$$

Segue que o plano tangente em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é perpendicular à direção do vetor

$$(f_x(x_0, y_0),\ f_y(x_0, y_0),\ -1) \qquad (12.2)$$

A reta que passa pelo ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e é paralela ao vetor (12.1) denomina-se **reta normal** ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. A equação de tal reta é:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + \lambda\,(f_x(x_0, y_0),\ f_y(x_0, y_0),\ -1)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 12.3.1. Seja $z = f(x, y) = 3x^2y - x$. Determine as equações do plano tangente e da reta normal do ponto $(1, 2, f(1, 2))$.

Solução: Note que f é uma função polinomial de duas variáveis,

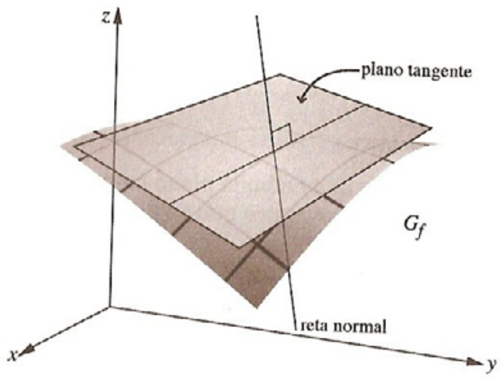

Figura 12.70: Plano Tangente e Reta Normal

logo é diferenciável. A equação do plano tangente à superfície $z = f(x,y)$ no ponto $(1,2,f(1,2))$ é dado por

$$z = f(1,2) + f_x(1,2)(x-1) + f_y(1,2)(y-2).$$

Mas $f(1,2) = 5$,

$$f_x(x,y) = 6xy-1 \Longrightarrow f_x(1,2) = 11 \text{ e } f_y(x,y) = 3x^2 \Longrightarrow f_y(1,2) = 3.$$

Logo a equação do plano tangente é

$$z - 5 = 11(x-1) + 3(y-2).$$

Por sua vez, a equação da reta normal à superfície $z = f(x,y)$ no ponto $(1,2,f(1,2))$ é dado por

$$(x,y,z) = (1,2,f(1,2)) + \lambda \left(f_x(1,2),\ f_y(1,2),\ -1\right),\ \lambda \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$(x,y,z) = (1,2,5) + \lambda \left(11,\ 3,\ -1\right),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

12.4 A Diferencial

Seja $f(x,y)$ diferenciável em (x_0,y_0) e consideremos a transformação linear $L:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$L(h,k) = f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k.$$

Voltando à condição de diferenciabilidade notamos que

$$\begin{aligned} E(h,k) &= f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) - [f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k] \\ &= \Delta f - L(h,k), \end{aligned}$$

onde $\Delta f = f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0)$. Assim:

$$\lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \frac{\Delta f - L(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0,$$

ou seja, $L(h,k) \sim \Delta f$, para $\|(h,k)\| \sim 0$.

Chamamos a transformação linear L de diferencial de f em (x_0,y_0). Dizemos que $L(h,k) = f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k$ é a diferencial de f em (x_0,y_0) relativa aos acréscimos h e k.

Em notação clássica a diferencial de f em (x,y) relativa aos acréscimos dx e dy é indicada por dz (ou df)

$$dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy.$$

Assim, para acréscimos pequenos,

$$\Delta z \sim dz.$$

Chamando $\eta = \frac{\Delta f - df}{\|(h,k)\|}$, a condição de diferenciabilidade pode ser reformulada com:

f é **diferenciável** em (x_0,y_0) se, e somente se, $\Delta f = df + \eta \cdot \sqrt{h^2+k^2}$, onde $\eta \longrightarrow 0$ com $\|(h,k)\| \longrightarrow 0$.

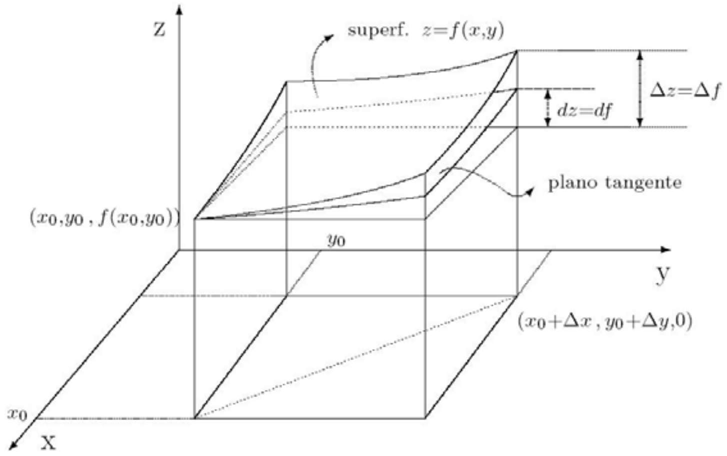

Figura 12.71: Representação da diferencial f em (x, y) relativa aos acréscimos dx e dy.

Exemplo 12.4.1. Se $z = f(x, y) = 3x^2 - xy$, calcule Δz e dz se (x, y) muda de $(1, 2)$ para $(1.01, 1.98)$.

Solução: Temos:

$$dz = (6x - y)dx + (-x)dy.$$

Substituindo $x = 1$, $y = 2$, $dx = \Delta x = 0.01$ e $dy = \Delta y = -0.02$, obtemos:

$$dz = (6 - 2)(0.01) + (-1)(-0.02) = 0.06.$$

Calculando diretamente Δz, teríamos:

$$\Delta z = 0.0605.$$

Assim, o erro envolvido é 0.0005.

Exemplo 12.4.2. O raio e a altura de uma caixa de forma cilíndrica são medidos como $3m$ e $8m$, respectivamente, com um possível erro de $\pm 0.05m$. Use diferenciais para calcular o erro máximo no cálculo do volume.

Solução: Temos que o volume da caixa é dado por $V = \pi r^2 h$. Calculando a diferencial de V temos:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial h} dh = 2\pi r h dr + \pi r^2 dh.$$

Substituindo $r = 3$, $h = 8$, $dr = dh = \pm 0.05$, temos:

$$dV = 48\pi(\pm 0.05) + 9\pi(\pm 0.05) = \pm 2.85\pi \simeq \pm 8.95 m^3.$$

12.5 Resumo

As principais conclusões sobre funções diferenciáveis serão dadas abaixo:

1. Para mostrarmos que função f é diferenciável em (x_0, y_0) é suficiente provar que f admite derivadas parciais em (x_0, y_0) e que

$$\lim_{(h,k) \longrightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\|(h, k)\|} = 0.$$

2. Se f é diferenciável em (x_0, y_0) então f é contínua em (x_0, y_0).

3. Se f é diferenciável em (x_0, y_0) então f admite todas as derivadas parciais em (x_0, y_0).

4. Se uma das derivadas parciais não existirem em (x_0, y_0), então f não será diferenciável neste ponto.

5. Se ambas as derivadas parciais existirem em (x_0, y_0), mais se o limite acima não for zero, então f não será diferenciável em (x_0, y_0).

6. Se f não for contínua em (x_0, y_0), então f não será diferenciável em (x_0, y_0).

Se f é diferenciável em (x_0, y_0), então o plano de equação

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

aproxima o gráfico de $z = f(x, y)$ no seguinte sentido:

$$\lim_{\alpha \longrightarrow 0} \frac{f(x, y) - z}{\alpha} = 0$$

ou, na notação alternativa

$$\lim_{(h,k) \longrightarrow (0,0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0.$$

Este é um modo de exprimir o fato de que o plano é **tangente** à superfície no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Segue que o plano tangente em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é perpendicular à direção do vetor

$$(f_x(x_0, y_0),\ f_y(x_0, y_0),\ -1) \tag{12.1}$$

A reta que passa pelo ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e é paralela ao vetor (12.1) denomina-se **reta normal** ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. A equação de tal reta é:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + \lambda \left(f_x(x_0, y_0),\ f_y(x_0, y_0),\ -1\right),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

12.6 Atividades

01. Mostre que a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen(\frac{1}{x}), & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

é diferenciável para todo x, mais não é de classe C^1 em $x = 0$.

02. Justifique porque a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

não é diferenciável na origem.

03. Calcular as derivadas das funções dadas abaixo:

$a)$ $z = e^x y^2$; $\qquad$ $b)$ $z = x^2\sqrt{1+xy^2}$.

04. Seja $f(x)$ diferenciável com $f(0) = 0$ e $f(x) \neq 0$ para $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Seja

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)f(y)}{f^2(x)+f^2(y)}, & \text{para} \quad (x, y \neq (0,0) \\ 0, & \text{para} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$a)$ Mostre que existe $g_x(0,0)$ e $g_y(0,0)$;

$b)$ Mostre que $g(x,y)$ não é diferenciável em $(0,0)$.

05. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f(x,y)| \leq x^2 + y^2$. Mostre que f é diferenciável em $(0,0)$.

06. Mostre que para uma função $f(x,y)$ ter como curvas de níveis circunferências com centro na origem é necessário e suficiente que $x\frac{\partial f}{\partial y} = y\frac{\partial f}{\partial x}$.

07. Achar as equações da reta tangente e da reta normal à curva

$$\gamma = \begin{cases} x = t - cos\ t \\ y = 3 + sen\ 2t \\ z = 1 + cos\ 3t \end{cases}$$

no ponto $t = \frac{\pi}{2}$.

08. Determinar a equação do plano tangente à superfície $z = x^2 + y^2$ no ponto $(1, 2, 5)$.

09. Determinar a equação do plano tangente à superfície $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ no ponto $(1, 2, 2)$.

10. Ache o vetor normal a o plano tangente ao gráfico de $f(x, y) = xy + ye^x$ no ponto $(1, 1)$.

11. Ache os pontos do parabolóide $z = x^2 + y^2 - 1$ nos quais a reta normal à superfície coincide com a reta q liga a origem a esses pontos.

12. Ache a equação do plano tangente à superfície regular $S : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 36$ no ponto $(1, 2, 3)$.

13. Ache a equação do plano tangente à superfície regular $z = x^2 + 5xy - 2y^2$ no ponto $(1, 2, 3)$.

14. Ache o plano tangente e a reta normal ao parabolóide de uma folha $x^2 + y^2 - z^2 = 4$ no ponto $(2, -3, 3)$.

15. Dada a curva $(x, y, z) = (e^t, e^{-1}, \sqrt{2}t)$. Qual a equação do plano normal à curva no ponto P, correspondente a $t = 0$?

12.7 Comentário das Atividades

Essas atividades, são referentes aos assuntos discutidos no decorrer desta aula e têm o objetivo de você (aluno) exercitar os conceitos aprendidos.

Lembre-se, sempre, que existem tutores para ajuda-los na resolução dessas atividades.

12.8 Referências

- GUIDORIZZI, H. L., **Um Curso de Cálculo** (Vol. 1 e 2). Rio de Janeiro: LTC Editora, 2006.
- STEWART, J., **Cálculo** (vol. 1 e 2). São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.
- THOMAS, G. B., **Cálculo** (vol. 1 e 2). São Paulo: Addison Wesley, 2002.