1
LIVRO

15
AULA

Máximos e Mínimos

META

Encontrar os pontos de máximo e mínimo de uma função de duas variáveis a valores reais.

OBJETIVOS

Maximizar e/ou minimizar função de duas variáveis a valores reais.

PRÉ-REQUISITOS

Limite, continuidade, derivadas parciais e diferenciabilidade de funções de duas variáveis reais a valores reais.

15.1 Introdução

Vimos no curso de Cálculo 1 que um dos principais usos da derivada ordinária é na determinação dos valores máximo e mínimo. Nesta aula, veremos como usar as derivadas parciais para localizar os pontos de máximo e mínimo de uma função de duas variáveis.

Este estudo de máximo e mínimo de funções de duas variáveis tem aplicações em diversas áreas da matemática. Por exemplo, dado uma chapa com distribuição de temperatura dada por uma função de duas variáveis reais a valores reais, encontraremos o ponto de maior e o de menor temperatura desta chapa. (Ver Exemplo 15.3.1).

Iniciemos esta aula com o estudo de máximos e mínimos gerais. Posteriormente, estudaremos máximos e mínimos condicionados.

15.2 Pontos de Máximo e Pontos de Mínimo

Definição 15.33. Seja $f(x, y)$ uma função a valores reais e seja $P_0 = (x_0, y_0) \in A$, com $A \subset D(f)$ aberto, dizemos que:

(a) P_0 é ponto de máximo local de f se existir uma vizinhança V de P_0 tal que $f(P) \leq f(P_0)$, para todo $P \in V \cap A$.

(b) P_0 é ponto de mínimo local de f se existir uma vizinhança V de P_0 tal que $f(P) \geq f(P_0)$, para todo $P \in V \cap A$.

(c) P_0 é ponto de máximo absoluto (ou global) de f se para todo $P \in A$, $f(P) \leq f(P_0)$. Neste caso, o número $f(P_0)$ será denominado valor máximo de f em A.

(d) P_0 é ponto de mínimo absoluto (ou global) de f se para todo $P \in A$, $f(P) \geq f(P_0)$. Neste caso, o número $f(P_0)$ será denominado valor mínimo de f em A.

(e) P_0 é ponto crítico (ou estacionário) de f se $f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0$.

Os pontos de máximo e mínimo de uma função f denominam-se extremantes de f.

Exemplo 15.2.1. $(0,0)$ é ponto de mínimo absoluto de $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $f(0,0) = 0$ é o valor mínimo de f, pois, $f(x,y) \geq f(0,0)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

O proximo teorema fornece-nos um critério para selecionar, entre os pontos interiores de $D(f)$, candidatos a pontos de máximo (ou de mínimo) locais de f.

Teorema 15.36. Seja $P_0 = (x_0, y_0)$ um ponto interior de $D(f)$ e suponhamos que $f_x(P_0)$ e $f_y(P_0)$ existam. Nestas condições, uma condição necessária para que P_0 seja um extremante local de f é que P_0 seja um ponto critico de f, ou seja, $f_x(P_0) = 0$ e $f_y(P_0) = 0$.

Demonstração: Suponhamos que P_0 seja um ponto de máximo local de f. Como P_0 é ponto interior de $D(f)$, existe uma vizinhança $B \subset D(f)$ de P_0, tal que, para todo $P \in B$,

$$f(P) \leq f(P_0).$$

Por outro lado, existe um intervalo aberto I, com $x_0 \in I$, tal que para todo $x \in I$, $(x, y_0) \in B$. Consideremos a função g dada por

$$g(x) = f(x, y_0),\ x \in I.$$

Deste modo, temos que g é derivável em x_0 ($g'(x_0) = f_x(x_0, y_0)$), x_0 é ponto interior de I e x_0 é ponto de máximo local de g, daí

$$g'(x_0) = 0$$

e, portanto,

$$f_x(x_0, y_0) = 0.$$

De modo análogo, demonstra-se que $f_y(x_0, y_0) = 0$. ■

Segue deste teorema que se (x_0, y_0) for interior a $D(f)$, f diferenciável em (x_0, y_0) e (x_0, y_0) extremante local de f, então o plano tangente ao gráfico de f em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ será paralelo ao plano xy.

Além disso, o teorema anterior nos diz que se f admite derivadas parciais em todo os pontos interiores a $D(f)$, então os pontos críticos de f são, entre os pontos interiores de $D(f)$, os únicos candidatos a extremantes locais de f.

Já vimos que um ponto $P_0 \in A$ que não é ponto interior de A, denomina-se ponto de fronteira de A. O teorema anterior não se aplica a pontos de fronteira de $D(f)$; um ponto de fronteira de $D(f)$ pode ser um extremante local sem que as derivadas parciais se anulem nele. Os pontos de fronteira devem ser analisados separadamente. (Faremos isso a diante.)

Exemplo 15.2.2. Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$. Como $D(f) = \mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto, de

$$f_x(x, y) = 2x \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = 2y$$

segue que $(0, 0)$ é o único candidato a extremante local. Como $f(x, y) \geq f(0, 0) = 0$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, resulta que $(0, 0)$ é um ponto de mínimo global de f.

O próximo exemplo, nos mostrará que a condição das derivadas parciais se anularem num ponto não é suficiente para concluirmos que tal ponto é um extremante local.

Exemplo 15.2.3. Considere $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = xy$. Verifica-se sem dificuldade que $(0,0)$ é o único ponto crítico de f mais não ponto de máximo ou de mínimo de f. (Para uma visualização geométrica, observe a Figura 15.77)).

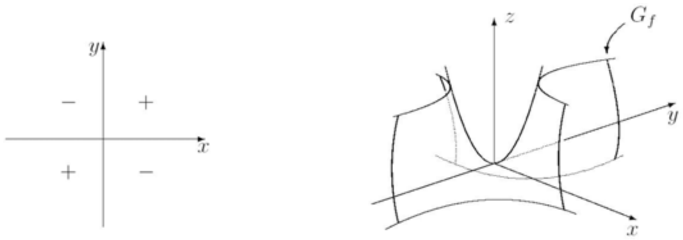

Figura 15.77: Ponto de Sela.

O ponto $(0,0)$ neste exemplo, denomina-se *ponto de sela.*

Quais seriam então as condições suficientes para garantir a natureza de um ponto crítico de f?

Para respondermos essa pergunta, precisamos da seguinte definição.

Seja $f(x,y)$ de classe C^2. A função dada por

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix}$$

denomina-se hessiano de f. Observe que

$$H(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right]^2.$$

O próximo teorema fornece-nos uma condição suficiente para um ponto crítico de f ser um extremante local de f.

Teorema 15.37. Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, f de classe C^2 e $P_0 = (x_0, y_0)$ um ponto interior de $D(f)$. Se:
$f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0$ (P_0 é um ponto crítico de f) e $H(P_0) > 0$.
Então P_0 é extremante local de f e
(i) Se $f_{xx}(P_0) < 0$, então P_0 é ponto de máximo local.
(ii) Se $f_{xx}(P_0) > 0$, então P_0 é ponto de mínimo local.
Se $H(P_0) < 0$, então P_0 não será nem ponto de máximo e nem de mínimo, ou seja, P_0 é ponto de sela.
Se $H(P_0) = 0$, nada se pode afirmar.

A demostração desse teorema pode ser encontrada facílmente em livros mais avançados de Cálculo.

Exemplo 15.2.4. Classificar os pontos críticos da função $f(x, y) = 3xy^2 + x^3 - 3x$.
Solução: Note que f é de classe C^2, pois é uma função polinomial de duas variáveis. Temos que

$$f_x(x, y) = 3y^2 + 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$f_y(x, y) = 6xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \text{ ou } \ y = 0.$$

Assim, os pontos críticos são: $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ e $(-1, 0)$.
Observemos que

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{vmatrix} = 36x^2 - 36y^2$$

(i) Análise para o ponto $(0, 1)$:

$$H(0, 1) = -36 < 0.$$

Logo $(0, 1)$ é ponto de sela.
(ii) Análise para o ponto $(0, -1)$:

$$H(0, -1) = -36 < 0.$$

Logo $(0, -1)$ é ponto de sela.

(iii) Análise para o ponto $(1, 0)$:

$$H(1, 0) = 36 > 0 \;\text{ e }\; f_{xx}(1, 0) = 6 > 0.$$

Logo $(1, 0)$ é ponto de mínimo local de f.

(iv) Análise para o ponto $(-1, 0)$:

$$H(1, 0) = 36 > 0 \;\text{ e }\; f_{xx}(1, 0) = -6 < 0.$$

Logo $(-1, 0)$ é ponto de máximo local de f.

Notemos ainda que: $f(1, 0) = -2$, $f(-1, 0) = 2$ e $f(0, 1) = f(0, -1) = 0$. Utilizando o programa computacional *Maple* tracemos o gráfico de f. (Veja Figura 15.78)

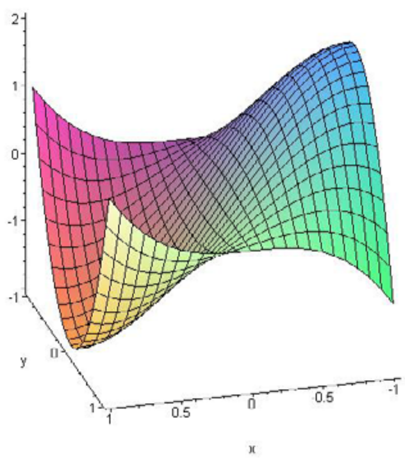

Figura 15.78: Gráfico de $f(x, y) = 3xy^2 + x^3 - 3x$.

Exemplo 15.2.5. Seja $z = f(x, y)$, com domínio $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$, onde $f(x, y) = x^2y + 3x$. O ponto $(0, 0)$ é um ponto de mínimo de f em A pois $f(x, y) \geq f(0, 0)$ em A. Como $f_x(x, y) = 2xy + 3$, segue que $f_x(0, 0) = 3 \neq 0$. Este fato não contradiz o Teorema 15.37, pois ele só se aplica a ponto interiores a $D(f)$ e $(0,0)$ não é um ponto interior a $D(f)$ $(D(f) = A)$.

15.3 Máximos e Mínimos sobre Conjuntos Compactos

Na seção anterior determinamos condições necessárias e condições suficientes para um ponto de $D(f)$ seja um extremante local de f. Entretanto, para muitos problemas que ocorrem na prática é importante determinar os extremantes em um subconjunto A de $D(f)$. O Teorema de Weierstrass, que é o próximo teorema a ser enunciado, fornece-nos condições suficientes para a existências de tais extremantes.

Teorema 15.38. Se $f(x,y)$ for contínua no subconjunto A, fechado e limitado, de $D(f)$, então existiram pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em A, tais que, para todo $(x,y) \in A$,

$$f(x_1, y_1) \leq f(x,y) \leq f(x_2, y_2).$$

Lembremos que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$, fechado e limitado é chamado de compacto.

Este teorema nos garante que se f for contínua em A e A compacto, então existirão pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em A tais que $f(x_1, y_1)$ é o valor mínimo e $f(x_2, y_2)$ é o valor máximo de f. Assim se estivermos interessados em descobrir os pontos máximos e mínimos absolutos de $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, f contínua e A compacto devemos procurá-los entre:

(i) pontos de fronteira de A.

(ii) pontos interiores críticos de f.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 15.3.1. Consideremos uma chapa com a forma $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ e suponhamos que a temperatura em D seja dada por $T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$. Determinar o ponto mais quente e mais frio de D.

Solução: Como T é contínua e D é compacto, pelo Teorema 15.38 sabemos que existem $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ em D, tais que, para todo $P = (x, y) \in D$,

$$f(P_1) \leq f(P) \leq f(P_2).$$

Assim P_1 e P_2 são, respectivamente, os pontos de mínimo e máximo absolutos. Como sabemos, eles podem ocorrer somente em:

(i) pontos interiores críticos de f.

(ii) pontos de fronteira de D.

Vamos procurá-los:

(i) No interior de $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < 1\}$

Pontos críticos:

$$T_x(x, y) = 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$
$$T_y(x, y) = 4y = 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

Assim, o único ponto crítico é o ponto $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$ e $T\left(\frac{1}{2},\ 0\right) = -\frac{1}{4}$.

(ii) Na fronteira de $D : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$

Temos que $x^2 + y^2 = 1$ e assim $y^2 = 1 - x^2$. Substituindo y^2

em T, obtemos

$$\begin{aligned} T(x,y) &= x^2+2y^2-x = T(x,y) = x^2+2(1-x^2)-x \\ &= -x^2-x+2 = F(x), \quad -1 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Chegamos assim ao problema de determinar os pontos máximos e mínimos absolutos de $F(x) = -x^2 - x + 2$ em $[-1, 1]$.

Determinemos os pontos críticos em $(-1, 1)$:

$$F'(x) = -2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

e $F\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$. Ainda, nos pontos extremos, temos $F(-1) = 2$ e $F(1) = 0$. Assim:

Ponto de máximo absoluto de F em $[-1, 1]$: $x = -\frac{1}{2}$ e $F\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4} = 2,25$.

Ponto de mínimo absoluto de F em $[-1, 1]$: $x = 1$ e $F(1) = 0$.

Voltando ao nosso problema inicial em estudo, temos:

$$\begin{aligned} &x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &x = 1 \Rightarrow y = 0. \end{aligned}$$

Logo os candidatos a ponto de máximo e mínimos de T na fronteira de D são: $\left(\frac{1}{2},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $(1, 0)$. Temos que

$$T\left(\frac{1}{2},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4} = 2,25 \quad \text{e} \quad T(1,0) = 0$$

Podemos sintetizar as informações na tabela a seguir:

Pontos	Localização	Imagem do ponto
$\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$	Interior de D	$-\frac{1}{4}$
$(1,\ 0)$	Fronteira de D	0
$\left(\frac{1}{2},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	Fronteira de D	$\frac{9}{4}$

Conclusão: O ponto mais frio da chapa D é o ponto $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$ e sua temperatura é $-\frac{1}{4} = -0,25$. Os pontos mais quente da chapa são $\left(\frac{1}{2},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e a temperatura correspondente é $\frac{9}{4} = 2,25$. (Ver Figura 15.79)

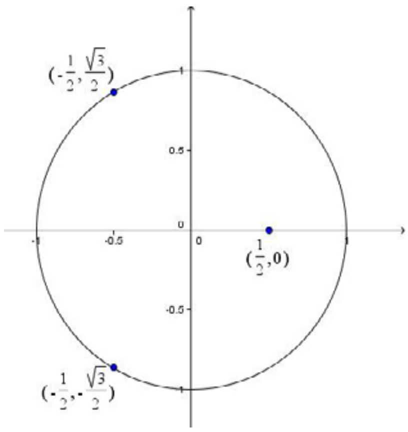

Figura 15.79: Chapa D.

Exemplo 15.3.2. Determine os extremantes de $f(x, y) = xy$ em $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Solução: f é contínua e A é compacto; logo, f assume em A valor máximo e valor mínimo. O único ponto crítico no interior de A é $(0, 0)$, e já vimos que este ponto crítico não é um extremante. Segue que os valores máximo e mínimo de f, em A, são atingidos na fronteira de A. A fronteira é parametrizada por

$$\begin{cases} x = cos\ \theta \\ y = sen\ \theta \end{cases},\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Logo, os valores de f na fronteira de A são fornecidos pela função

$$F(\theta) = f(cos\theta,\ sen\theta) = \frac{1}{2} sen\ 2\theta,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Temos que

$$F'(\theta) = cos\ 2\theta = 0 \Leftrightarrow 2\theta = (2k+1)\frac{\pi}{2},\quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Logo os pontos críticos de F são

$$\begin{aligned}
\theta = \frac{\pi}{4} &\Rightarrow F(\frac{\pi}{4}) = 1 \\
\theta = \frac{3\pi}{4} &\Rightarrow F(\frac{3\pi}{4}) = -1 \\
\theta = \frac{5\pi}{4} &\Rightarrow F(\frac{5\pi}{4}) = 1 \\
\theta = \frac{7\pi}{4} &\Rightarrow F(\frac{7\pi}{4}) = -1.
\end{aligned}$$

F atinge o valor máximo em $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{5\pi}{4}$; atinge o valor mínimo em $\theta = \frac{3\pi}{4}$ e $\theta = \frac{7\pi}{4}$. Segue que $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ são os pontos de máximo de f em A; $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ são os pontos de mínimo de f em A. O valor máximo de f em A é $\frac{1}{2}$, e o valor mínimo, $-\frac{1}{2}$. (Veja Figura 15.80)

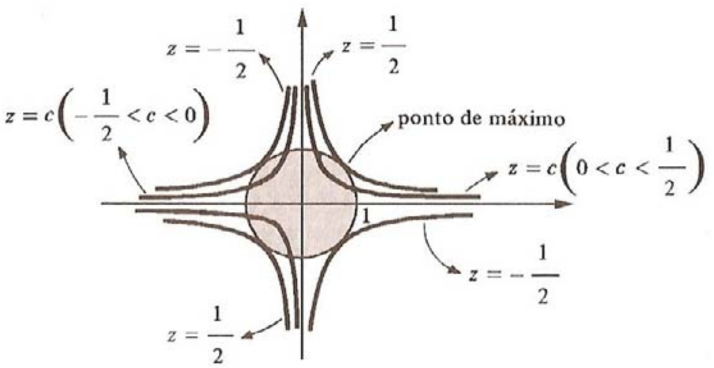

Figura 15.80: Esboço dos pontos de máximo e mínimo de f em A.

15.4 Máximos e Mínimos Condicionados

O objetivo desta seção é o estudo de máximos e mínimos de uma função sobre conjuntos do tipo:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \psi(x, y) = 0\}.$$

Seja $f(x,y)$ diferenciável no aberto $D \subset \mathbb{R}^2$ e seja $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \psi(x,y) = 0\}$ onde ψ é suposta de classe C^1 em D; suponhamos, também, $\nabla\psi(x,y) \neq 0$ em B. Estamos interessados em determinar uma condição necessária para que $P_0 = (x_0, y_0) \in B$ seja um extremante local de f em B. (Ver Figura 15.81)

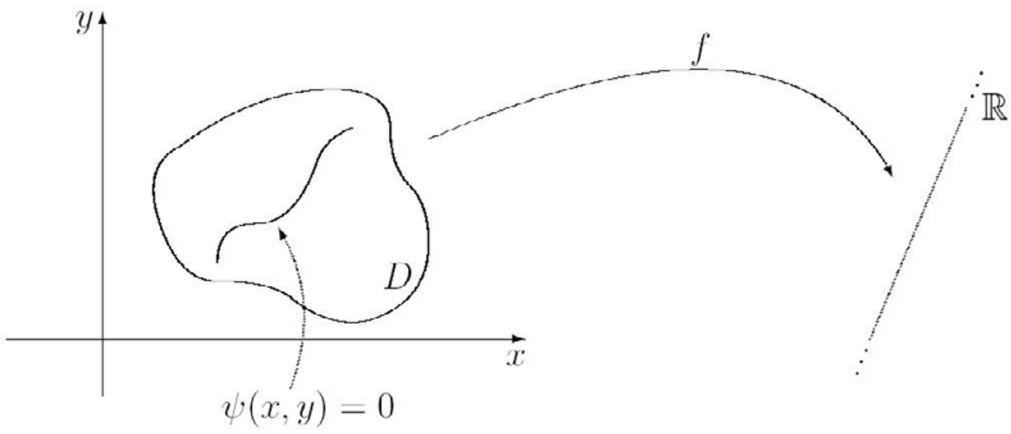

Figura 15.81: Esboço do problema.

Suponhamos que $P_0 \in B$ seja ponto de máximo local de f em B, isto é, $f(P) \leq f(P_0)$ para todo $P \in B$.

Analisemos a situação das curvas de nível $\psi(x,y) = 0$ e $f(x,y) = k,\ k \in \mathbb{R}$.

Se P percorre a curva de nível $\psi(x,y) = 0$ no sentido indicado na Figura 15.82, então $f(P)$ cresce até o ponto P atingir P_0 e depois $f(P)$ começa a decrescer.

Já a situação da Figura 15.83 não é possível, pois depois que P passa por P_0 existem pontos tais que $f(P) \geq f(P_0)$.

Na Figura 15.82 temos

$$\nabla f(P_0) = \lambda \nabla\psi(P_0).$$

Notemos ainda na Figura 15.84, uma situação em que $\nabla f(P_0) =$

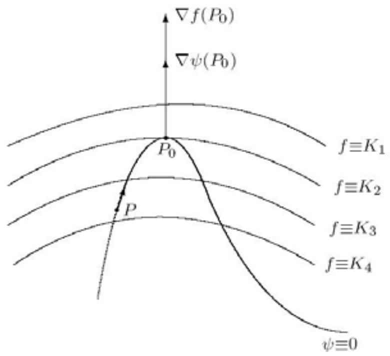

Figura 15.82: curvas de nível $\psi(x,y) = 0$ e $f(x,y) = k,\ k \in \mathbb{R}$.

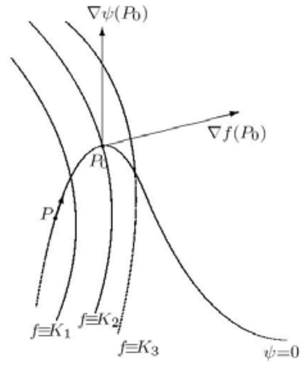

Figura 15.83: curvas de nível $\psi(x,y) = 0$ e $f(x,y) = k,\ k \in \mathbb{R}$.

$\lambda\nabla\psi(P_0)$ e no entanto P_0 não é ponto de máximo ou de mínimo de f condicionado à curva $\psi(x,y) = 0$.

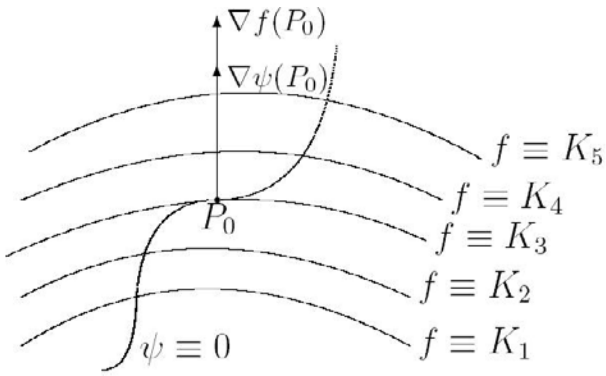

Figura 15.84: Esboço do problema.

Formalizemos a discussão anterior:

Teorema 15.39. Seja $f(x,y)$ diferenciável no aberto D e seja $B = \{(x,y) \in B;\ \psi(x,y) = 0\}$, onde ψ é suposta de classe C^1 em D e $\nabla\psi(x,y) \neq (0,0)$, para todo $(x,y) \in B$. Uma condição necessária para que $(x_0,y_0) \in B$ seja extremante local de f em B

é que exista um real λ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla \psi(x_0, y_0).$$

(o número λ é chamado *Multiplicador de Lagrange*)

A demonstração desse teorema pode ser encontrada nos livros de Cálculo mais avançados.

Então, sendo $f(x, y)$ diferenciável no aberto D e $B = \{(x, y) \in B;\ \psi(x, y) = 0\}$, onde ψ é suposta de classe C^1 em D e $\nabla\psi(x, y) \neq (0, 0)$ em B, os candidatos a extremantes locais de f em B são os $(x, y) \in D$ que tornam compatível o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla \psi(x, y) \\ \psi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Estabelecemos assim uma condição necessária para um ponto (x_0, y_0) ser um extremante local de f em B.

Exemplo 15.4.1. Encontre o máximo de $f(x, y) = xy$ sobre a curva $\psi(x, y) = (x + 1)^2 + y^2 - 1 = 0$.

Solução: Observemos que o conjunto $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \psi(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ (x + 1)^2 + y^2 = 1\}$ é compacto e f é contínua. Logo f atinge seus extremos em B.

Temos $\nabla\psi(x, y) = (2(x + 1),\ 2y)$. Assim $\nabla\psi = (0, 0)$ se, e somente se, $(x, y) = (-1, 0)$. Portanto, $\nabla\psi \neq \vec{0}, \forall (x, y) \in B$.

Temos também que $\nabla f(x, y) = (y, x)$. Logo, no ponto extremo de f em B, devemos ter

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla \psi(x, y),$$

ou seja,

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla \psi(x,y) \\ \psi(x,y) = 0 \end{cases} = \begin{cases} y = \lambda 2(x+1) \\ x = \lambda 2y \\ (x+1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Se $y = 0 \Longrightarrow x = 0$. Se $y \neq 0$, temos $\lambda = \frac{x}{2y}$ e, assim,

$$y = \frac{x}{2y} 2(x+1) \Longrightarrow y^2 = x^2 + x$$

. Substituindo $y^2 = x^2 + x$ em $(x+1)^2 + y^2 = 1$, obtemos

$$(x+1)^2 + x^2 + x = 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \text{ ou } \ x = -\frac{3}{2}.$$

Para $x = 0 \Longrightarrow y = 0 \Longrightarrow xy = 0$.

Para $x = -\frac{3}{2} \Longrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow xy = \frac{-3\sqrt{3}}{4}$.

Para $x = -\frac{3}{2} \Longrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow xy = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Portanto, $\left(-\frac{3}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ é ponto de mínimo e $\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ é ponto de máximo. (Veja a Figura 15.85)

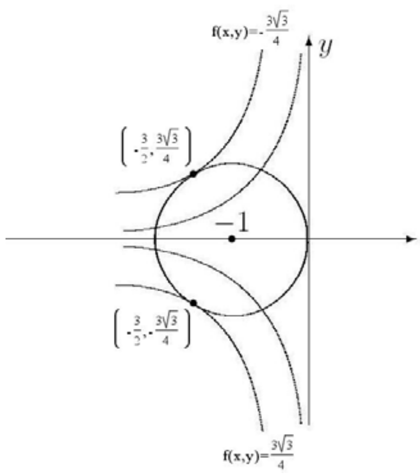

Figura 15.85: Localização dos pontos de máximo e de mínimo de $f(x,y) = xy$ em B.

Exemplo 15.4.2. Encontre a menor distância da origem a um ponto da elipse $\psi(x, y) = 8x^2 - 12xy + 17y^2 = 20$.

Solução: Queremos minimizar $f(x, y) = x^2 + y^2$ (Podemos pensar assim, pois a distância é positiva e portanto basta minimizar seu quadrado).

Observemos que f é contínua e a elipse é um conjunto compacto. Assim, f atinge seus extremos.

Temos:

$$\nabla\psi(x, y) = (16x - 12y,\ 34y - 12x) \neq \vec{0}$$

nos pontos da elipse; e $\nabla f(x, y) = (2x,\ 2y)$.

Se $\nabla f(x, y) = \lambda\nabla\psi(x, y)$, então

$$\begin{cases} x = \lambda(8x - 6y) \\ y = \lambda(17y - 6x) \end{cases}$$

Podemos supor $8x - 6y \neq 0$, uma vez que se $8x - 6y = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow y = 0$, ponto que não está sobre a elipse.

Assim,

$$\lambda = \frac{x}{8x - 6y} \Longrightarrow y = \frac{x}{8x - 6y}(17y - 6x) \Longrightarrow 6x^2 - 9xy - 6y^2 = 0,$$

a qual juntamente com $8x^2 - 12xy + 17y^2 = 20$ fornecerá $y = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$.
Calculando x obtemos os pontos

$$\left(\frac{4\sqrt{5}}{5},\ \frac{2\sqrt{5}}{5}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{5}}{5},\ \frac{2\sqrt{5}}{5}\right),\ \left(-\frac{4\sqrt{5}}{5},\ -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \text{ e } \left(\frac{\sqrt{5}}{5},\ -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right).$$

Calculando a imagem desses pontos por f obtemos:

$$f\left(\frac{4\sqrt{5}}{5},\ \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = f\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5},\ -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = 4$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},\ \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = f\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\ -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = 1$$

Assim, os pontos da elipse mais próximos da origem são: $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},\ \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\ -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$. Os pontos da elipse mais distantes da origem são: $\left(\frac{4\sqrt{5}}{5},\ \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ e $\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5},\ -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$. (Veja Figura 15.86)

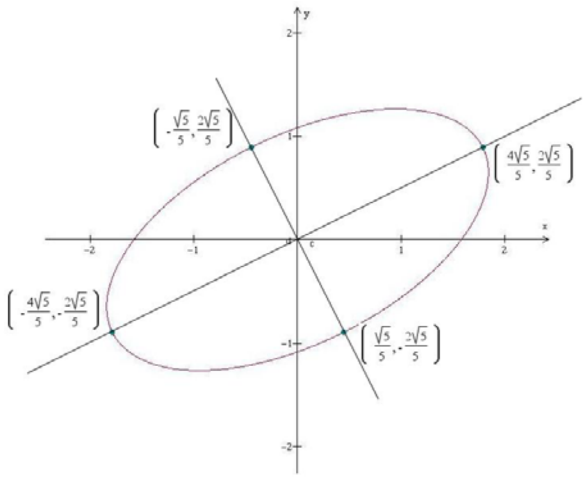

Figura 15.86: Pontos da elipse que estão mais próximos e mais distantes da origem.

15.5 Resumo

Faremos, agora, um resumo das principais definições e resultados vistos nesta aula.

Definição 15.34. Seja $f(x, y)$ uma função a valores reais e seja $P_0 = (x_0, y_0) \in A$, com $A \subset D(f)$ aberto, dizemos que:

(a) P_0 é ponto de máximo local de f se existir uma vizinhança V de P_0 tal que $f(P) \leq f(P_0)$, para todo $P \in V \cap A$.

(b) P_0 é ponto de mínimo local de f se existir uma vizinhança V de P_0 tal que $f(P) \geq f(P_0)$, para todo $P \in V \cap A$.

(c) P_0 é ponto de máximo absoluto (ou global) de f se para todo $P \in A$, $f(P) \leq f(P_0)$. Neste caso, o número $f(P_0)$ será denominado valor máximo de f em A.

(d) P_0 é ponto de mínimo absoluto (ou global) de f se para todo $P \in A$, $f(P) \geq f(P_0)$. Neste caso, o número $f(P_0)$ será denominado valor mínimo de f em A.

(e) P_0 é ponto crítico (ou estacionário) de f se $f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0$.

O próximo teorema nos da uma condição necessária para que um ponto seja um extremante local de uma função.

Teorema 15.40. Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, f de classe C^2 e $P_0 = (x_0, y_0)$ um ponto interior de $D(f)$. Se:
$f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0$ (P_0 é um ponto crítico de f) e $H(P_0) > 0$.
Então P_0 é extremante local de f e
(i) Se $f_{xx}(P_0) < 0$, então P_0 é ponto de máximo local.
(ii) Se $f_{xx}(P_0) > 0$, então P_0 é ponto de mínimo local.
Se $H(P_0) < 0$, então P_0 não será nem ponto de máximo e nem de mínimo, ou seja, P_0 é ponto de sela.
Se $H(P_0) = 0$, nada se pode afirmar.

Muitos problemas que ocorrem na prática é importante determinar os extremantes em um subconjunto A de $D(f)$. O Teorema de Weierstrass, que é o próximo teorema a ser enunciado, fornece-nos condições suficientes para a existências de tais extremantes.

Teorema 15.41. Se $f(x, y)$ for contínua no subconjunto A, fechado e limitado, de $D(f)$, então existiram pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em A, tais que, para todo $(x, y) \in A$,

$$f(x_1, y_1) \leq f(x, y) \leq f(x_2, y_2).$$

No estudo de máximos e mínimos de uma função sobre conjuntos do tipo:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \psi(x, y) = 0\},$$

usaremos o seguinte:

Teorema 15.42. Seja $f(x, y)$ diferenciável no aberto D e seja $B = \{(x, y) \in B;\ \psi(x, y) = 0\}$, onde ψ é suposta de classe C^1 em D e $\nabla\psi(x, y) \neq (0, 0)$, para todo $(x, y) \in B$. Uma condição necessária para que $(x_0, y_0) \in B$ seja extremante local de f em B é que exista um real λ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla\psi(x_0, y_0).$$

(o número λ é chamado *Multiplicador de Lagrange*)

15.6 Atividades

01. Estude as funções abaixo quanto à pontos extremos:

(a) $f(x, y) = (y - x^2)^2 + x^5$;

(b) $f(x, y) = (x - y)^4 + (y - 1)^4$;

02. Calcular os extremos de $z = f(x, y) = xy + \dfrac{27}{x} + \dfrac{27}{y}$.

03. Calcular os pontos extremos da função $z = f(x, y) = (x - y)^6 + (y - 2)^4$. (Nota: Observe que $H = 0$.)

04. Achar o ponto do plano $2x - y - 2z = 16$ mais próximo da origem. (Sugestão: Procure tirar y como função de x e z.)

05. Uma chapa retangular D é determinada pelas retas $x = 3$, $y = 5$, $x = 0$ e $y = 0$. A temperatura da chapa é $T(x, y) = xy^2 - x^2y + 100$. Determinar o ponto mais quente e o ponto mais frio da chapa.

06. Qual é o ponto (x, y) do plano que tem a propriedade de ter como mínima a soma de sua distância ao eixo x com duas vezes a sua distância ao ponto $(0, 1)$?

07. Achar os máximos e mínimos locais de $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$.

08. Os leitos de dois rios são aproximadamente representados pela parábola $y = x^2$ e a reta $x - y - 2 = 0$. Deseja-se reunir os dois cursos por um canal retilíneo de tal maneira que o comprimento seja mínimo. Qual são os pontos pelos quais deve passar o canal. (Observação: Distância de um ponto (x, y) à reta $ax + by + c = 0$ é dada por $\left|\dfrac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$)

09. Calcular o máximo e o mínimo de $f(x, y) = x + y$ sujeito à condição $x^2 + y^2 = 1$. Observe que de fato eles existem. Desenhe os vetores gradientes de $f(x, y)$ e de $\psi(x, y) = x^2 + y^2$.

10. Calcule os pontos extremos de $f(x, y) = 4xy - 2x^2 - y^4$.

11. Achar a maior e a menor distância de um ponto situado sobre a elipse $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ à reta $x + y - 4 = 0$.

15.7 Comentário das Atividades

Essas atividades, são referentes aos assuntos discutidos no decorrer desta aula e têm o objetivo de você (aluno) exercitar os conceitos aprendidos.

Lembre-se, sempre, que existem tutores para ajuda-los na resolução dessas atividades.

15.8 Referências

- GUIDORIZZI, H. L., **Um Curso de Cálculo** (Vol. 1 e 2). Rio de Janeiro: LTC Editora, 2006.

- STEWART, J., **Cálculo** (vol. 1 e 2). São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

- THOMAS, G. B., **Cálculo** (vol. 1 e 2). São Paulo: Addison Wesley, 2002.