AULA

Distribuições Discretas

4

META: Estudar o comportamento das Variáveis Aleatórias Discretas, bem como das Distribuições Binomial e Poisson e suas aplicações. Entender o comportamento de uma Variável aleatória Contínua.

OBJETIVOS: Saber utilizar as variáveis aleatórias discretas e calcular seus principais parâmetros: Esperança Matemática e Variância. Aplicar as Distribuições: Binomial e Poisson a determinados tipos de experimentos de variáveis aleatórias discretas. Saber diferenciar as variáveis Aleatórias Discretas das Variáveis Aleatórias contínuas

. **PRÉ-REQUISITOS** Conhecimentos da teoria de probabilidades, envolvendo: espaço amostral e principais eventos. Também é importante a aula de Variáveis aleatórias, variáveis Aleatórias discretas e Esperança Matemática. O aluno deve usar Papel, Calculadora ou Computador para realização dos cálculos.

4.1 Introdução

Caros alunos a quarta aula do nosso curso é uma das mais importantes, estudaremos os Modelos Discretos de Probabilidades suas aplicações bem como a identificação de uma variável aleatória contínua. A distribuição da probabilidade é uma função que determina probabilidades para eventos ou proposições. Para qualquer conjunto de eventos ou proposições existem muitas maneiras de determinar probabilidades, de forma que a escolha de uma ou outra distribuição é equivalente a criar diferentes hipóteses sobre os eventos ou proposições em questão. Há várias formas equivalentes de se especificar uma distribuição de probabilidade. Talvez a mais comum é especificar uma função densidade da probabilidade. Daí, a probabilidade de um evento ou proposição é obtida pela integração da função densidade. A função distribuição pode ser também especificada diretamente. Em uma dimensão, a função distribuição é chamada de função distribuição cumulativa. As distribuições de probabilidade também podem ser especificadas via momentos ou por funções características, ou por outras formas. Uma distribuição é chamada de distribuição discreta se for definida em um conjunto contável e discreto, tal como o subconjunto dos números inteiros; ou é chamada de distribuição contínua se tiver uma função distribuição contínua, tal como uma função polinomial ou exponencial. A maior parte das distribuições de importância prática são ou discretas ou contínuas, porém há exemplos de distribuições que não são de nenhum desses tipos.

Dentre as distribuições discretas importantes, pode-se citar a distribuição uniforme discreta, a distribuição de Poisson, a distribuição binomial, a distribuição binomial negativa e a distribuição de Maxwell-Boltzmann. Dentre as distribuições contínuas, a distribuição normal, a distribuição gama, a distribuição t de Student e a distribuição exponencial(Introduction to Probability, por Charles Miller Grinstead e James Laurie Snell).

4.2 Distribuição de Bernoulli

A Distribuição de Bernoulli é a distribuição discreta que assume apenas os valores 0 e 1, com probabilidades $\{p(0) = P(X = 0) = 1 - p\}$ e $\{p(1) = P(X = 1) = p\}$ com $0 \leq p \leq 1$. Esta variável é geralmente usada para descrever fenômenos cujos resultados são do tipo sucesso e fracasso. Por exemplo, o lançamento de uma moeda, em que zero pode indicar cara e um coroa. Logo $P(0) = P(1) = 1/2$.
Sua esperança e sua variância são respectivamente $E(X) = p$ & $Var(X) = p(1 - p)$.
Notação $X \sim Bernoulli(p)$

4.3 Distribuição binomial

A distribuição binomial é a distribuição de probabilidade discreta que expressa a chance do número de ocorrência k sucessos numa sequência de n tentativas independentes de modo que cada tentativa resulta apenas em duas possibilidades, sucesso ou fracasso em que a probabilidade de cada tentativa (p), permanece constante.
Diz-se que uma Variável Aleatória X tem distribuição Binomial de parâmetros n e p, e representa-se por $X \sim Bin(n, p)$, se a sua

função de probabilidade for dada por:

$$P(X = k) = p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{4.46}$$

para $k = 0, 1, 2, ..., n$ e onde $\binom{n}{k}$ é uma combinação sem repetição e sua esperança e sua variância são respectivamente $E[X] = np$
e
$Var(X) = np(1-p)$.

4.4 Distribuição Poisson

A distribuição de Poisson é uma distribuição que expressa a probabilidade de que, certo número de eventos ocorrem num dado período tempo, caso estes ocorram com uma taxa média conhecida e caso cada evento seja independente do tempo decorrido desde o último evento. A distribuição foi descoberta por Siméon-Denis Poisson (1781-1840) e publicada, conjuntamente com a sua teoria da probabilidade, em 1838 no seu trabalho Recherches sur la probabilité des jugements en matières criminelles et matière civile ("Inquérito sobre a probabilidade em julgamentos sobre matérias criminais e civis"). O trabalho focava-se em certas variáveis aleatórias N que contavam, entre outras coisas, o número de ocorrências discretas (por vezes chamadas de "chegadas") que tinham lugar durante um intervalo de tempo de determinado comprimento.
Uma variável aleatória X segue o modelo de *Poisson* de parâmetro λ; $\lambda > 0$ se sua função de probabilidade é dada por:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},\ k = 1,\ 2,\ \ldots \tag{4.47}$$

em que

- e: é base do logaritmo natural ($e = 2.71828\ldots$);

- $k!$: é o fatorial de k;

- λ: é um número real, igual ao número esperado de ocorrências que ocorrem num dado intervalo de tempo. Por exemplo, se o evento ocorre a uma média de 6 horas, e estamos interessados no número de eventos que ocorrem num intervalo de 24 minutos, usaríamos como modelo a distribuição de Poisson com $\lambda = 24/6$.

A sua média e a sua variância são $E(X) = Var(X) = \lambda$.

4.5 Variável Aleatória Contínua

Uma Variável Aleatória é dita ser contínua os valores assumidos pela mesma pertencem a um conjunto não enumerável de valores, como por exemplo os números reais. Isto é, são variáveis cujos valores possíveis ocorrem aleatoriamente em um intervalo dos números reais apresentando definições semelhantes do mesmo modo que foi exposto para variáveis discretas.
Dizemos que uma variável aleatória X será classificada como contínua, se existir uma função $f(.)$, denominada de função densidade de probabilidade (fdp) de X que satisfaça as seguintes condições:

1. $f(x) \geq 0$ para todo $x \in (-\infty, \infty)$

2. A área definida por $f(x)$ é igual a 1

3. para quaisquer a, b com $-\infty < a < b < +\infty$, teremos $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$.

Com o auxilio de cálculo diferencial e integral, podemos caracterizar a condição i através a expressão:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 \tag{4.48}$$

Para uma Variável Aleatória contínua X com função densidade $f(x)$ chama-se valor médio de X, representado por $E(X)$, μ_x ou simplesmente μ, a integral sobre o intervalo onde a função de densidade $f(x)$ esta definida:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \tag{4.49}$$

desde que a integral exista.

4.6 Exemplos

Vamos ilustrar os novos conceitos com exemplos.

exemplo1. Seja X uma variável aleatória que contém o número de caras saídas em 12 lançamentos de uma moeda. Calcule a probabilidade de sair 5 caras em 12 lançamentos.

Solução: A probabilidade de $P(X = 5)$, é dada por:

Sendo,

k = 5, n = 12, p = 0.5 então ,

$P(X = 5) = p(5) = \binom{12}{5} 0.5^5 (1 - 0.5)^{12-5} = 0.19$

exemplo2. Num livro de 800 páginas há 800 erros de impressão. Qual a probabilidade de que uma página contenha pelo menos 3 erros? **Solução:** Seja X: número de erros por página e $\lambda = 1$. Logo,

$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 3)$

Substituindo os valores na equação temos,

$P(X \geq 3) = 1 - [\frac{e^0}{0!} + \frac{e^1}{1!} + \frac{e^2}{2!}] = 0,080$

exemplo3. Seja X uma variável aleatória contínua com a seguinte função densidade de probabilidade:

$f(x) = 1/2 \times x, 0 \leq x \leq 2$

$f(x) = 0, c.c.$

Determine:

a)$P(1 \leq X \leq 1,5)$

b)$E(X)$

Solução:

a)a)$P(1 \leq X \leq 1,5) = \int_1^{1,5} \frac{1}{2} x dx = 5/16$

4.7 Conclusão

Na aula de hoje, vimos alguns Modelos Discretos de Probabilidade e os conceitos básicos de variável aleatória Contínua. O aluno deve ser capaz de entender o que é uma variável aleatória contínua e de que forma ela assume valores em determinado espaço amostral. Vai perceber que diferentemente da variável aleatória discreta que assume valores pontuais, a variável contínua não tem existência real em determinado ponto, como os valores assumidos por esta variável são infinitos, suas probabilidades estão associadas à ocorrência da variável investigada em determinado intervalo de área.

Entendendo o que é uma variável aleatória discreta vai utilizar a Distribuição de probabilidade Binomial que é uma distribuição de probabilidade adequada aos experimentos que apresentam apenas dois resultados (sucesso ou fracasso). Além disso, essa distribuição é apropriada para pequenas amostras e formada por eventos independentes. Também será capaz de trabalhar com a distribuição de Poisson que está associada a experimentos cujos resultados constituem eventos independentes e que ocorram com raridade.

RESUMO

Uma variável aleatória sempre está associada à ocorrência de valores esperados, mas não certos e que esta variável pode ser discreta ou continua. Na variável aleatória discreta estes valores podem ser contados visto que seu intervalo é finito.

As distribuições de probabilidade foram formalizadas de acordo a ocorrência de determinadas características da variável investigada. A partir dessa associação modelos de distribuições são criados para facilitar a investigação de determinados experimentos em um valor específico ou no total do seu espaço amostral. Com a aplicação destas distribuições a maioria dos experimentos pode ser investigada de forma mais rápida, pela existência deste modelo, mas não esqueça que a base destes modelos é formada pelo espaço amostral da variável observada e os teoremas do cálculo das probabilidades, portanto os resultados de um experimento podem ser encontrados, usando o modelo estatístico apropriado ou os teoremas da probabilidade(SAMUEL,2009).

Utilizando dados de uma Variável Aleatória Contínua e de uma possível organizar os mesmos em uma distribuição de probabilidades e a partir deste conjunto calcular a Esperança Matemática e Variância. Estes parâmetros representam estimativas para a média aritmética e variância de uma população.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula veremos o conceito de Teste de Hipótese e Distribuição Normal.

ATIVIDADES

Deixamos como atividades alguns problemas problemas referente ao assunto estudado.

OBS 4.1. Todas as atividades serão respondidas na aula presencial.

ATIV. 4.1. Qual a esperança matemática e o desvio-padrão de um jogo no qual se pode ganhar 25,00 com a probabilidade 0,2; e 10,00 com a probabilidade 0,3 e 4,00 com 0,5?

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção os exemplos acima, eles lhe servirão de guia.

ATIV. 4.2. Encontre a probabilidade de obter 5 caras e 7 coroas em 12 lançamentos de uma moeda equilibrada.

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção os exemplos acima, eles lhe servirão de guia.

ATIV. 4.3. Se a probabilidade de um indivíduo sofrer uma reação nociva, resultante de ter tomado um certo soro é 0,001, determinar a probabilidade de que, entre 2000 indivíduos:

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção os exemplos acima, eles lhe servirão de guia.

a) exatamente três sofrerem a reação;

b) mais do que dois sofrerem a reação

ATIV. 4.4. Dez por cento das ferramentas produzidas por um certo processo de fabricação revelaram-se defeituosas. Determinar a probabilidade de, em uma amostra de 10 ferramentas escolhidas ao acaso, exatamente duas sejam defeituosas, mediante o emprego de:

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção os exemplos acima, eles lhe servirão de guia.

a) distribuição binomial

b) distribuição de Poisson

AUTO-AVALIAÇÂO

Sou capaz de entender a diferença entre distribuição Binomial e Distribuição de Poisso?

Sou capaz de entender o que é uma Variável Contínua?

LEITURA COMPLEMENTAR

TANAKA. Elementos de Estatística. Editora McGraw.Hill.

CARVALHO, Sérgio, Estatística Básica: Série Impetus Provas e Concursos, Rio de Janeiro, 2^a edição, 2006.

TOLEDO, Geraldo Luciano, OVALLE, Ivo Izidoro, estatística básica. 2^a edição , editora Atlas, 1995.

FRANCISCO ESTEVAM MARTINS DE OLIVEIRA. Estatística e Probabilidade. Editora Atlas.

SAMUEL DE OLIVEIRA RIBEIRO, Métodos Quantitativos em Biologia. PEDRO A. BARBETTA. Estatística Aplicada as Ciências Sociais. Editora da UFSC. LUIZ A. C. GÓES. Estatística I e II. Editora Saraiva. FRANCISCA DÍAZ E FRANCISCO JAVIER LOPES. Bioestatística. Editora Thomson.