Cálculo III

José Carlos Leite dos Santos

São Cristóvão/SE
2009

Cálculo III

Elaboração de Conteúdo
José Carlos Leite dos Santos

Capa
Hermeson Alves de Menezes

Reimpressão

Ficha catalográfica produzida pela Biblioteca Central Universidade Federal de Sergipe

S237c	Santos, José Carlos Leite dos. Cálculo III / José Carlos Leite dos Santos -- São Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2009. 1. Matemática. 2. Cálculo. I. Título. CDU 517.2/3

Presidente da República
Luiz Inácio Lula da Silva

Ministro da Educação
Fernando Haddad

Secretário de Educação a Distância
Carlos Eduardo Bielschowsky

Reitor
Josué Modesto dos Passos Subrinho

Vice-Reitor
Angelo Roberto Antoniolli

Chefe de Gabinete
Ednalva Freire Caetano

Coordenador Geral da UAB/UFS
Diretor do CESAD
Antônio Ponciano Bezerra

Vice-coordenador da UAB/UFS
Vice-diretor do CESAD
Fábio Alves dos Santos

Diretoria Pedagógica
Clotildes Farias (Diretora)
Hérica dos Santos Mota
Iara Macedo Reis
Daniela Souza Santos
Janaina de Oliveira Freitas

Diretoria Administrativa e Financeira
Edélzio Alves Costa Júnior (Diretor)
Sylvia Helena de Almeida Soares
Valter Siqueira Alves

Coordenação de Cursos
Djalma Andrade (Coordenadora)

Núcleo de Formação Continuada
Rosemeire Marcedo Costa (Coordenadora)

Núcleo de Avaliação
Guilhermina Ramos (Coordenadora)
Carlos Alberto Vasconcelos
Elizabete Santos
Marialves Silva de Souza

Núcleo de Serviços Gráficos e Audiovisuais
Giselda Barros

Núcleo de Tecnologia da Informação
João Eduardo Batista de Deus Anselmo
Marcel da Conceição Souza

Assessoria de Comunicação
Guilherme Borba Gouy

Coordenadores de Curso
Denis Menezes (Letras Português)
Eduardo Farias (Administração)
Haroldo Dorea (Química)
Hassan Sherafat (Matemática)
Hélio Mario Araújo (Geografia)
Lourival Santana (História)
Marcelo Macedo (Física)
Silmara Pantaleão (Ciências Biológicas)

Coordenadores de Tutoria
Edvan dos Santos Sousa (Física)
Geraldo Ferreira Souza Júnior (Matemática)
Janaína Couvo T. M. de Aguiar (Administração)
Priscilla da Silva Góes (História)
Rafael de Jesus Santana (Química)
Ronilse Pereira de Aquino Torres (Geografia)
Trícia C. P. de Sant'ana (Ciências Biológicas)
Vanessa Santos Góes (Letras Português)

NÚCLEO DE MATERIAL DIDÁTICO

Hermeson Menezes (Coordenador)
Edvar Freire Caetano
Isabela Pinheiro Ewerton
Lucas Barros Oliveira
Neverton Correia da Silva
Nycolas Menezes Melo
Tadeu Santana Tartum

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
Cidade Universitária Prof. "José Aloísio de Campos"
Av. Marechal Rondon, s/n - Jardim Rosa Elze
CEP 49100-000 - São Cristóvão - SE
Fone(79) 2105 - 6600 - Fax(79) 2105- 6474

Sumário

Aula 1: Integrais Duplas **11**

1.1 Introdução 12

1.2 Integral Dupla: Domínios Retangulares 12

1.3 Integral Dupla: Domínios Não Retangulares Limitados 14

1.4 Interpretação Geométrica 15

1.5 Integrais Iteradas 16

1.6 Propriedades das Integrais Duplas 18

1.7 Alguns Exemplos 20

1.8 Conclusão 25

RESUMO 25

PRÓXIMA AULA 29

ATIVIDADES 29

LEITURA COMPLEMENTAR 30

Aula 2: Mudança de Variáveis em Integrais Duplas **31**

2.1 Introdução 32

2.2 Mudança de Variáveis em Integrais Duplas 32

2.3 Alguns Exemplos 37

2.4 Conclusão 41

RESUMO 41

PRÓXIMA AULA 43
ATIVIDADES 43
LEITURA COMPLEMENTAR 44

Aula 3: Algumas Aplicações da Integral Dupla 45

3.1 Introdução 46
3.2 Preliminares 46
3.3 Algumas Aplicações da Integral Dupla 50
3.4 Conclusão 56
RESUMO 56
PRÓXIMA AULA 57
ATIVIDADES 57
LEITURA COMPLEMENTAR 58

Aula 4: Integrais triplas 61

4.1 Introdução 62
4.2 Integração Tripla: Domínios Paralelepípedais 62
4.3 Integração Tripla: Domínios Não Paralelepípedais Limitados 64
4.4 Interpretação Geométrica 65
4.5 Integrais Iteradas 65
4.6 Propriedades das Integrais Triplas 66
4.7 Exemplos 67
4.8 Conclusão 72
RESUMO 73
PRÓXIMA AULA 78
ATIVIDADES 78
LEITURA COMPLEMENTAR 79

Aula 5: Mudança de Variáveis em Integrais tríplas **81**

5.1 Introdução 82

5.2 Mudança de Variáveis em Integrais Triplas 82

5.3 Alguns Exemplos 85

5.4 Conclusão 97

RESUMO 97

PRÓXIMA AULA 101

ATIVIDADES 101

LEITURA COMPLEMENTAR 102

Aula 6: Algumas Aplicações das Integrais tríplas **103**

6.1 Introdução 104

6.2 Preliminares 104

6.3 Algumas Aplicações da Integral Tripla 108

6.4 Conclusão 115

RESUMO 116

PRÓXIMA AULA 117

ATIVIDADES 118

LEITURA COMPLEMENTAR 118

Aula 7: Integrais de Funções Vetoriais sobre Curvas em $\mathbb{R}^3$ **121**

7.1 Introdução 122

7.2 Curvas em $\mathbb{R}^3$ 122

7.3 Massa, Momento de Massa e Momento de Inércia de Curvas em $\mathbb{R}^3$ 124

7.4 Campos Vetoriais: Trabalho, Circulação e Fluxo . . . 126

7.5 Independência do Caminho 128

7.6 Algumas Aplicações das Integrais de Linha 131

7.7 Conclusão 136
RESUMO 137
PRÓXIMA AULA 140
ATIVIDADES 140
LEITURA COMPLEMENTAR 141

Aula 8: Integrais de Superfícies **143**
8.1 Introdução 144
8.2 Superfícies em $\mathbb{R}^3$ 144
8.3 Área de Superfícies em $\mathbb{R}^3$ 145
8.4 Massa, Momento de massa e Centro de Massa de Superfícies de Casca Fina em $\mathbb{R}^3$ 149
8.5 Superfícies Parametrizadas 153
8.6 Conclusão 158
RESUMO 158
PRÓXIMA AULA 162
ATIVIDADES 162
LEITURA COMPLEMENTAR 163

Aula 9: Teorema de Green e Teorema de Stokes **165**
9.1 Introdução 166
9.2 Preliminares 166
9.3 Teorema de Green 169
9.4 Estendendo o Teorema de Green para Outras Regiões 173
9.5 Verificação do Teorema de Green 176
9.6 Teorema de Stokes 179
9.7 Verificação do Teorema de Stokes 181
9.8 Conclusão 183
RESUMO 183

PRÓXIMA AULA 185
ATIVIDADES 185
LEITURA COMPLEMENTAR 186

Aula 10: Teorema de Divergência **189**
10.1 Introdução 190
10.2 Preliminares 190
10.3 Teorema da Divergência 191
10.4 Estendendo o Teorema da Divergência para outras Regiões 194
10.5 Algumas Aplicações do Teorema da Divergência . . 196
10.6 Conclusão 200
RESUMO 200
ATIVIDADES 202
LEITURA COMPLEMENTAR 203

AULA 1

Integrais Duplas

META:

Apresentar integrais duplas de funções de valores reais e domínio em $\mathbb{R}^2$.

OBJETIVOS:

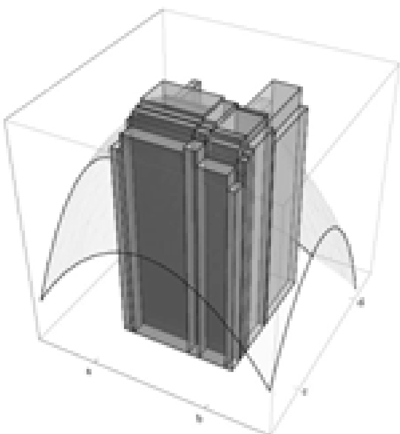
Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Definir a integral dupla de funções de valores reais e domínio em $\mathbb{R}^2$.

Calcular algumas integrais duplas de funções de valores reais e domínio em $\mathbb{R}^2$.

PRÉ-REQUISITOS

Os conhecimentos de integrais de funções de valores reais com domínio em $\mathbb{R}$, da disciplina Cálculo I.



1.1 Introdução

Caros alunos iniciamos aqui nosso curso de Cálculo III com o tema "Integrais Dupla". A integração dupla, em essência, é uma extensão natural da integral simples vista em Cálculo I e definida como limite de somas de Riemann. Na prática, a integração dupla é dada por duas integrações simples, cada uma efetuada sobre uma variável e considerando as demais como constantes. É o que denominamos de integrais interadas. Suas características e detalhes próprios serão vistas ao longo do nosso curso, nas próximas duas aulas.

1.2 Integral Dupla: Domínios Retangulares

Começamos por considerar uma função f definida em um domínio retangular $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\}$. Formalmente $f : [a, b] \times [c, d] \mapsto \mathbb{R}$. Usando a imaginação, pensemos em R coberta por uma rede de retas paralelas aos eixos coordenados e que dividem R em pequenos retângulos (**Fig. 1.1**) . Oficialmente, consideraremos duas partições $P[a, b] = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_m = b\}$ e $P[c, d] = \{y_0 = c, y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_n = d\}$ onde como visto em Cálculo I temos: $x_0 < x_1 < \cdots < x_j < x_{j+1} < \cdots < x_m$ e $y_0 < y_1 < \cdots < y_k < y_{k+1} < \cdots < y_n$.

Desta forma cada um dos pequenos subintervalos $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ e $J_k = [y_{k-1}, y_k]$ têm comprimentos $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$ e $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, respectivamente. Definimos, agora, a uma partição para o retângulo R por $P = P[R] = P[a, b] \times P[c, d]$, o produto cartesiano das partições $P[a, b]$ e $P[c, d]$. As retas retalham a região R em uma série de retângulos $A_{jk} = [x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k], 1 \leq$

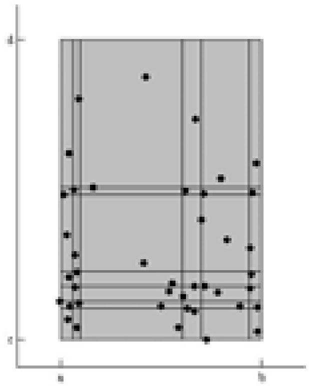


Figura 1.1: Partição de $R = [a, b] \times [c, d]$

$j \leq m, 1 \leq k \leq n$. A area de cada pequeno retângulo é dada por $\Delta A_{jk} = \Delta x_j \Delta y_k$. Como tanto Δx_j quanto Δy_k são diferentes de zero, a área de cada pequeno retângulo é também diferente de zero. Podemos então definir a norma da partição por: $|P| = \max\limits_{\substack{1\leq j\leq m\\ 1\leq k\leq n}} (\Delta A_{jk})$, que corresponde a maior área entre todos os pequeno retângulo.

Pausa para respirar que já vamos definir a integral dupla sobre domínios retangulares. Para isto tomamos um ponto $(\xi_j, \zeta_k) \in [x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k]$ em cada pequeno retângulo e definimos a seguinte soma de Riemann:

$$S_{mn} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_j, \zeta_k) \Delta A_{jk}$$

A integral dupla da função $f(x, y)$ sobre o retângulo R, denotada $\int\int_R f(x, y)dxdy$ será então definida como o seguinte limite:

$$\int\int_R f(x, y)dxdy \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{|P|\to 0} S_{mn}$$

BIOGRAFIA

Georg Friedrich Bernhard Riemann nasceu em Breselenz, Reino de Hanôver, 17 de Setembro de 1826 e morreu em Selasca, Itália, 20 de Junho de 1866, foi um matemático alemão, com contribuições fundamentais para a análise e a geometria diferencial. Wikipedia

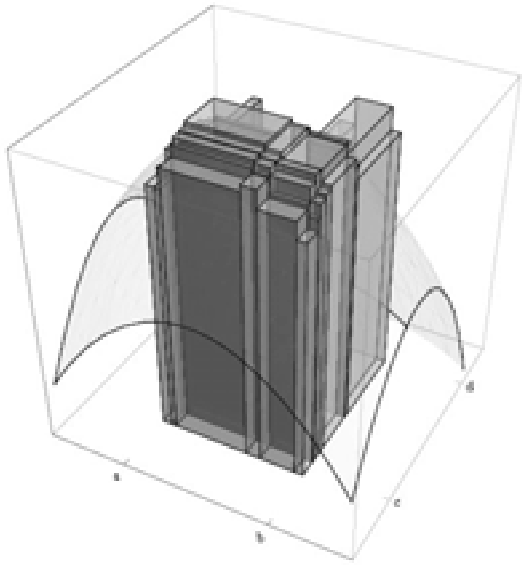


Figura 1.2: Soma de Riemann para $f(x, y)$ em $R = [a, b] \times [c, d]$

1.3 Integral Dupla: Domínios Não Retangulares Limitados

Para definir a integral dupla de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ onde D é não é uma região retangular, porém é limitada, começamos por considerar uma função F definida em um domínio retangular $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\}$ tal que $D \subset R$ e $F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & , (x, y) \in D \\ 0 & , (x, y) \notin D \end{cases}$. Formalmente $F : [a, b] \times [c, d] \mapsto \mathbb{R}$ é uma extensão da função $f(x, y)$. Usando a imaginação, pensemos em R coberta por uma rede de retas paralelas aos eixos coordenados e que dividem R em pequenos retângulos e procedemos como na integral dupla sobre domínios retangulares, considerando a uma partição para o retângulo R por $P = P[R] = P[a, b] \times P[c, d]$, o produto cartesiano das partições

$P[a,b]$ e $P[c,d]$ onde $P[a,b] = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_m = b\}$ e $P[c,d] = \{y_0 = c, y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_n = d\}$. Do mesmo modo definimos a norma da partição por: $|P| = \max\limits_{\substack{1\leq j\leq m\\ 1\leq k\leq n}} (\Delta A_{jk})$ onde $\Delta A_{jk} = \Delta x_j \Delta y_k$, $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$ e $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$. Tomamos um ponto $(\xi_j, \zeta_k) \in [x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k]$ em cada pequeno retângulo e definimos a seguinte soma de Riemann para a função estendida $F(x,y)$:

$$S_{mn} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} F(\xi_j, \zeta_k) \Delta A_{jk}$$

A integral dupla da função $f(x,y)$ sobre o domínio $D \subset \mathbb{R}^2$, denotada $\int\int_D f(x,y)dxdy$ será então definida como o seguinte limite:

$$\int\int_D f(x,y)dxdy \overset{\text{def}}{=} \lim_{|P|\to 0} S_{mn}$$

. Observem na partição (**Fig. 1.3**) que apenas os pequenos retângulos cinza claro contribuem para a soma de Riemann os demais têm contribuição nula visto que o ponto escolhido dentro destes estão fora de $D \subset \mathbb{R}^2$ e portanto $F(\xi_j, \zeta_k) = 0$.

1.4 Interpretação Geométrica

Quando a função $f(x,y)$ é positiva na região R, como a da (**Fig. 1.2**), vemos que a soma de Riemann aproxima o volume do prisma sólido reto limitado inferiormente por R e superiormente pela superfície $z = f(x,y)$ e quanto maior for o refinamento da partição de R melhor será a aproximação. Podemos então, interpretar a integral dupla $\int\int_R f(x,y)dxdy$ como o volume do prisma sólido reto limitado inferiormente por R e superiormente pela superfície $z = f(x,y)$.

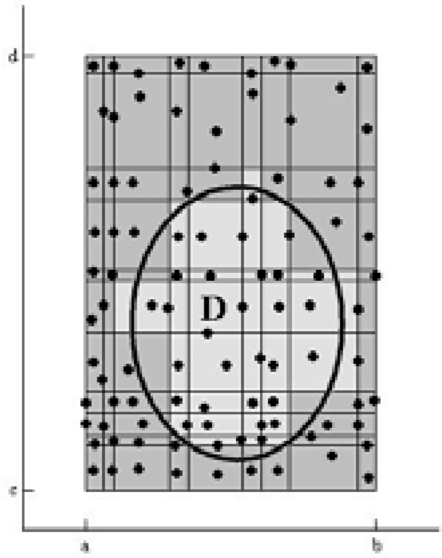


Figura 1.3: Partição para $F(x, y)$ em $R = [a, b] \times [c, d]$

1.5 Integrais Iteradas

Do mesmo modo que para a integral simples, na integral dupla a soma de Riemann não é um modo prático de se calcular uma integral dupla. Vejamos agora um procedimento que facilitará o cálculo de integrais duplas. Vamos exemplificar calculando o volume de um prisma reto de base retangular, limitado inferiormente por $[a, b] \times [c, d]$ e superiormente pela função de valores positivos $f(x, y)$. para cada valor fixo de x no intervalo $[a, b]$ consideremos o perfil $A(x)$ (área da seção transversal em x) (**Fig. 1.4**) fazemos o produto por dx e integramos no intervalo $[a, b]$. Isto resulta no volume do citado prisma.

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

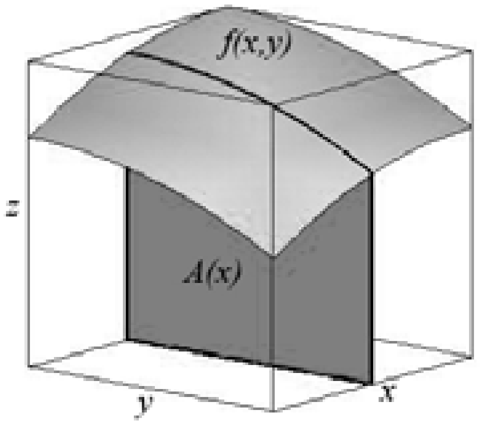


Figura 1.4: $A(x)$, x fixo, integramos em relação a y

Por outro lado o perfil $A(x)$ é dada pela área abaixo da curva $f(x, y)$, fixado o x, entre os valores de y no intervalo $[c, d]$. E como vimos em Cálculo I $A(x) = \int_c^d f(x, y)dy$.
O volume do prisma pode ser então escrito como:

$$V = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)dy \right] dx$$

.

Podemos alternativamente calcular o mesmo volume considerando os perfis $A(y)$ (área da seção transversal em y) (**Fig. 1.5**) fazemos o produto por dy e integramos no intervalo $[c, d]$. Isto resulta no volume do citado prisma.

$$V = \int_c^d A(y)dy$$

Da mesma forma como vimos em Cálculo I $A(y) = \int_a^b f(x, y)dx$.
O volume do prisma pode ser então escrito como:

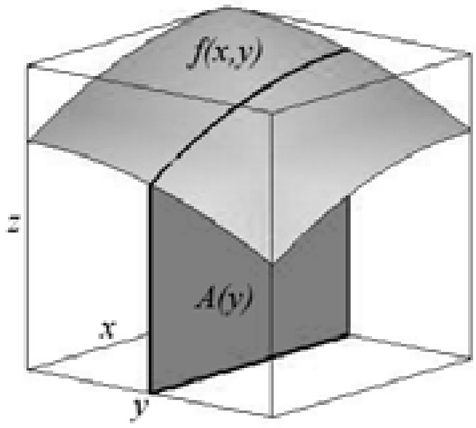


Figura 1.5: $A(y)$, y fixo, integramos em relação a x

$$V = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy$$

.

Como o volume dado pelas duas expressões é o mesmo temos que:

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx$$

ou seja a ordem em que as integrais simples são executadas não altera o resultado final da integração dupla em domínios retangulares. Este procedimento e conhecido como integrais iteradas.

1.6 Propriedades das Integrais Duplas

Como nosso curso é de Cálculo, apenas listaremos, sem demonstração, alguma das propriedades das integrais duplas. Caso desejem conhecer a demonstração de algumas destas propriedades, recomendo livros de Cálculo Avançado como os citados na bibliografia abaixo.

Propriedade 1.1. *Sejam* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ *uma função de valores reais integrável em* D *e* $c \in \mathbb{R}$*, então vale:*

$$\int\int_D cf(x,y)dxdy = c\int\int_D f(x,y)dxdy$$

Propriedade 1.2. *Sejam* $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ *duas funções de valores reais integráveis em* D*, então vale:*

$$\int\int_D (f+g)(x,y)dxdy = \int\int_D f(x,y)dxdy + \int\int_D g(x,y)dxdy$$

Propriedade 1.3. *Sejam* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ *uma função de valores reais integrável em* D *tal que* $f(x,y) \geq 0, \forall (x,y) \in D$*, então vale:*

$$\int\int_D f(x,y)dxdy \geq 0$$

Propriedade 1.4. *Sejam* $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ *duas funções de valores reais integráveis em* D *tais que* $f(x,y) \geq g(x,y), \forall (x,y) \in D$*, então vale:*

$$\int\int_D f(x,y)dxdy \geq \int\int_D g(x,y)dxdy$$

Propriedade 1.5. *Seja* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ *uma função de valores reais integrável em* D *onde* $D = A \cup B$ *e* $A \cap B$ *é a união de um número finito de curvas em* $\mathbb{R}^2$*, então vale:*

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_A f(x,y)dxdy + \int\int_B f(x,y)dxdy$$

OBS 1.1. As duas primeiras propriedades diz respeito à "linearidade" do operador integral dupla. As terceira e quarta propriedades são denominadas "dominação" enquanto que a quinta propriedade é denominada "aditividade".

1.7 Alguns Exemplos

Nada mais natural que ilustrar um novo conceito com exemplos e, vamos aqui fazer exatamente isto, ilustrar o conceito de integral dupla com dois exemplos. Antes porém, vale observar que a na prática uma integral dupla equivale a duas integrais simples e neste caso uma pergunta fica no ar e não deixaremos sem resposta. Qual das duas variáveis x ou y integraremos primeiro? Muito bem, a resposta é dada pela propria expressão da integral dupla. Isto é, na integral $\displaystyle\int\int_R f(x,y)dxdy$ primeiramente integramos na variável x e depois na variável y. Já na integral $\displaystyle\int\int_R f(x,y)dydx$ primeiramente integramos na variável y e depois na variável x.
Vamos diretamente para o primeiro exemplo de integral dupla sobre domínios retangulares.A saber:

Exemplo 1.1. Considere a função $f:[0,1]\times[0,1]\mapsto\mathbb{R}$ (**Fig. 1.6**) dada por $f(x,y)=\exp(-x-y)$ e determine a integral dupla $I=\displaystyle\int\int_R f(x,y)dxdy$ sobre a região $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|0\leq x\leq 1\wedge 0\leq y\leq 1\}$.

SOLUÇÃO:

Passo 1 colocaremos os limites de integração que representam a região R dada, segundo a ordem de integração:
$I=\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \exp(-x-y)dxdy$

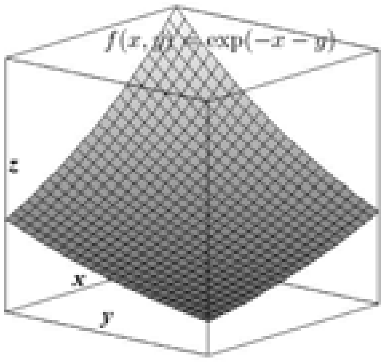


Figura 1.6: Função $f : [0,1] \times [0,1] \mapsto \mathbb{R}$: $f(x,y) = \exp(-x-y)$

Lembrando que: $\exp(-x-y) = \exp(-x)\exp(-y)$ temos:

$I = \int_0^1 \int_0^1 \exp(-x)\exp(-y)dxdy$

Passo 2 integraremos na variável x considerando a variável y como uma constante:

$I = \int_0^1 \left(-\exp(-x)\Big|_0^1 \right) \exp(-y)dy$

Substituindo os limites de integração temos:

$I = \int_0^1 (-\exp(-1) - (-\exp(-0)))\exp(-y)dy$

Efetuando os cálculos temos:

$I = \int_0^1 (1 - \exp(-1))\exp(-y)dy$

Passo 3 integraremos na variável y considerando a variável:

$I = (1 - \exp(-1)) \left(-\exp(-y)\Big|_0^1 \right)$

Substituindo os limites de integração temos:

$I = (1 - \exp(-1))(-\exp(-1) - (-\exp(-0)))$

Efetuando os cálculos temos:

$I = (1 - \exp(-1))^2 \quad \square$

OBS 1.2. Daremos aqui um método prático para determinar os limites de integração em uma integral dupla sobre domínio não retangular da forma: D.

Passo 1 Fazer um desenho da região D. (**Fig. 1.7**) identificando as curvas inferior $a(x)$ e superior $b(x)$ que limitam a região D.

Passo 2 Atravessar toda a região D e o eixo x com um segmento de reta paralelo e orientado na direção positiva ao eixo y (segmento AB na **Fig. 1.7**)

Passo 3 Deslocar o segmento de reta AB paralelo ao eixo y na

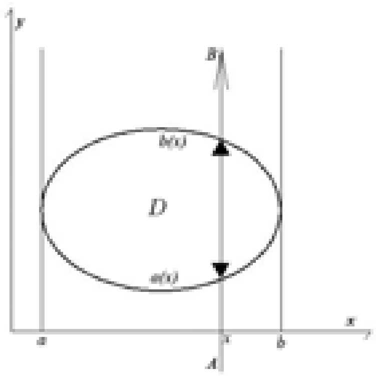


Figura 1.7: Determinação prática dos limites para D

direção negativa do eixo x até tocar o ponto mais à esquerda de D marcando o limite inferior de x (ponto a na **Fig. 1.7**).

Passo 4 Deslocar o segmento de reta AB paralelo ao eixo y na direção positiva do eixo x até tocar o ponto mais à direita de D marcando o limite superior de x (ponto b na **Fig. 1.7**).

Passo 5 Tomando um ponto qualquer $x \in (a, b)$ passamos o segmento de reta AB através da região D. O limite inferior para a variável y será a função $a(x)$, ponto da curva onde o segmento entra na região D e o limite superior para a variável y será $b(x)$, ponto da curva onde o segmento de reta sai da região D.

Nossa integral será efetuada assim:

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)dydx$$

Exemplo 1.2. Considere a função $f : [0,1] \times [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ (**Fig. 1.8**) dada por $f(x,y) = y(3x - x^2 - y)$ e determine a integral dupla $I = \displaystyle\int\int_R f(x,y)dxdy$ sobre a região $D \in \mathbb{R}^2$ interseção das curvas $y = 0$ e $y = 3x - x^2$.

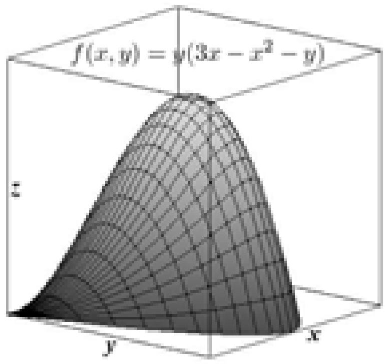


Figura 1.8: Função $f : [0,1] \times [0,1] \mapsto \mathbb{R}$: $f(x,y) = x.y$

SOLUÇÃO:

Passo 1 faremos o desenho das duas curvas que determinam os limites para a região D. A saber $y = 0$ e $y = 3x - x^2$ (**Fig. 1.9**).

Passo 2 usando o processo prático exposto acima determinamos os limites de integração. A saber: $a = 0$, $b = 3$, $a(x) = 0$ e $b(x) = 3x - x^2$.

A integral passa a ser escrita como:

$I = \displaystyle\int\int f(x,y)dxdy = \int_0^3 \int_0^{3x-x^2} y(3x - x^2 - y)dydx$

Operando no integrando fazendo o produto por y temos:

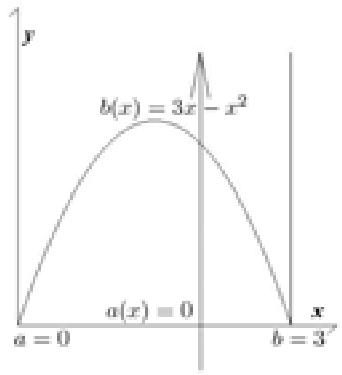


Figura 1.9: Limites para o domínio D

$I = \int_0^3 \int_0^{3x-x^2} (y(3x-x^2) - y^2)dydx$

Passo 3 efetuando a integração em y temos:

$I = \int_0^3 (\frac{y^2}{2}(3x-x^2) - \frac{y^3}{3})\Big|_0^{3x-x^2} dx$

Substituindo os limit3es de integração temos:

$I = \int_0^3 (\frac{(3x-x^2)^2}{2}(3x-x^2) - \frac{(3x-x^2)^3}{3})dx$

Efetuando as simplificações teremos:

$I = \int_0^3 \frac{(3x-x^2)^3}{6}dx$

Expandindo o binômio de Newton temos:

$I = \frac{1}{6}\int_0^3 (27x^3 - 27x^4 + 9x^5 - x^6)dx$

Passo 4 efetuando a integração em x temos:

$I = \frac{1}{6}(27\frac{x^4}{4} - 27\frac{x^5}{5} + 9\frac{x^6}{6} - \frac{x^7}{7})\Big|_0^3$

Substituindo os limit3es de integração temos:

$I = \frac{1}{6}(27\frac{3^4}{4} - 27\frac{3^5}{5} + 9\frac{3^6}{6} - \frac{3^7}{7})$

Efetuando os cálculos, garantido muito trabalho, temos:

$I = \frac{729}{280}$ $\square$

1.8 Conclusão

Na aula de hoje, vimos que a integral dupla é uma extensão natural do conceito de integral simples visto em Cálculo I. E se por um lado a integral simples pode ser interpretada como a área sob a curva descrita pela função a ser integrada, a integral dupla pode ser vista como o volume sob a superfície descrita pela função a ser duplamente integrada.

RESUMO

Integração Dupla: Domínios retangulares Considerando uma função $f : R \mapsto \mathbb{R}$ onde $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\}$ é um retângulo em $\mathbb{R}^2$. Podemos cobri-lo com uma malha de retas formada pela partição: $P = P[R] = P[a, b] \times P[c, d]$ onde cada $P[a, b] = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n = b\}$ e $P[c, d] = \{y_0 = c, y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_m = d\}$ são partições dos intervalos $[a, b]$ em x e $[c, d]$ em y respectivamente. A malha divide R nos retângulos $A_{jk} = [x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k], 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq m$ de área $\Delta A_{jk} = \Delta x_j \Delta y_k$ onde $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$ e $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ são os comprimentos dos subintervalos $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ e $J_k = [y_{k-1}, y_k]$ respectivamente. Defini-se a norma da partição por: $|P| = \max\limits_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq m}} (\Delta A_{jk})$. Toma-se um ponto $(\xi_j, \zeta_k) \in [x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k]$ em cada retângulo A_{jk} e definimos a seguinte soma de Riemann:

$$S_{nm} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} f(\xi_j, \zeta_k) \Delta A_{jk}$$

A integral dupla da função $f(x,)$ sobre o retângulo R, denotada $\int\int_R f(x,y)dxdy$ será então definida como o seguinte limite:

$$\int\int_R f(x,y)dxdy \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{|P|\to 0} S_{nm}$$

Integração Dupla: Domínios não Retangulares

Para definir a integral dupla de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ onde D é não é uma região retangular, porém é limitada, começamos por considerar uma função F definida em um domínio retangular $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\}$ tal que $D \subset R$ e $F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & ,(x,y) \in D \\ 0 & ,(x,y) \notin D \end{cases}$. Formalmente $F : [a,b] \times [c,d] \mapsto \mathbb{R}$ é uma extensão da função $f(x,y)$. A partir daqui todo o procedimento é semelhante ao da definição da integral dupla em domínios retangulares. Podemos definir a integral dupla de uma função $f(x,y)$ em um domínio não retangular D por:

$$\int\int_D f(x,y)dxdy \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{|P|\to 0} S_{mn}$$

. Onde: $S_{mn} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} F(\xi_j, \zeta_k)\Delta A_{jk}$. é a soma de Riemann para $F(x,y)$

Integrais Iteradas

As integrais iteradas dizem que em um domínio retangular $R = [a,b] \times [c,d]$ a ordem de execução das integrais simples não alteram o valor da integral dupla, que pode ser representada por:

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx$$

.

Propriedades das Integrais Duplas

As integrais duplas são de certo modo semelhantes às propriedades das integrais simples que vimos em Cálculo I sendo quase que uma extensão natural destas. As integrais duplas têm, entre outras, as seguintes propriedades: **Propriedade 1** Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ uma função de valores reais integrável em D e $c \in \mathbb{R}$, então vale:

$$\int\int_D cf(x,y)dxdy = c\int\int_D f(x,y)dxdy$$

Propriedade 2 Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ duas funções de valores reais integráveis em D, então vale:

$$\int\int_D (f+g)(x,y)dxdy = \int\int_D f(x,y)dxdy + \int\int_D g(x,y)dxdy$$

Propriedade 3 Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ uma função de valores reais integrável em D tal que $f(x,y) \geq 0, \forall (x,y) \in D$, então vale:

$$\int\int_D f(x,y)dxdy \geq 0$$

Propriedade 4 Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ duas funções de valores reais integráveis em D tais que $f(x,y) \geq g(x,y), \forall (x,y) \in D$, então vale:

$$\int\int_D f(x,y)dxdy \geq \int\int_D g(x,y)dxdy$$

Propriedade 5 Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ uma função de valores reais integrável em D onde $D = A \cup B$ e $A \cap B$ é a união de um número finito de curvas em $\mathbb{R}^2$, então vale:

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_A f(x,y)dxdy + \int\int_B f(x,y)dxdy$$

Determinação dos Limites de Integração

Para determinar os limites de integração em uma integral dupla sobre domínio não retangular da forma: D seguimos os seguintes passos:

Passo 1 Fazer um desenho da região D. (**Fig. 1.7**) identificando as curvas inferior $a(x)$ e superior $b(x)$ que limitam a região D.

Passo 2 Atravessar toda a região D e o eixo x com um segmento de reta paralelo e orientado na direção positiva ao eixo y (segmento AB na **Fig. 1.7**)

Passo 3 Deslocar o segmento de reta AB paralelo ao eixo y na direção negativa do eixo x até tocar o ponto mais à esquerda de D marcando o limite inferior de x (ponto a na **Fig. 1.7**).

Passo 4 Deslocar o segmento de reta AB paralelo ao eixo y na direção positiva do eixo x até tocar o ponto mais à direita de D marcando o limite superior de x (ponto b na **Fig. 1.7**).

Passo 5 Tomando um ponto qualquer $x \in (a,b)$ passamos o segmento de reta AB através da região D. O limite inferior para a variável y será a função $a(x)$, ponto da curva onde o segmento

entra na região D e o limite superior para a variável y será $b(x)$, ponto da curva onde o segmento de reta sai da região D.
Nossa integral será efetuada assim:

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)dydx$$

PRÓXIMA AULA

Em nossa próxima aula veremos mudança de variáveis na integração dupla. O objetivo da mudança de variáveis em uma integral dupla será a de facilitar esta integração de uma de duas formas. A primeira será tornando o integrando mais simples. A segunda transformando o domínio D do integrando em um domínio de forma geométrica mais simples.

ATIVIDADES

Deixamos como atividades o cálculo de algumas integrais duplas.

ATIV. 1.1. Seja $f : [-1,+1] \times [-1,+1] \mapsto \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 + y^2$. Determine a integral dupla $\displaystyle\int\int_R f(x,y)dxdy$.

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção o cálculo de integrais duplas dos exemplos acima, elas lhe servirão de guia.

ATIV. 1.2. Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 + y^2$, onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0 \wedge 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$.

- Determine os limites da integral dupla $\displaystyle\int\int_D f(x,y)dxdy$,
- esboce a região de integração e
- calcule a integral dupla $\displaystyle\int\int_D f(x,y)dxdy$.

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção o cálculo de integrais duplas dos exemplos acima, elas lhe servirão de guia.

LEITURA COMPLEMENTAR

ÁVILA, Geraldo, Cálculo 3: Funções de Várias Variáveis, Livros Técnicos e Científicos Editora, São Paulo, 3ª edição, 1982.

LEITHOLD, Louis, O Cálculo com Geometria Analítica. Volume 2, Editora Harbra, 1994.

STEWART, James,Cálculo. Volume 3, 5ª edição, Editora CENGAGE Learning, 2009.

SWOKOWSKI, Earl E., Cálculo com Geometria Analítica, Volume 2, 2ª edição, Makron Books do Brásil SP, 1994.

THOMAS, George B., Cálculo, Volume 2, 10ª, Addilson Wesley, 2003.

KAPLAN, Wilfred, Cálculo Avançado Vol.1 e vol.2 Editora Edgard Blücher 1991.// SPIEGEL, Murray R. Cálculo Avançado, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1971.

BOUCHARA, Jacques, Cálculo Integral Avançado, EDUSP, 2006.