1
LIVRO

14
AULA

Vetor Gradiente e as Derivadas Direcionais

META

Definir o vetor gradiente de uma função de duas variáveis reais e interpretá-lo geometricamente. Além disso, estudaremos a derivada direcional de uma função de duas variáveis a valores reais.

OBJETIVOS

Estender o conceito de derivadas parciais e estudar a taxa de variação de uma função em qualquer direção.

PRÉ-REQUISITOS

Limite, continuidade e derivadas parciais de funções de duas variáveis reais a valores reais.

14.1 Introdução

Vamos iniciar nossa penúltima aula, definindo um vetor que indicará a direção de maior crescimento de uma função, tal vetor será denominado vetor gradiente.

Posteriormente, estudaremos a derivada direcional de uma função de duas variáveis a valores reais. Já vimos na Aula 13 que as derivadas parciais permite determinarmos a taxa de variação de uma função nas direções tangentes às curvas coordenadas. A derivada direcional, nos permitirá determinar a taxa de variação de uma função de duas variáveis reais a valores reais, em qualquer direção.

14.2 Vetor Gradiente

Definição 14.29. Seja $z = f(x, y)$ uma função que admite derivadas parciais em (x_0, y_0). O vetor

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \vec{j}$$

denomina-se gradiente de f em (x_0, y_0).

Geometricamente, interpretaremos $\nabla f(x_0, y_0)$ como um vetor aplicado no ponto (x_0, y_0).

Exemplo 14.2.1. Se $f(x, y) = \frac{1}{6}(x^2 + y^3)$, então

$$f_x(x, y) = \frac{1}{3}x \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = \frac{1}{2}y^2.$$

Logo

$$\nabla f(x, y) = \frac{1}{3}x\vec{i} + \frac{1}{2}y^2\vec{j}.$$

Em particular,

$$\nabla f(0,-2) = \frac{1}{3}0\vec{i} + \frac{1}{2}(-2)^2\vec{j} = 2\vec{j}.$$

Na Figura 14.73, esta representado $\nabla f(0,-2)$ partindo do ponto $(0,-2)$ e mais alguns vetores gradientes aplicados em diferentes pontos.

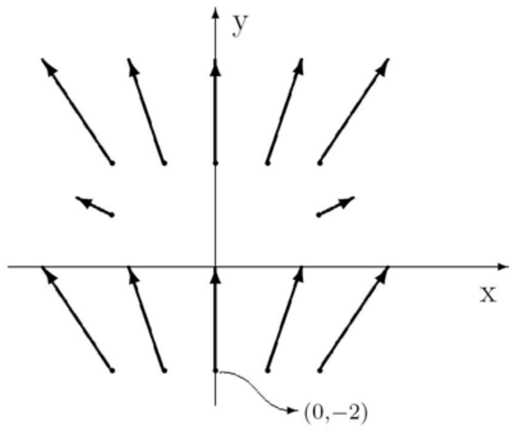

Figura 14.73: Vetores Gradientes de $f(x,y) = \frac{1}{6}(x^2 + y^3)$.

O proximo teorema mostra que, em certas condições, o vetor $\nabla f(x_0, y_0)$ é normal à curva de nível de f que passa por (x_0, y_0).

Teorema 14.32. Seja $z = f(x,y)$ diferenciável em (x_0, y_0) com $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0,0)$. Então $\nabla f(x_0, y_0)$ é normal à curva de nível γ de f que passa por (x_0, y_0).

Demonstração: Seja $\gamma(t) = (x(t),\ y(t))$ a curva de nível de $f(x,y)$ tal que $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$. Assim, temos que

$$z(t) = f(\gamma(t)) = f(x(t), y(t)) \equiv k. \tag{14.1}$$

Como γ e f são diferenciáveis, podemos usar a regra da cadeia para diferenciar ambos os membros de (14.1), obtendo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0} = 0$$

A equação anterior pode ser escrita como

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot \gamma'(t_0) = 0.$$

Portanto, $\nabla f(x_0, y_0)$ é perpendicular ao vetor $\gamma'(t_0)$ tangente à curva de nível γ. ■

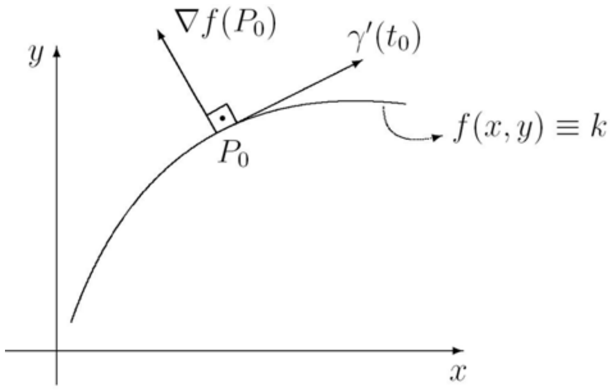

Figura 14.74: $\nabla f(x_0, y_0)$ é perpendicular ao vetor $\gamma'(t_0)$.

Exemplo 14.2.2. Achar o vetor normal à curva $y = x + sen\ x$ no ponto $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Solução: Definimos

$$F(x, y) = x + sen\ x - y.$$

Temos que a curva considerada é uma curva de nível da função diferenciável F. Assim, pelo Teorema 14.32, segue que, para calcular um vetor normal à curva dada, basta calcular $\nabla f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 1)$:

$$\nabla f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 1) = \vec{i} - \vec{j}.$$

14.3 Derivada Direcional

Definição 14.30. Consideremos $z = f(x, y)$ definida em um aberto de $\mathbb{R}^2$ e seja $\vec{v} = (v_1, v_2)$ um vetor unitário ($\|\vec{v}\| = 1$). A derivada direcional de f no ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ na direção de $\vec{v}$ é o valor do limite

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(P_0 + t\vec{v}) - f(P_0)}{t},$$

quando este limite existir.

Notação 9. $D_{\vec{v}}f(P_0)$ ou $\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\right)(P_0)$.

A derivada direcional $D_{\vec{v}}f(P_0)$ denomina-se, também, taxa de variação de f no ponto (x_0, y_0) e na direção do vetor $\vec{v}$, com $\|\vec{v}\| = 1$.

Interpretação Geométrica da Derivada Parcial

Podemos interpretar geometricamente a derivada direcional de f no ponto P_0 na direção de $\vec{v}$ como uma inclinação: Consideremos a curva $\gamma(t)$ dada por

$$\gamma : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = g(t) \end{cases}$$

onde $g(t) = f(x_0 + at, y_0 + bt)$.

Observe que a imagem de γ está contida no gráfico de f. Temos:

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} \\ &= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t} = D_{\vec{v}}f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

onde $\vec{v} = (a, b)$.

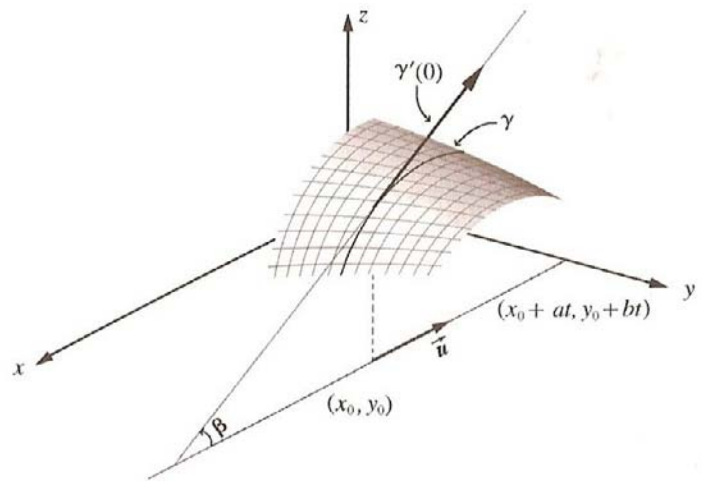

Figura 14.75: Interpretação geométrica da derivada direcional.

Observe que, se $\vec{v} = \vec{i} = (1, 0)$ então

$$\begin{aligned} D_{\vec{i}}f(x_0, y_0) &= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f((x_0, y_0) + t(1, 0)) - f(x_0, y_0)}{t} \\ &= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f((x_0 + t, y_0)) - f(x_0, y_0)}{t} = f_x(x_0, y_0), \end{aligned}$$

ou seja, $D_{\vec{i}}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0),\ \forall (x_0, y_0) \in D(f)$. Analogamente, mostra-se que $D_{\vec{j}}f(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0),\ \forall (x_0, y_0) \in D(f)$.

Exemplo 14.3.1. Dada a função $f(x, y) = x^2 - xy + 5y$, calcular a derivada direcional de f no ponto $P_0 = (-1, 2)$ na direção do vetor $(3, -4)$.

Solução: Note que $\|(3, -4)\| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5$. Seja então $\vec{v} = \left(\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$. Temos que:

$$\begin{aligned} &\|\vec{v}\| = 1 \\ &f(P_0 + t\vec{v}) = f\left(-1 + t\frac{3}{5},\ 2 - t\frac{4}{5}\right) = 13 - \frac{36}{5}t + \frac{21}{25}t^2 \\ &f(P_0) = f(-1, 2) = 13 \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}}f(P_0) &= \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(P_0+t\vec{v})-f(P_0)}{t}\\ &= \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{13-\frac{36}{5}t+\frac{21}{25}t^2-13}{t}\\ &= \lim_{t\longrightarrow 0}\left(-\frac{36}{5}+\frac{21}{25}t\right) = -\frac{36}{5} \end{aligned}$$

Portanto, $D_{\vec{v}}f(P_0) = -\dfrac{36}{5}$.

O próximo teorema, relaciona a derivada direcional de f com o vetor gradiente de f.

Teorema 14.33. Consideremos $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ com A aberto e f diferenciável em $P_0 \in A$. Para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ com $\|\vec{v}\| = 1$, existe a $D_{\vec{v}}f(P_0)$ e ainda:

$$D_{\vec{v}}f(P_0) = \nabla f(P_0)\cdot\vec{v}.$$

Demonstração: Sejam $\vec{v} = (v_1,\ v_2)$ e $P_0 = (x_0, y_0)$ fixos. Consideremos a função $F(t) = f(x_0+tv_1,\ y_0+tv_2)$ onde t é tal que $(x_0+tv_1,\ y_0+tv_2) \in A$. Como F é diferenciável no ponto $t = 0$, usando a Regra da Cadeira, obtemos:

$$F'(0) = f_x(x_0,y_0)v_1 + f_y(x_0,y_0)v_2 = \nabla f(P_0)\cdot\vec{v}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} F'(0) &= \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{F(t)-F(0)}{t}\\ &= \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(x_0+tv_1,\ y_0+tv_2)-f(x_0,\ y_0)}{t} = D_{\vec{v}}f(P_0). \end{aligned}$$

Assim, $D_{\vec{v}}f(P_0) = \nabla f(P_0)\cdot\vec{v}$. ■

Observação 14.14. Temos: Se f for diferenciável em P_0, então a derivada direcional $D_{\vec{v}}f(P_0)$ é a projeção escalar do $\nabla f(P_0)$ na direção de $\vec{v}$, ou seja,

$$D_{\vec{v}}f(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \vec{v} = \|\nabla f(P_0)\| \|\vec{v}\| cos\theta = \|\nabla f(P_0)\| cos\theta,$$

onde θ é o ângulo formado entre os vetores $\nabla f(P_0)$ e $\vec{v}$ em P_0.

Observação 14.15. O Teorema 14.33 afirma que se f é diferenciável em um ponto P_0, então f tem todas as derivadas direcionais em P_0. E a recíproca, é verdadeira? Vejamos um exemplo (a seguir) em que f tem todas as derivadas direcionais em P_0, mais f não é diferenciável em P_0.

Exemplo 14.3.2. Sejam

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ com $\|\vec{v}\| = 1$. Temos:

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}}f(0,0) &= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{tv_1|tv_2|}{t\sqrt{t^2(v_1^2+v_2^2)}} \\ &= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{v_1|v_2|}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} \\ &= \frac{v_1|v_2|}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} = v_1|v_2|. \end{aligned}$$

Em particular:

$$f_x(0,0) = D_{\vec{i}}f(0,0) = 0 \quad \text{e} \quad f_y(0,0) = D_{\vec{j}}f(0,0) = 0.$$

Ainda se

$$\Delta f = f(x,y) - f(0,0) = df(0,0)(x,y) + \eta\sqrt{x^2+y^2} = 0 + \eta\sqrt{x^2+y^2}$$

então

$$\eta = \frac{x|y|}{x^2+y^2} \nrightarrow 0, \quad \text{com} \quad (x,y) \longrightarrow (0,0).$$

Portanto, f não é diferenciável em $(0,0)$. ■

Estamos terminando esta aula mais antes disso, vamos responder uma pergunta interessante sobre derivadas direcionais.

Supondo f diferenciável, quando a derivada direcional de f é máxima, quando é mínima e quando é nula?

Solução: Admitamos $\nabla f(P_0) \neq (0,0)$. Temos que

$$D_{\vec{v}}f(P_0) = \|\nabla f(P_0)\| cos\theta.$$

Logo, é maxima quando $cos\theta = 1$ e isso acontece se, e somente se, $\theta = 0$. Logo $D_{\vec{v}}f(P_0)$ é máxima quando $\vec{v}$ tem o mesmo sentido de $\nabla f(P_0)$. É mínima quando $cos\theta = -1$, isto é, quando $\theta = \pi$. Portanto, $D_{\vec{v}}f(P_0)$ é mínima quando $\vec{v}$ tem sentido oposto ao de $\nabla f(P_0)$. Finalmente, $D_{\vec{v}}f(P_0)$ é nula se $cos\ theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$. Portanto, $D_{\vec{v}}f(P_0)$ é nula se $\vec{v}$ é perpendicular ao vetor $\nabla f(P_0)$. ■

Finalizamos esta aula, com uma aplicação de derivadas direcionais.

Exemplo 14.3.3. A temperatura num ponto (x, y) do plano é dada por

$$T(x, y) = \frac{100xy}{x^2 + y^2}.$$

(a) Calcule a derivada direcional no ponto $(2, 1)$, no sentido que faz um ângulo de 60º com o semi-eixo positivo dos x.

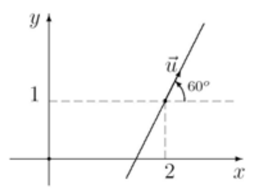

Figura 14.76: Figura referente ao item (a) do Exemplo 14.3.3

(b) Em que direção, a partir de $(2,1)$ é máxima a derivada direcional?

(c) Qual o valor deste máximo?

Solução: (a) Observando a Figura 14.76 é fácil ver que

$$\vec{u} = cos\ 60^o\vec{i} + sen\ 60\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}.$$

Note que $\|\vec{u}\| = 1$. Temos que T é diferenciável em $(2,1)$, uma vez que as suas derivadas parciais são contínuas neste ponto. Além disso, $\nabla T(2,1) = (-12, 24)$. Logo

$$D_{\vec{u}}T(2,1) = \nabla T(2,1) \cdot \vec{u} = -6 + 12\sqrt{3}.$$

(b) É máxima no sentido do gradiente, isto é, do vetor $-12\vec{i} + 24\vec{j}$.

(c) O máximo é o módulo do gradiente $=\ 12\sqrt{5}$.

14.4 Resumo

Faremos, agora, um resumo das principais definições e resultados vistos nesta aula.

Definição 14.31. Seja $z = f(x,y)$ uma função que admite derivadas parciais em (x_0, y_0). O vetor

$$\nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot\vec{j}$$

denomina-se gradiente de f em (x_0, y_0).

Teorema 14.34. Seja $z = f(x,y)$ diferenciável em (x_0, y_0) com $\nabla f(x_0,y_0) \neq (0,0)$. Então $\nabla f(x_0,y_0)$ é normal à curva de nível γ de f que passa por (x_0, y_0).

Definição 14.32. Consideremos $z = f(x, y)$ definida em um aberto de $\mathbb{R}^2$ e seja $\vec{v} = (v_1, v_2)$ um vetor unitário ($\|\vec{v}\| = 1$). A derivada direcional de f no ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ na direção de $\vec{v}$ é o valor do limite

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(P_0 + t\vec{v}) - f(P_0)}{t},$$

quando este limite existir.

A derivada direcional $D_{\vec{v}} f(P_0)$ denomina-se, também, taxa de variação de f no ponto (x_0, y_0) e na direção do vetor $\vec{v}$, com $\|\vec{v}\| = 1$.

Teorema 14.35. Consideremos $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ com A aberto e f diferenciável em $P_0 \in A$. Para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ com $\|\vec{v}\| = 1$, existe a $D_{\vec{v}} f(P_0)$ e ainda:

$$D_{\vec{v}} f(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \vec{v}.$$

14.5 Atividades

01. Considere $f(x, y) = xy + 1$.

a) Desenhe as curvas de nível $0,\ 1$ e 2;

b) Desenhe alguns vetores gradientes de f;

c) O que acontece com $\nabla f(0, 0)$ e com a curva de nível que passa por $(0, 0)$?

02. Em cada um dos casos abaixo, desenhe um número suficiente de vetores para ilustrar para ilustrar o campo gradiente de f:

a) $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$;

b) $f(x, y, z) = x + y + z$;

$c)$ $f(x,y,z) = 20 - z$.

03. $a)$ Encontre a equação do plano tangente à superfície $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ no ponto $(1,1,\sqrt{2})$.

$b)$ Mostre que a superfície e o plano tem uma reta em comum.

$c)$ Qual o ângulo entre essa reta e o vetor $\nabla f(1,1,\sqrt{2})$?

04. Prove que $D_{\vec{i}} f(a,b) = f_x(a,b)$ e $D_{\vec{j}} f(a,b) = f_y(a,b)$. Se $D_{\vec{v}} f(P_0) = k$ então $D_{\vec{v}} f(P_0) =$?

05. Ache o valor absoluto da derivada direcional em $(1,0,1)$ da função $f(x,y,z) = 4x^2y + y^2z$ na direção normal em $(1,1,1)$ à superfície $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$.

06. Se a temperatura em um ponto (x,y,z) de uma bola sólida de raio 3 centrada em $(0,0,0)$ é dada por $T(x,y,z) = yz + zx + xy$ ache a direção, a partir de $(1,1,2)$, na qual a temperatura cresce mais rapidamente.

07. Sendo f diferenciável em $\mathbb{R}^2$, qual o significado geométrico para o fato de $\nabla f(x,y) = 0$.

$a)$ em um ponto;

$b)$ em todos os pontos.

08. Se $f(x,y) = x^2 - y^2$, calcule a derivada direcional de f na direção $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ no ponto $(1,1)$.

09. Se $f(x,y) = e^{x+y}$, calcule a derivada direcional de f no ponto

$(1, 1)$ na direção da curva definida por $g(t) = (t^2, t^3)$ em $g(2)$ para t crescendo.

10. A temperatura num ponto (x, y) do plano xy é dado por $T = \frac{y}{x^2+y^2}$.

a) Calcule a derivada direcional no ponto $(1, 2)$ no sentido que faz um ângulo de $45°$ com o semi-eixo positivos dos x.

b) No sentido de $P = (x, y)$ para $Q = (0, 0)$, no ponto P.

11. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \;, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \;, \; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Mostre que $f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0)$ mais que o gráfico de f não tem plano tangente em $(0, 0)$.

12. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} \;, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \;, \; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

a) Mostre que f derivada direcional, em qualquer direção, em $(0, 0)$

b) Mostre que f não é diferenciável em $(0, 0)$.

14.6 Comentário das Atividades

Essas atividades, são referentes aos assuntos discutidos no decorrer desta aula e têm o objetivo de você (aluno) exercitar os conceitos aprendidos.

Lembre-se, sempre, que existem tutores para ajuda-los na resolução dessas atividades.

14.7 Referências

- GUIDORIZZI, H. L., **Um Curso de Cálculo** (Vol. 1 e 2). Rio de Janeiro: LTC Editora, 2006.
- STEWART, J., **Cálculo** (vol. 1 e 2). São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.
- THOMAS, G. B., **Cálculo** (vol. 1 e 2). São Paulo: Addison Wesley, 2002.