AULA 2

# Mudança de Variáveis em Integrais Duplas

**META:**

Introduzir mudança de variáveis em integrais duplas de funções de valores reais e domínio em $\mathbb{R}^2$.

**OBJETIVOS:**

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

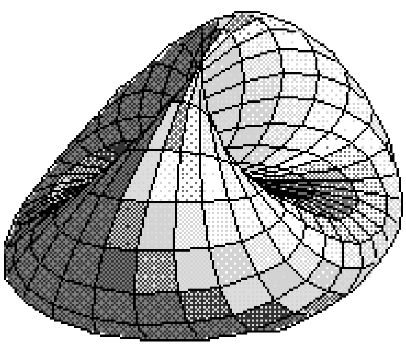
Calcular o jacobiano de aplicações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$.

Calcular integrais duplas de funções de valores reais e domínio em $\mathbb{R}^2$ utilizando mudança de variáveis.

Calcular integrais duplas de funções de valores reais e domínio em $\mathbb{R}^2$ em coordenadas polares.

**PRÉ-REQUISITOS**

Os conhecimentos de integrais de funções de valores reais com domínio em $\mathbb{R}$, da disciplina Cálculo I, curvas em $R^2$ e coordenadas polares da disciplina Cálculo II e integrais duplas aula 01.



## 2.1 Introdução

Caros alunos a segunda aula do nosso curso de Cálculo III tem com o tema “Mudança de Variáveis em Integrais Duplas”. As vezes, na integral dupla $\int\int_D f(x,y)dxdy$, dada a natureza ou de $f(x,y)$ ao do seu domínio $D$, fica mais fácil integrar se fizermos uma mudança nas variáveis de integração, como quando $D$ é uma disco, um semi-disco, um setor circular ou mesmo uma faixa de disco, usando-se o sistema de coordenadas polares de modo geral a integral dupla é mais fácil de se determinar que em coordenadas cartesianas.

**HISTÓRIA**

O teorema de mudança de variáveis em integrais duplas foi primeiro proposto por Euler quando ele desenvolveu a noção de integral dupla em 1769. Usado por Legendre, Laplace e Gauss, foi primeiramente generalizado para n variáveis por Mikhail Ostrogradski em 1836, resistiu a uma demonstração mais rigorosa por longo tempo (cerca de 125 anos). E foi satisfatóriamente demonstrado por Elie Cartan em uma série de artigos nos anos 1890.

## 2.2 Mudança de Variáveis em Integrais Duplas

Caros alunos começaremos revendo mudança de variáveis em integrais simples. Considere uma função $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$. A idéia é mudar a variável inicial $x$ para uma nova variável $\xi$ relacionadas por $x = g(\xi)$, onde $g(\xi)$ é uma função biunívoca estritamente crescente ou estritamente decrescente em $[a,b]$. Isto garante que podemos inverter a mudança de variáveis.

Seja $F(x)$ uma anti-derivada de $f(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$. Então, da regra da cadeia temos:

$$\frac{d}{d\xi}F(g(\xi)) = F'(g(\xi))g'(\xi) = f(g(\xi))g'(\xi).$$

Integrando com respeito a $\xi$ temos:

$$\int \frac{d}{d\xi}F(g(\xi))d\xi = \int f(g(\xi))g'(\xi)d\xi$$

Das propriedades da integral temos:

$$F(g(\xi)) + C = \int f(g(\xi))g'(\xi)d\xi$$

Como $x = g(\xi)$ temos:

$$F(x) + C = \int f(g(\xi))g'(\xi)d\xi$$

Como $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ a primeira expressão é a in-

tegral indefinida de $f(x)$ com respeito a $x$ e temos:
$\int f(x)dx = \int f(g(\xi))g'(\xi)d\xi$
Que representa a mudança de variáveis em uma integral simples.

Para integrais definidas, se $c = g(a)$ e $d = g(b)$ então:
$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(\xi))g'(\xi)d\xi$
A expressão acima funciona bem quando $g(\xi)$ é crescente neste caso $a < b$ e $c < d$. Porém, no caso de $g(\xi)$ decrescente $(g'(\xi) < 0)$ pois neste caso $a < b$ e $d < c$ e portanto o limite inferior da segunda integral não conhecide com o limite inferior do intervalo da imagem de $g(\xi)$ o mesmo acontecendo com o limite superior. Neste caso, usando as propriedades da integral simples temos:
$\int_a^b f(x)dx = -\int_d^c f(g(\xi))g'(\xi)d\xi$
De outra forma escrevemos:
$\int_a^b f(x)dx = \int_d^c f(g(\xi))|g'(\xi)|d\xi.$
E operaremos os limites inferiores e superiors das integrais como os limites inferiores e superiores dos domínios (intervalos) e a expressão acima vale tanto pra $g(\xi)$ crescente quanto decrescente. Vamos agora diretamente ao assunto dando uma argumentação heurística para a expressão da mudança de variáveis em integrais duplas. Para isto, consideremos a integral dupla $\int\int_D f(x, y)dxdy$ sobre uma região $D \in \mathbb{R}^2$ do plano $(x, y)$ e a transformação $(x, y) = T(u, v)$ tal que o domínio $D$ do plano $(x, y)$ seja a imagem do domínio $D'$ do plano $(u, v)$ (podemos expressar este fato como $D = T(D')$). Mais especificamente podemos escrever: $x = \hat{x}(u, v)$ e $y = \hat{y}(u, v)$ tomando uma partição para o domínio $D'$ no plano $(u, v)$ cobrindo-o com pequenos retângulos e usando a transformação $T$ podemos levar o pequeno retângulo $A'_{jk}$ na pequena figura plana $A_{jk} = T(A'_{jk})$ (ver **Fig 2.1** e **Fig 2.2**). A área do pequeno

OBSERVAÇÃO

heurística heu.rís.ti.ca sf (gr heuristiké) 1 Ciência ou arte do procedimento heurístico. 2 Método de ensino que consiste em que o educando chegue à verdade por seus próprios meios. 3 Ramo da ciência histórica que consiste na pesquisa dos documentos do passado.

retângulo no plano $(u, v)$ é $\Delta A'_{jk}$ a área da pequena figura $A_{jk}$ no plano $(x, j)$, e ai é que reside a argumentação heurística, será aproximada pela área do paralelogramo formado pelos vetores $\dfrac{\partial T}{\partial v}\Delta v_k$ e $\dfrac{\partial T}{\partial u}\Delta u_j$ e pelas linhas tracejadas (paralelas aos respectivos vetores). Do calculo vetorial temos:

$$\frac{\partial T}{\partial u}\Delta u_j = \frac{\partial \hat{x}}{\partial u}\Delta u_j\vec{i} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial u}\Delta u_j\vec{j} + 0\vec{k}.$$

$$\frac{\partial T}{\partial v}\Delta v_k = \frac{\partial \hat{x}}{\partial v}\Delta v_k\vec{i} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial v}\Delta v_k\vec{j} + 0\vec{k}$$

Vistos como vetores de $\mathbb{R}^3$ e a área do paralelogramo (ver Vetores e Geometria Analítica) dada pelo módulo do seguinte produto vetorial:

$$\Delta A_{jk} = \Big|\frac{\partial T}{\partial u}\Delta u_j \times \frac{\partial T}{\partial v}\Delta v_k\Big|.$$

Fazendo o cálculo do produto vetorial temos:

$$\frac{\partial T}{\partial u}\Delta u_j \times \frac{\partial T}{\partial v}\Delta v_k = det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial \hat{x}}{\partial u}\Delta u_j & \frac{\partial \hat{y}}{\partial u}\Delta u_j & 0 \\ \frac{\partial \hat{x}}{\partial v}\Delta v_k & \frac{\partial \hat{y}}{\partial v}\Delta v_k & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo os cálculos temos:

$$\frac{\partial T}{\partial u}\Delta u_j \times \frac{\partial T}{\partial v}\Delta v_k = \Big(\frac{\partial \hat{x}}{\partial u}\frac{\partial \hat{y}}{\partial v} - \frac{\partial \hat{x}}{\partial v}\frac{\partial \hat{y}}{\partial u}\Big)\Delta u_j\Delta v_k\vec{k}.$$

Tomando o módulo da expressão acima, para a área de $A_{jk}$, temos:

$$\Delta A_{jk} \approx \Big|\frac{\partial \hat{x}}{\partial u}\frac{\partial \hat{y}}{\partial v} - \frac{\partial \hat{x}}{\partial v}\frac{\partial \hat{y}}{\partial u}\Big|\Delta u_j\Delta v_k.$$

A expressão dentro do módulo é o determinante de uma matrix $2 \times 2$ conhecida como jacobiano da transformação $x = \hat{x}(u, v)$ e $y = \hat{y}(u, v)$ e denotado:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = det\begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial u} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial u} \\ \frac{\partial \hat{x}}{\partial v} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial v} \end{bmatrix} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial u}\frac{\partial \hat{y}}{\partial v} - \frac{\partial \hat{x}}{\partial v}\frac{\partial \hat{y}}{\partial u}.$$

Como a área do pequeno retângulo $A'_{jk}$ é dada por $\Delta A'_{jk} = \Delta u_j\Delta v_k$ temos:

$$\Delta A_{jk} \approx \Big|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\Big|\Delta A'_{jk}.$$

O que nos leva a considerar a seguinte fórmula para a mudança de

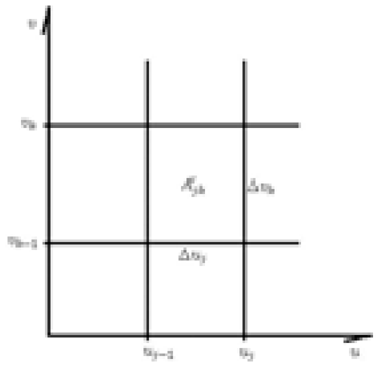


Figura 2.1: Plano $(u, v)$

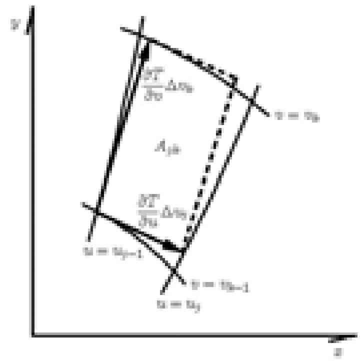


Figura 2.2: Plano $(x, y)$

variáveis en integrais duplas:

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_{D'} f(\hat{x}(u,v), \hat{y}(u,v))\Big|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big|dudv.$$

Que representa a mudança de variáveis na integral dupla pela transformação $(x, y) = T(u, v)$.

**OBS 2.1.** Para o caso particular da mudança de variáveis do sistema de coordenadas cartesianas para o sistema de coordenadas polares $(x, y) = T(r, \vartheta) = (r\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta))$ onde $x = \hat{x}(r, \vartheta) = r\cos(\vartheta)$ e $y = \hat{y}(r, \vartheta) = r\sin(\vartheta)$, o jacobiano é dado por:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\vartheta)} = det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\hat{x}}{\partial r} & \dfrac{\partial\hat{y}}{\partial r} \\ \dfrac{\partial\hat{x}}{\partial\vartheta} & \dfrac{\partial\hat{y}}{\partial\vartheta} \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) \\ -r\sin(\vartheta) & r\cos(\vartheta) \end{bmatrix} = r.$$

Portanto o jacobiano da transformação $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\vartheta)} = r$ a mudança de variáveis na integral dupla toma a forma:

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_{D'} f(r\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta))rdrd\vartheta.$$

**OBS 2.2.** Daremos aqui um método prático para determinar os limites de integração em uma integral dupla sobre domínio não retangular da forma: $D$ em coordenadas polares.

**Passo 1** Fazer um desenho da região $D$ (**Fig. 2.3**), identificando as curvas que limitam a região $D$.

**Passo 2** Atravessar toda a região $D$ com um raio $\vec{\boldsymbol{r}}(\vartheta)$ orientado na direção positiva (**Fig. 2.3**)

**Passo 3** Deslocar o raio $\vec{\boldsymbol{r}}(\vartheta)$ na direção negativa do ângulo $\vartheta$ (direção horária) até tocar o ponto mais à negativa de $D$ marcando

NOTA

Por convenção a medida de ângulo tem sinal positivo quando o deslocamento é feito na **direção anti-horária**, direção contrária ao movimento dos ponteiros do relógio e tem sinal negativo quando o deslocamento é feito na **direção horária**, direção do movimento dos ponteiros do relógio.

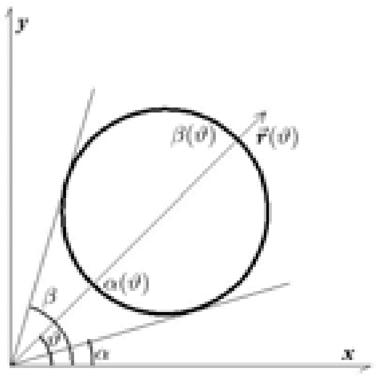



Figura 2.3: Determinação prática dos limites para $D$

o limite inferior de $\vartheta$ (ângulo $\alpha$ na **Fig. 2.3**).

**Passo 4** Deslocar o raio $\vec{\boldsymbol{r}}(\vartheta)$ na direção positiva do ângulo $\vartheta$ (direção anti-horária) até tocar o ponto mais à positiva de $D$ marcando o limite inferior de $\vartheta$ (ângulo $\beta$ na **Fig. 2.3**).

**Passo 5** Tomando um ponto qualquer $\vartheta \in (\alpha, \beta)$ passamos o raio $\vec{\boldsymbol{r}}(\vartheta)$ através de $D$ o limite inferior para a variável $r$ será a função $\alpha(\vartheta)$, ponto da curva onde o raio $\vec{\boldsymbol{r}}(\vartheta)$ entra na região $D$ e o limite superior para a variável $r$ será $\beta(\vartheta)$, ponto da curva onde o raio $\vec{\boldsymbol{r}}(\vartheta)$ sai da região $D$.

Nossa integral será efetuada assim:

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta \int_{\alpha(\vartheta)}^{\beta(\vartheta)} f(r\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta))rdrd\vartheta$$

## 2.3 Alguns Exemplos

Caros alunos, nesta seção ilustraremos, com dois exemplos, a mudança de variáveis em integrais duplas. A rigor, trataremos apenas de exemplos em coordenadas polares.

**Exemplo 2.1.** Determinar a integral dupla $\int\int_D f(x,y)dxdy$ onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 1\}$ e $f(x,y) = \exp(-x^2 - y^2)$. O domínio da função representa um quarto de disco (**Fig 2.4**).

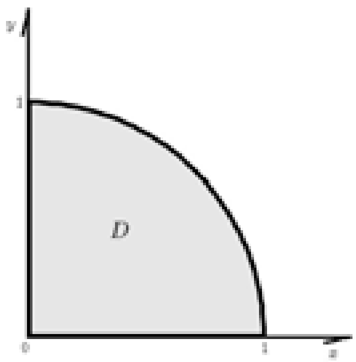



Figura 2.4: Gráfico do exemplo 1

**SOLUÇÃO:**

**Passo 1** Como o domínio $D$ é um quarto de disco, o mais adequado é utilizar o sistema de coordenadas polares. Podemos usar o método prático de determinação dos limites da integral dupla em coordenadas polares (**Fig 2.5**) e verificar que: $\alpha = 0$, $\beta = \dfrac{\pi}{2}$, $\alpha(\vartheta) = 0$ e $\beta(\vartheta) = 1$.

Neste caso podemos descrever o domínio como: $D' = \{(r,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq r \leq 1 \wedge 0 \leq \vartheta \leq \pi/2\}$. E como $x = r\cos(\vartheta)$ e $y = r\sin(\vartheta)$ e

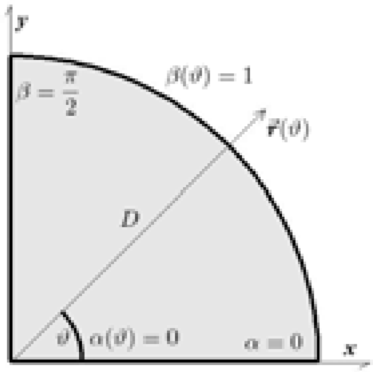



Figura 2.5: Gráfico do exemplo 1

o módulo do jacobiano da transformação é dado por: $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\vartheta)}\right| = r$.
Quanto a variável $r$ varia no intervalo $[0,1]$ independentemente de $\vartheta$ e a variável $\vartheta$ varia no intervalo $[0,\pi/2]$ ( a variação de ângulo no primeiro quadrante). Podemos reescrever a integral dupla como:
$I = \displaystyle\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^{\pi/2} f(r\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta))rd\vartheta dr$ Substituindo $f(x,y)$ temos:
$I = \displaystyle\int_0^1\int_0^{\pi/2} \exp(-(r\cos(\vartheta))^2 - (r\sin(\vartheta))^2)rd\vartheta dr$
Efetuando as simplificações temos:
$I = \displaystyle\int_0^1\int_0^{\pi/2} \exp(-r^2)rd\vartheta dr$
**Passo 2** Integrando primeiramente na variável $\vartheta$ e como o integrando não depende de $\vartheta$ temos:
$I = \displaystyle\int_0^1 \exp(-r^2)\vartheta\Big|_0^{\pi/2} rdr$
Substituindo os limites de integração temos:
$I = \pi/2\displaystyle\int_0^1 \exp(-r^2)rdr$
**Passo 3** A última integral (variável $r$) podemos efetuar por mudança de variáveis pondo $\xi = r^2$ deste modo temos: $d\xi = 2rdr$ ou seja $rdr = -\dfrac{1}{2}d\xi$ e os limites $r\begin{cases}1\\0\end{cases}$ e $\xi\begin{cases}1\\0\end{cases}$. Daí, a integral

passará a forma:
$I = \pi/4 \int_0^1 \exp(-\xi)d\xi$
Cuja integração é fácil e da forma:
$I = \pi/4 - \exp(-\xi)\Big|_0^1$
Efetuando os cálculo temos:
$I = \frac{\pi}{4}(1 - \exp(-1))$ □

Vamos agora, diretamente ao nosso segundo exemplo. Trata-se de uma curva já conhecida de vocês (Cálculo II) a lemniscata.

**Exemplo 2.2.** Determinar a área da região $D$, a parte da lemniscata, $r = \sqrt{\cos(2\vartheta)}$, que situa-se no primeiro quadrante. ver parte cinza da (**Fig 2.6**).

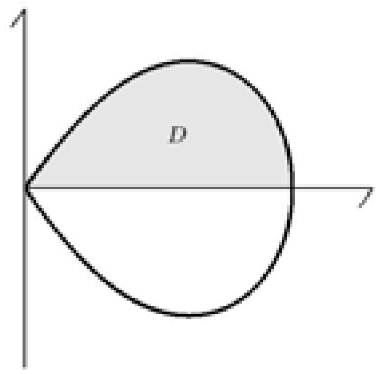



Figura 2.6: Gráfico do exemplo 2

**SOLUÇÃO:**

**Passo 1** Como o domínio $D$ é um quarto de uma lemniscata, o mais adequado é utilizar o sistema de coordenadas polares. Podemos usar o método prático de determinação dos limites da integral dupla em coordenadas polares (**Fig 2.7**) e verificar que: $\alpha = 0$,

$\beta = \dfrac{\pi}{4}$, $\alpha(\vartheta) = 0$ e $\beta(\vartheta) = \sqrt{\cos(2\vartheta)}$.

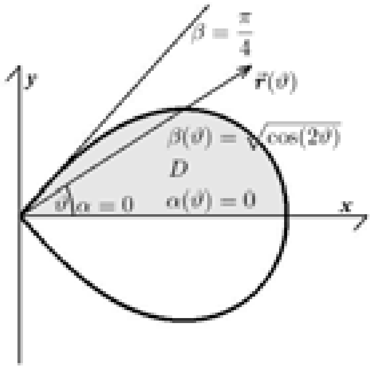



Figura 2.7: Gráfico do exemplo 2

Neste caso podemos descrever o domínio como: $D' = \{(r, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq \vartheta \leq \pi/4 \wedge 0 \leq r \leq \sqrt{\cos(2\vartheta)}\}$. E como, neste exemplo, queremos calcular área temos que $f(x, y) = 1$ e em coordenadas polares podemos escrever na forma da seguinte integral dupla:

$$A = \int\int_D dxdy = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{\cos(2\vartheta)}} r dr d\vartheta$$

Integrando em $r$ temos:

$$A = \int_0^{\pi/4} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{\cos(2\vartheta)}} d\vartheta$$

Substituindo os limites de integração temos:

$$A = \int_0^{\pi/4} \frac{\left(\sqrt{\cos(2\vartheta)}\right)^2}{2} d\vartheta$$

Simplificando o integrando temos:

$$A = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos(2\vartheta)}{2} d\vartheta$$

Integrando na variável $\vartheta$ temos:

$$A = \frac{\sin(2\vartheta)}{4}\Big|_0^{\pi/4}$$

Substituindo os limites de integração temos:

$$A = \frac{\sin(\pi/2) - \sin(0)}{4}$$

Portanto:

$$A = \frac{1}{4} \ \square$$

**OBS 2.3.** Caros alunos, é muito importante neste ponto uma revisão cuidadosa e detalhada dos dois exemplos dados acima. Efetuar uma mudança de varáveis em integrais duplas não é tão simples quanto efetuar uma mudança de variáveis em integrais simples.

## 2.4 Conclusão

Na aula de hoje, vimos que a mudança de variáveis em integrais dupla, nos permite, facilitar o cálculo das ditas integrais quando trabalhamos com domínios de integração de geometrias específicas, como a induzida pelas coordenadas polares.

## RESUMO

**Mudança de Variáveis em Integrais Duplas**

Consideramos a transformação $(x, y) = T(u, v)$ tal que o domínio $D$ do plano $(x, y)$ seja transformado no domínio $D'$ do plano $(u, v)$ $(D = T(D'))$ e mais especificamente $x = \hat{x}(u, v)$ e $y = \hat{y}(u, v)$. Definindo o jacobiano da transformação, denotado $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$, por:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \hat{x}}{\partial u} & \dfrac{\partial \hat{y}}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \hat{x}}{\partial v} & \dfrac{\partial \hat{y}}{\partial v} \end{bmatrix} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial u}\frac{\partial \hat{y}}{\partial v} - \frac{\partial \hat{x}}{\partial v}\frac{\partial \hat{y}}{\partial u}.$$

Vale então,a seguinte fórmula para a mudança de variáveis en integrais duplas:

$$\int\int_D f(x, y)dxdy = \int\int_{D'} f(\hat{x}(u, v), \hat{y}(u, v))\Big|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\Big|dudv.$$

**Sistema de Coordenadas Polares**

Para o caso particular da mudança de variáveis do sistema de coordenadas cartesianas para o sistema de coordenadas polares no cálculo de integrais duplas temos:
$(x, y) = T(r, \vartheta) = (r\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta))$ onde $x = \hat{x}(r, \vartheta) = r\cos(\vartheta)$ e $y = \hat{y}(r, \vartheta) = r\sin(\vartheta)$.
Vale a seguinte transformação de variáveis:

$$\int\int_D f(x, y)dxdy = \int\int_{D'} f(r\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta))rdrd\vartheta.$$

**Determinação dos Limites de Integração em Coordenadas Polares**

Daremos aqui um método prático para determinar os limites de integração em uma integral dupla sobre domínio não retangular da forma: $D$ em coordenadas polares.

**Passo 1** Fazer um desenho da região $D$ (**Fig. 2.3**), identificando as curvas que limitam a região $D$.

**Passo 2** Atravessar toda a região $D$ com um raio $\vec{\boldsymbol{r}}(\vartheta)$ orientado na direção positiva (**Fig. 2.3**)

**Passo 3** Deslocar o raio $\vec{\boldsymbol{r}}(\vartheta)$ na direção negativa do ângulo $\vartheta$ (direção horária) até tocar o ponto mais à negativa de $D$ marcando o limite inferior de $\vartheta$ (ângulo $\alpha$ na **Fig. 2.3**).

**Passo 4** Deslocar o raio $\vec{\boldsymbol{r}}(\vartheta)$ na direção positiva do ângulo $\vartheta$ (direção anti-horária) até tocar o ponto mais à positiva de $D$ marcando o limite inferior de $\vartheta$ (ângulo $\beta$ na **Fig. 2.3**).

**Passo 5** Tomando um ponto qualquer $\vartheta \in (\alpha, \beta)$ passamos o raio $\vec{\boldsymbol{r}}(\vartheta)$ através de $D$ o limite inferior para a variável $r$ será a função $\alpha(\vartheta)$, ponto da curva onde o raio $\vec{\boldsymbol{r}}(\vartheta)$ entra na região $D$ e o limite superior para a variável $r$ será $\beta(\vartheta)$, ponto da curva onde o raio $\vec{\boldsymbol{r}}(\vartheta)$ sai da região $D$.

Nossa integral será efetuada assim:

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta \int_{\alpha(\vartheta)}^{\beta(\vartheta)} f(r\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta))rdrd\vartheta$$

## PRÓXIMA AULA

Em nossa próxima aula veremos algumas das inúmeras aplicações da integral dupla. Nossa atenção estará voltada para o cálculo do centro de massa de perfis planos bem como no cálculo de seus momentos de inércia.

## ATIVIDADES

Deixamos como atividades as seguintes questões.

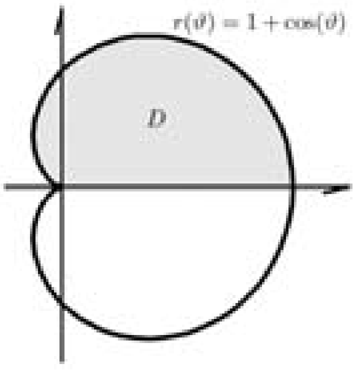



Figura 2.8: Atividade 1

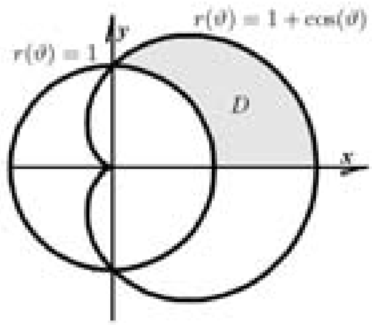



Figura 2.9: Atividade 2

**ATIV. 2.1.** Determine a área da parte da cardióide $r(\vartheta) = 1 + \cos(\vartheta)$ que fica acima do eixo dos $x$ (**Fig 2.8**) que está em cinza.

**Comentário:** Volte ao texto e reveja com calma e atenção os exemplos acima, eles lhe servirão de guia.

**ATIV. 2.2.** Determine a área entre a cardióide $r(\vartheta) = 1+\cos(\vartheta)$ e o círculo $r(\vartheta) = 1$ acima do eixo do $x$ (**Fig 2.9**) que está em cinza.

**Comentário:** Volte ao texto e reveja com calma e atenção os exemplos acima, eles lhe servirão de guia.

## LEITURA COMPLEMENTAR

ÁVILA, Geraldo, Cálculo 3: Funções de Várias Variáveis, Livros Técnicos e Científicos Editora, São Paulo, $3^a$ edição, 1982.

LEITHOLD, Louis, O Cálculo com Geometria Analítica. Volume 2, Editora Harbra, 1994.

STEWART, James,Cálculo. Volume 3, $5^a$ edição, Editora CENGAGE Learning, 2009.

SWOKOWSKI, Earl E., Cálculo com Geometria Analítica, Volume 2, $2^a$ edição, Makron Books do Brásil SP, 1994.

THOMAS, George B., Cálculo, Volume 2, $10^a$, Addilson Wesley, 2003.

KAPLAN, Wilfred, Cálculo Avançado Vol.1 e vol.2 Editora Edgard Blücher 1991.// SPIEGEL, Murray R. Cálculo Avançado, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1971.

BOUCHARA, Jacques, Cálculo Integral Avançado, EDUSP, 2006.