AULA 3

Probabilidade

META:

Do mesmo modo que acontece com a teoria da mecânica, que atribui definições precisas a termos de uso diário, como trabalho e força, também a teoria das probabilidades tenta, quantificar, a noção de provável através de um conjunto de regras matemáticas. Trabalhar o que sejam experimentos aleatórios, visto que estes diferentemente dos experimentos determinísticos só têm resultados conhecidos após sua realização.

OBJETIVOS:

No final da aula 3 Diferenciar um experimento aleatório do experimento determinístico. Elaborar espaços amostrais para os experimentos aleatórios. Trabalhar com os principais tipos de eventos e calcular as probabilidades de ocorrência de eventos associados a experimentos probabilísticos.

PRÉ-REQUISITOS:Conhecimentos de Teoria dos Conjuntos e Análise Combinatória.

3.1 Introdução

Caros alunos a definição de probabilidade como o quociente do número de "casos favoráveis" sobre o número de "casos possíveis" foi a primeira definição formal de probabilidade, e apareceu pela primeira vez em forma clara na obra *Liber de Ludo Aleae* de Jeronimo Cardano (1501-1576). Sabemos que a utilização das probabilidades indica a existência de um elemento de acaso, ou de incerteza, quanto à ocorrência ou não de um evento. Estes eventos mesmo possuindo determinadas tendências de ocorrências podem levar a distintos resultados, quando repetidos nas mesmas circunstâncias, dificultando dessa maneira a previsão de um resultado futuro. Assim é que, em muitos casos, pode ser virtualmente impossível afirmar o que ocorrerá com determinado experimento. No entanto embora não seja possível estabelecer a priori os resultados de uma experiência, podem-se prever com certo grau de segurança, seus possíveis resultados(SAMUEL,2009). Para um melhor entendimento do conceito de probabilidade faz-se necessário a introdução de algumas definições que serão apresentadas a seguir.

3.2 Experimento Aleatório, Espaço Amostral e Evento

Experimento é um ensaio científico usado para a verificação de relações entre fatos bem definidos, também denominado de *Experiência ou experimentação.* Um experimento pode ser de dois tipos: Experimento Determinístico e Aleatório. Um experimento Determinístico é aquele que ao executarmos certa ação sob condições, quase idênticas, chegaremos essencialmente aos mesmos resultados, controlando todos os fatores influenciantes. Por exemplo, ao largar uma moeda, sabemos que ela cairá no chão. Mas experimentos onde, mesmo tomando todas as precauções, não é possível conhecer o valor exato do resultado, são chamados de experimentos Aleatórios. Logo temos a seguinte definição. Procedimento que, ao ser repetido sob as mesmas condições, pode fornecer resultados diferentes ou um procedimento cujo resultado é incerto .

Como exemplos de experimentos aleatórios podemos citar, *o lançar de uma moeda e observar que face vai esta voltada para cima, o sortear um número inteiro entre um e cem através de algum procedimento aleatório, lançar um dado e verificar que número da face voltado para cima.* Para estes procedimentos, mesmo não sabendo qual resultado irá ocorrer, podemos enumerar todos os possíveis resultados e montarmos um conjunto, que é denominado de **Espaço Amostral**.

O conjunto que possui todos possíveis resultados de um experimento aleatório, cuja notação é S , denotamos por **Espaço Amostral**. Como exemplos de espaços amostrais, temos: o jogar de uma moeda que tem como espaço amostral o conjunto , S = (C, Co) em que C representa cara e Co representa coroa; O lançar de um dado tem como espaço amostral, S = 1,2,3,4,5,6.

Ao realizarmos um experimento aleatório, muitas vezes, podemos estar interessados na ocorrência de um resultado específico. Por exemplo, no lançamento de um dado, podemos estar interessados nos valores pares, representado pelo conjunto A = (2,4,6) ou nos números impares, representado por B = (1,3,5), que são subconjuntos de S. Assim aos conjuntos A e B damos o nome de eventos do experimento aleatório lançamento de um dado com a seguinte definição formal:

Os subconjuntos de um espaço amostral S denotados por letras latinas maiúsculas do inicio do alfabeto são chamamos de eventos.

OBS 3.1. A idéia lógica de ocorrência de um evento é a seguinte: se um elemento do conjunto (evento) ocorre, então o conjunto (evento) ocorre.

Sendo S =(KK,KC,CK,CC) temos como um evento possível A:sair uma cara dado por: A=KC,CK. Sendo S=24, 25, 26, 27,28 temos o evento possível B: sortear números pares dado por: B=(25,27,26).

OBS 3.2. Com o auxilio da teoria dos conjuntos, em especial as operações de conjuntos, podemos formar outros eventos contidos em S. Então:

- $A \cup B$ é o evento "ou A ou B ou ambos", é chamado da união de A e B;

- $A \cap B$ é o evento "ambos A e B" é chamado a intersecção entre A e B;

- A^c ou $\overline{A}$ é o evento "não-A " é chamado de complemento de A;

- $A - B = A \cap \overline{B}$ é o evento "A mas não B", é chamado da diferença entre A e B;

OBS 3.3. Quando ocorre $A \cap B = \varnothing$ dizemos que estes eventos são disjuntos.

3.3 Definição formal de Probabilidade

Ao realizarmos um experimento sempre teremos um grau de incerteza associado a seus resultados, mesmo que este já tenha sido realizado várias vezes. Por exemplo, podemos jogar 1000 vezes uma moeda e em todas as realizações do experimento obter coroa como resultado, mas este resultado é muito remoto. A chance ou probabilidade com a qual podemos esperar que um evento ocorra, é representada como um número real entre 0 e 1. Ou seja, a chance de ocorrência de um evento esta sempre entre a impossibilidade e a certeza. Assim Passamos então a definição formal de probabilidade.

Seja S espaço amostral. Uma função P definida para todos os subconjuntos de S é chamada de probabilidade se:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo o evento $A \subset S$, isto é, a probabilidade de qualquer evento esta entre 0 e 1;

2. $P(S) = 1$, onde S é o espaço amostral.

3. $P(\varnothing) = 0$, isto é, o evento impossível tem probabilidade zero;

4. Se A_1 e A_2 são disjuntos (também chamados de mutuamente exclusivos) temos que:$[P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)]$

teorema1 Se $A_1 \subset A_2$ então $P(A_1) \leq P(A_2)$ e $P(A_2 - A_1) = P(A_2) - P(A_1)$.

teorema2 Se $\overline{A}$ é o complementar de A, então $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

teorema3 Se $A = A_1, A_2, ..., A_n$ onde $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ são eventos mutuamente exclusivos, então $P(A) = P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+ \ldots + P(A_n)$

3.4 Variável aleatória e Variável Aleatória Discreta

Uma variável aleatória pode ser entendida como uma variável quantitativa, cujo resultado (valor) depende de fatores aleatórios. Matematicamente, variável aleatória é uma função que associa elementos do espaço amostral a valores numéricos, ou seja, $X : S \to \Re$. Representamos as variáveis aleatórias por letras maiúsculas e suas ocorrências por letras minúsculas.

Imagine o lançamento de um dado honesto. De antemão, podemos conhecer os seus possíveis resultados $S = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, mas o resultado em si depende de fatores de sorte. Assim, nesse exemplo,o resultado obtido no lançamento é uma variável aleatória. Mais um exemplo. Suponha a experiência aleatória lançar três moedas, e considere X = número de ocorrências da face cara. O espaço amostral do experimento S é: $S =$ f(cara; cara; cara); (cara; cara; coroa); (cara; coroa; cara); (cara; coroa; coroa); (coroa; cara; cara); (coroa; cara; coroa); (coroa; coroa; cara); (coroa; coroa; coroa).

Ainda em termos formais, podemos conceituar Variável aleatória como uma função que associa a todo evento pertencente a uma partição do espaço amostral a um único número real. Uma variável aleatória pode ser ainda uma função (transformação) dessa variável aleatória original (ou seja, uma função da função, uma função composta).

É importante salientar que a partir do mesmo espaço amostral é possível definir outras variáveis aleatórias, por exemplo, no lançamento de dois dados, podemos estar interessados na variável aleatória (X: a soma das faces). Mas poderíamos estar interessados em outra variável como, por exemplo - (Y: o produto as faces ser 10), e assim por diante. Podemos também salientar que baseados em uma variável montar outra. Digamos que, um jogador ganhe R$ $10,00$ se a soma dos valores das faces for 7, 9 ou 12 e perde R$ $20,00$ caso contrário. Neste caso estamos definido outra variável aleatória denominada por Z: o ganho do jogador e notamos que esta é uma função composta da Variável Aleatória X.

Uma variável aleatória é dita discreta quando ela assume somente valores inteiros num conjunto enumerável de pontos do conjunto real, isto é: é uma função que associa a cada ponto de um espaço amostral, um número real. A soma das probabilidades de todos os valores assumidos por esta variável é igual a 1(SAMUEL,2009).

Uma variável X é classificada como *discreta*, se assume somente um número enumerável de valores (finito ou infinito). E sendo X uma variável aleatória discreta com valores possíveis $\{x_1, x_2, x_3, ...,$ a função que atribui probabilidade a cada um destes possíveis valores é chamada de *função de probabilidade* e é definida por:

$$P\left(X = x_i\right) = p\left(x_i\right), k = 1, 2, 3, ... \tag{3.41}$$

se os números $p(x_i)i = 1, 2, ...$ satisfizerem as condições:

$$p(x_i) \geq 0; \sum_i p(x_i) = 1 \tag{3.42}$$

com a soma percorrendo todos os valores possíveis de X (eventualmente finitos).

3.5 Esperança de uma Variável Aleatória

A média, valor esperado ou esperança matemática de uma Variável Aleatória X é dada por:

$$\mu = E(X) = \sum_i x_i \cdot p(x_i) \tag{3.43}$$

com a soma percorrendo todos os valores possíveis de X (eventualmente finitos).

Propriedades do Valor Esperado:

1. seja X uma v.a. dada por $X = c$ onde "c" é uma constante então $E(c) = c$;
2. sejam X e Y variáveis aleatórias, de modo que $X \leq Y$, então, $\mathrm{E}(X) \leq \mathrm{E}(Y)$;
3. se Y é uma v.a. de modo que $Y = a \pm bX$ onde a e b são constantes, então $E(Y) = E(a \pm bX) = a \pm bE(X)$;
4. se X e Y são v.a., então $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$;
5. se X e Y são v.a. independentes, então $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$.

Seja X uma variável aleatória discreta, definimos a variância de X, denotada por $V(X)$ ou σ^2 , da seguinte maneira:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \tag{3.44}$$

Sendo:

$$E(X^2) = \sum (x_i)^2 \cdot p(x_i) \tag{3.45}$$

Propriedades da Variância:

1. se $Y = a \pm bX$ onde a e b são constantes, temos

$$Var(a \pm bX) = b^2 Var(X)$$

2. se X e Y são variáveis aleatórias independentes então, temos que

$$Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)$$

3. A variância de uma constante é nula; i.e. se "c" é uma constante, então Var(c) = 0.

3.6 Exemplos

Vamos ilustrar conceito de Probabilidade, Variável Aleatória e Esperança com exemplos.

Exemplo1. Jogar uma moeda uma única vez. Tem como espaço amostral:

SOLUÇÃO: o conjunto , S =(C, Co) em que C representa cara e Co representa coroa;

Exemplo2. Ao lançar de um dado uma única vez determine o espaço amostral: **SOLUÇÃO:** S =(1,2,3,4,5,6)

Exemplo3. Seja o espaço amostral referente ao lançamento de um dado $S = (1,, 2,, 3,, 4,, 5,, 6)$. Determine: números menores que 4, números ímpares. **SOLUÇÃO:**

a) números menores que 4: $A = (1, 2, 3)$

b) números ímpares: $B = (1, 3, 5)$

Exemplo4. Sendo P(A)=1/2 e $P(A \cup B) = 3/4$, obtenha P(B) no seguinte caso: A e B são disjuntos.

SOLUÇÃO:

Passo 1 Como os eventos são disjuntos $(A \cap B)$=0

logo,

$P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 3/4 - 1/2 = 1/4$

Exemplo5. Seja X uma variável aleatória que representa o número de meninas de uma família com 4 crianças. Determine a distribuição de probabilidade de X.

SOLUÇÃO:

Passo 1 S = (MMMM; MMMF; MMFM; MFMM; FMMM; MMFF; MFMF; MFFM; FFMM; FMFM; FMMF; FFFM; FFMF; FMFF; MFFF; FFFF)

Passo 2 Distribuição de Probabilidade de nascimento de meninas.

Tabela 3.1: Distribuição de Probabilidade

X	0	1	2	3	4
P(X)	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

Exemplo6. A e B jogam 120 partidas de xadrez, das quais A ganha 60, B ganha 40 e 20 terminam empatadas. A e B concordam em jogar 3 partidas. Determinar a probabilidade de: A ganhar todas as três.

SOLUÇÃO:

Passo 1

Defina o evento A ganhar as três partidas como - G

$P(G) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 0,125$

Exemplo6. Suponha que uma variável aleatória X possa assumir somente quatro valores: -2, 0, 1, e 4 e que P(X = -2) = 0,1 ; P(X = 0) = 0,4; P(X = 1) = 0,3 e P(X = 4) = 0,2. calcule a Esperança.

SOLUÇÃO:

Passo 1

$E(X) = (-2 \times 0,1) + (0 \times 0,4) + (1 \times 0,3) + (4 \times 0,2) = 0,9$

3.7 Conclusão

Na aula de hoje, vimos os conceitos básicos da teoria da probabilidade, muito aplicada em Teste de Hipótese e Estatística Experimental. No ensino de probabilidade, devemos considerar que nosso papel como professor de estatística é levar o aluno a compreender a importância da probabilidade nas tomadas de decisões mais acertadas. Vimos também o conceito de variável aleatória e esperança matemática que são muito importantes na teoria de probabilidade e teste de Hipóteses.

O aluno deve ser capaz de elaborar uma Distribuição de Probabilidade de variável aleatória discreta onde vai associar a cada valor assumido pela variável sua respectiva probabilidade de ocorrência. Com a Distribuição de probabilidade você pode calcular os parâmetros desta variável, representados pelo Valor Esperado ou Esperança Matemática e Variância, estimativas dos parâmetros calculados com base nos dados de uma população já vistos em aulas anteriores.

RESUMO

Com o estudo da probabilidade você vai melhor entender como se movimentam as atividades econômicas e sociais de um grande agregado. Também a natureza se faz presente de forma diferenciada a depender da maior probabilidade de ocorrência de certa característica que de certa forma passa a ser esperada pela tendência histórica daquele movimento. Nesta aula o aluno tomou conhecimento de conceitos muito importantes na continuação dos estudos sobre probabilidades e uso de das distribuições de probabilidades. Uma variável aleatória sempre está associada à ocorrência de valores esperados, mas não certos e que esta variável pode ser discreta ou continua. Na variável aleatória discreta estes valores podem ser contados visto que seu intervalo é finito. Utilizando dados de uma variável aleatória discreta é possível organizar os mesmos em uma distribuição de probabilidades e a partir deste conjunto calcular a Esperança Matemática e Variância. Estes parâmetros representam estimativas para a média aritmética e variância de uma população(SAMUEL,2009).

Dando sequência aos temas abordados por esta aula chegamos as distribuições de frequências e como utiliza-las em determinados experimentos. Estas distribuições foram formalizadas de acordo a ocorrência de determinadas características da variável investigada. A partir dessa associação modelos de distribuições são criados para facilitar a investigação de determinados experimentos em um valor específico ou no total do seu espaço amostral.

Utilizando dados de uma Variável Aleatória Discreta e de uma possível organizar os mesmos em uma distribuição de probabilidades e a partir deste conjunto calcular a Esperança Matemática e Variância. Estes parâmetros representam estimativas para a média aritmética e variância de uma população.

PRÓXIMA AULA

na próxima aula veremos as principais Distribuições Discretas de probabilidade e Variável Aleatória Contínua.

ATIVIDADES

Deixamos como atividades alguns problemas problemas referente ao assunto estudado.

OBS 3.4. Todas as atividades serão respondidas na aula presencial.

ATIV. 3.1. Sejam A e B eventos tais que $P(A) = 0,2$; $P(B) = p$; $P(A \cup B) = 0,6$. Calcular p considerando A e B:

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção os exemplos acima, eles lhe servirão de guia.

a) Mutuamente exclusivos

ATIV. 3.2. As probabilidades de 3 jogadores A, B e C marcarem um gol quando cobram um pênalti são 2/3, 4/5 e 7/10, respectivamente. Se cada um cobrar uma única vez, qual a probabilidade de que pelo menos um marque um gol.

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção os exemplos acima, eles lhe servirão de guia.

ATIV. 3.3. Sabe-se que a chegada de clientes a uma loja de material computacional, durante intervalos aleatoriamente escolhidos de 10 minutos, segue uma distribuição de probabilidade dada na tabela abaixo. Calcule o número esperado de chegada de clientes por intervalo de 10 minutos, e calcule também o desvio padrão das chegadas.

Número de chegadas X	0	1	2	3	4	5
P(X)	0,15	0,25	0,25	0,2	0,1	0,05

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção os exemplos acima, eles lhe servirão de guia.

ATIV. 3.4. Um grupo de alunos é formado por 10 alunos nascidos no município de Simão Dias, 6 no de Poço Verde e 4 em Tobias Barreto. Escolhendo ao acaso um aluno qual a probabilidade que ele tenha nascido em Simão Dias ou em Tobias Barreto.

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção os exemplos acima, eles lhe servirão de guia.

ATIV. 3.5. Sendo P(A)=1/2 e $P(A \cup B) = 3/4$, obtenha P(B) no seguinte caso: A e B são disjuntos.

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção os exemplos acima, eles lhe servirão de guia.

AUTO-AVALIAÇÂO

Sou capaz de entender o que é Probabilidade ?

Sou capaz de calcular uma esperança Matemática?

LEITURA COMPLEMENTAR

TANAKA. Elementos de Estatística. Editora McGraw.Hill CARVALHO, Sérgio, Estatística Básica: Série Impetus Provas e Concursos, Rio de Janeiro, 2ª edição, 2006.

TOLEDO, Geraldo Luciano, OVALLE, Ivo Izidoro, estatística básica. 2ª edição , editora Atlas, 1995.

FRANCISCO ESTEVAM MARTINS DE OLIVEIRA. Estatística e Probabilidade. Editora Atlas.

SAMUEL DE OLIVEIRA RIBEIRO, Métodos Quantitativos em Biologia. PEDRO A. BARBETTA. Estatística Aplicada as Ciências Sociais.Editora da UFSC. LUIZ A. C. GÓES. Estatística I e II. Editora Saraiva. FRANCISCA DÍAZ E FRANCISCO JAVIER LOPES. Bioestatística. Editora Thomson.