1
LIVRO

13
AULA

Regra da Cadeia e Derivação Implícita

META

Derivar funções compostas e funções definidas implicitamente.

OBJETIVOS

Estender os conceitos da regra da cadeia e da derivação implícita de funções de uma variável a valores reais.

PRÉ-REQUISITOS

Ter compreendido os conceitos limite, continuidade e derivadas de funções de uma variável a valores reais.

13.1 Introdução

13.2 Regra da Cadeia

Muitas vezes a função $z = f(x, y)$ é dada sob a forma de função composta, em que os argumentos $x,\ y$ são eles próprios funções de t

$$x = \phi_1(t) \quad y = \phi_2(t).$$

Então, $z = f(\phi_1(t),\ \phi_2(t))$ e podemos, portanto, falar em diferenciabilidade relativamente a t.

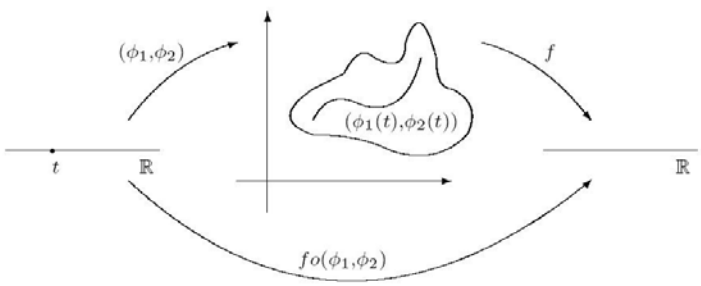

Figura 13.72: Função composta.

Para derivarmos z em função de t temos o seguinte:

Teorema 13.28. Sejam $x = \phi_1(t)$ e $y = \phi_2(t)$ diferenciáveis em t_0 e $z = f(x, y)$ diferenciável no ponto $P_0 = (\phi_1(t_0),\ \phi_2(t_0))$. Então $z(t) = f(\phi_1(t),\ \phi_2(t))$ é diferenciável em t_0 e ainda

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t_0} = \left(\frac{dz}{dx}\right)_{P_0} \cdot \left(\frac{d\phi_1}{dt}\right)_{t_0} + \left(\frac{dz}{dy}\right)_{P_0} \cdot \left(\frac{d\phi_2}{dt}\right)_{t_0}.$$

Demonstração: Como z é diferenciável em P_0, temos em particular que:

$$\Delta z = \left(\frac{\partial z}{dx}\right)_{P_0} \cdot \Delta x + \left(\frac{\partial z}{dy}\right)_{P_0} \cdot \Delta y + \alpha\eta$$

onde $\eta \longrightarrow 0$ com $\alpha \longrightarrow 0$ e $\alpha = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ sendo que

$$\Delta x = \phi_1(t_0 + \Delta t) - \phi_1(t_0) \quad \text{e} \quad \Delta y = \phi_2(t_0 + \Delta t) - \phi_2(t_0).$$

Logo, para $\Delta t \neq 0$

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \left(\frac{\partial z}{dx}\right)_{P_0} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \left(\frac{\partial z}{dy}\right)_{P_0} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} \pm \eta\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \quad (13.1)$$

Observemos que

$$\lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \left(\frac{d\phi_1}{\Delta t}\right)_{t_0} \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \left(\frac{d\phi_2}{\Delta t}\right)_{t_0}$$

ainda:

$$\Delta t \longrightarrow 0 \Longrightarrow [\Delta x \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad \Delta y \longrightarrow 0],$$

pois ϕ_1 e ϕ_2 sendo diferenciáveis em t_0 são contínuas em t_0. Passando ao limite a expressão (13.1) com $\Delta t \longrightarrow 0$, temos

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t_0} = \left(\frac{dz}{dx}\right)_{P_0} \cdot \left(\frac{d\phi_1}{dt}\right)_{t_0} + \left(\frac{dz}{dy}\right)_{P_0} \cdot \left(\frac{d\phi_2}{dt}\right)_{t_0}.$$

pois $\eta \longrightarrow 0$ com $\Delta t \longrightarrow 0$ e $\left[\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2\right] \longrightarrow L \in \mathbb{R}$ com $\Delta t \longrightarrow 0$. ■

Exemplo 13.2.1. Seja $z = f(x, y) = e^{xy}$ onde $x = sen\ t$ e $y = cos\ t$. Calcule $\frac{dz}{dt}$ em $t = t_0$.

Solução: Temos que $P_0 = (\phi_1(t_0),\ \phi_2(t_0)) = (sen\ t_0,\ cos\ t_0)$. Logo

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t_0} = \left(\frac{dz}{dx}\right)_{P_0} \cdot \left(\frac{d\phi_1}{dt}\right)_{t_0} + \left(\frac{dz}{dy}\right)_{P_0} \cdot \left(\frac{d\phi_2}{dt}\right)_{t_0},$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t_0} &= (y_0 e^{x_0 y_0}) \cdot (cos\ t_0) + (x_0 e^{x_0 y_0}) \cdot (-sen\ t_0) \\ &= e^{sen\ t_0\ cos\ t_0}(cos^2 t_0 - sen^2 t_0).\end{aligned}$$

É freqüente encontrar-se $z = f(x,y)$ com $y = y(x)$. Neste caso, $z = f(x, y(x)) = z(x)$. Ainda

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Portanto,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Exemplo 13.2.2. Seja $z = f(x,y) = x^2 + y^2$. Considere a curva $y = \phi(x) = x^3$ e calcule:
(a) $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1)$
(b) $\dfrac{dz}{dx}(1)$
Solução:
(a) Temos que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 2x + 6yx^2.$$

Logo $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1) = 2 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \cdot 1^2 = 8.$

$$(b)\ \frac{dz}{dx}(1) = \frac{\partial z}{\partial x}(1,1) + \frac{\partial z}{\partial y}(1,1) \cdot \frac{dy}{dx}(1) = 8 + 1 \cdot 3 = 11.$$

13.3 Derivação de funções definidas implicitamente

A Regra da Cadeia pode ser usada para uma descrição do processo de diferenciação implícita. Suponhamos que a equação da forma $F(x,y) = 0$ define y implicitamente como uma função diferenciável de x, ou seja, $y = f(x)$, onde $F(x, f(x)) = 0$, para todo x no domínio de f. Se F é diferenciável, podemos usar a Regra da

Cadeira para diferenciar ambos os lados da equação $F(x,y) = 0$ com relação a x. Como x e y são ambas funções de x, obtemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

No entanto, $\frac{dx}{dx} = 1$; então, se $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, resolvemos para $\frac{dy}{dx}$ e obtemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \tag{13.1}$$

Para derivar essa equação assumimos que $F(x,y) = 0$ define y implicitamente em função de x. O próximo teorema nos fornece condições segundo as quais essa hipótese é válida.

Teorema 13.29. (Teorema da Função Implícita) Seja $F : A \subset \mathbb{R}^2$ onde A é um aberto e F é de classe C^k, $(k \geq 1)$ em A. Se F se anula em $P_0 = (x_0, y_0) \in A$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(P_0) \neq 0$, então existe um intervalo aberto I contendo x_0 e um aberto $B \subset A$, $P_0 \in B$ com a seguinte propriedade:
Para cada $x \in I$ existe um único $\xi(x) \in \mathbb{R}$ tal que $(x, \xi(x)) \in B$ e $F(x, \xi(x)) = 0$, ou seja, $F(x,y) = 0$ define $y = \xi(x)$, implicitamente.

Exemplo 13.3.1. Mostre que existe um intervalo I contendo $x_0 = 2$, no qual está definida da função $y = \xi(x)$ satisfazendo $x^2 + xy + y^2 = 7$ com $\xi(2) = 1$ e encontre $\frac{dy}{dx}$.
Solução: Definimos

$$F(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 7.$$

Observemos que F é de classe C^∞ em $\mathbb{R}^2$,

$$F(2,1) = 0 \text{ e } \frac{\partial F}{\partial y}(2,1) = 4 \neq 0.$$

Pelo Teorema anterior, existe um intervalo I contendo $x_0 = 2$ e uma função $y = \xi(x)$, tais que:

$$x^2 + x\xi(x) + (\xi(x))^2 = 7, \ \forall x \in I.$$

Ainda: $\xi(2) = 1$, ξ é de classe C^∞. Temos então que $F(x,y) = 0$ define $y = \xi(x)$ implicitamente, logo, usando a fórmula 13.1, obtemos

$$\xi'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{2x+y}{x+2y}.$$

Em particular, $\xi'(2) = -\frac{5}{4}$.

Suponhamos agora que z seja dado implicitamente como uma função $z = f(x,y)$ por uma equação da forma $F(x,y,z) = 0$. Isto é o mesmo que $F(x,y,f(x,y)) = 0$ para todo (x,y) no domínio de f. Se F e f forem diferenciáveis, utilizamos a Regra da Cadeia para diferenciar a equação $F(x,y,z) = 0$ como se segue:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Mas $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$ e $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ portanto, essa equação se escreve

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Se $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, resolvendo para $\frac{\partial z}{\partial x}$ e obtemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \tag{13.2}$$

Analogamente, obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \tag{13.3}$$

Novamente, uma versão do Teorema da Função Implícita nos dá as condições sob as quais nossa hipótese é válida. Se $F \in$

C^k, $(k \geq 1)$ é definida em um aberto contendo $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, onde $F(P_0) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial z}(P_0) \neq 0$, então a equação $F(x, y, z) = 0$ define z como uma função de x e y perto do ponto P_0, e as derivadas parciais dessa função são dadas pelas fórmulas (13.2) e (13.3).

Exemplo 13.3.2. Determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ se $e^{xyz} = x^2 + y^2 + z^2$.

Solução: Seja $F(x, y, z) = e^{xyz} - x^2 - y^2 - z^2$. Então, das equações (13.2) e (13.3), temos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{yze^{xyz} - 2x}{xye^{xyz} - 2z}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{xze^{xyz} - 2y}{xye^{xyz} - 2z}$$

Outra maneira:

Temos

$$\frac{\partial}{\partial x}(e^{xyz}) = e^{xyz}\frac{\partial}{\partial x}(xyz) = e^{xyz}\left(yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2) = 2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Assim

$$e^{xyz}\left(yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x},$$

ou seja,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x - yze^{xyz}}{xye^{xyz} - 2z}$$

em todo $(x, y) \in D(f)$ com $xye^{xyz} - 2z \neq 0$.

13.4 Resumo

A Regra da Cadeia é dada pelo seguinte:

Teorema 13.30. Sejam $x = \phi_1(t)$ e $y = \phi_2(t)$ diferenciáveis em t_0 e $z = f(x, y)$ diferenciável no ponto $P_0 = (\phi_1(t_0),\ \phi_2(t_0))$. Então $z(t) = f(\phi_1(t),\ \phi_2(t))$ é diferenciável em t_0 e ainda

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t_0} = \left(\frac{dz}{dx}\right)_{P_0} \cdot \left(\frac{d\phi_1}{dt}\right)_{t_0} + \left(\frac{dz}{dy}\right)_{P_0} \cdot \left(\frac{d\phi_2}{dt}\right)_{t_0}.$$

A Regra da Cadeia pode ser usada para uma descrição do processo de diferenciação implícita. Suponhamos que a equação da forma $F(x, y) = 0$ define y implicitamente como uma função diferenciável de x, ou seja, $y = f(x)$, onde $F(x, f(x)) = 0$, para todo x no domínio de f. Se F é diferenciável, podemos usar a Regra da Cadeira para diferenciar ambos os lados da equação $F(x, y) = 0$ com relação a x. Como x e y são ambas funções de x, obtemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

No entanto, $\frac{dx}{dx} = 1$; então, se $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, resolvemos para $\frac{dy}{dx}$ e obtemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Para derivar essa equação assumimos que $F(x, y) = 0$ define y implicitamente em função de x. O próximo teorema nos fornece condições segundo as quais essa hipótese é válida.

Teorema 13.31. (Teorema da Função Implícita) Seja $F : A \subset \mathbb{R}^2$ onde A é um aberto e F é de classe C^k, $(k \geq 1)$ em A. Se F se anula em $P_0 = (x_0, y_0) \in A$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(P_0) \neq 0$, então existe um intervalo aberto I contendo x_0 e um aberto $B \subset A$, $P_0 \in B$ com a seguinte propriedade:
Para cada $x \in I$ existe um único $\xi(x) \in \mathbb{R}$ tal que $(x, \xi(x)) \in B$ e $F(x, \xi(x)) = 0$, ou seja, $F(x, y) = 0$ define $y = \xi(x)$, implicitamente.

13.5 Atividades

01. Calcule $\dfrac{dz}{dt}$:

(a) $z = sen\ xy,\ x = 3t,$ e $y = t^2$.

(a) $z = \ln(1 + x^2 + y^2),\ x = sen\ 3t,$ e $y = cos\ 3t$.

02. Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$. Considere a curva $y = \phi(x) = x^3$ e calcule:

$a)$ $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1)$; $\qquad$ $b)$ $\frac{dz}{dx}(1)$.

03. Seja $g(t) = f(3t,\ 2t^2 - 1)$.

(a) Expresse $g'(t)$ em termos das derivadas parciais de f.

(b) Calcule $g'(0)$ admitindo $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,\ -1) = \dfrac{1}{3}$.

04. Suponha que, para todo t, $f(t^2,\ 2t) = t^3 - 3t$. Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$.

05. Considerando a função $F(x, y) = f\left(\dfrac{x}{y},\ \dfrac{y}{x}\right)$. Mostre que $x\dfrac{\partial F}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

06. A equação $y^3 + xy + x^3 = 4$ define implicitamente alguma função diferenciável $y = y(x)$? Em caso afirmativo, expresse $\dfrac{dy}{dx}$ em termos de x e y. (Sugestão: Observe que $(0,\ \sqrt[3]{4})$ satisfaz a equação e utilize o teorema das funções implícitas para o caso $F(x, y) = 0$)

07. Mostre que cada uma das equações seguintes define implicitamente pelo menos uma função diferenciável $y = y(x)$. Expresse $\dfrac{dy}{dx}$ em termos de x e y.

(a) $x^2y + sen\ y = x$

(b) $y^4 + x^2y^2 + x^4 = 3$.

08. Suponha que $y = y(x)$ seja diferenciável e dada implicitamente pela equação $x = F(x^2 + y,\ y^2)$, onde $F(u, v)$ é suposta diferenciável. Expresse $\dfrac{dy}{dx}$ em termos de x, y e das derivadas parciais de F.

13.6 Comentário das Atividades

Essas atividades, são referentes aos assuntos discutidos no decorrer desta aula e têm o objetivo de você (aluno) exercitar os conceitos aprendidos.

Lembre-se, sempre, que existem tutores para ajuda-los na resolução dessas atividades.

13.7 Referências

- GUIDORIZZI, H. L., **Um Curso de Cálculo** (Vol. 1 e 2). Rio de Janeiro: LTC Editora, 2006.

- STEWART, J., **Cálculo** (vol. 1 e 2). São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

- THOMAS, G. B., **Cálculo** (vol. 1 e 2). São Paulo: Addison Wesley, 2002.