AULA

Algumas Aplicações da Integral Dupla

3

META:

Apresentar algumas aplicações das integrais duplas de funções de valores reais e domínio em $\mathbb{R}^2$.

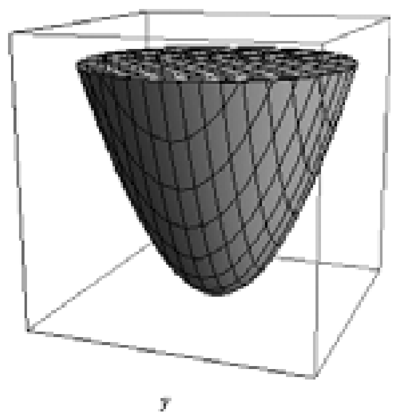
OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Determinar área, massa, centro de massa, momento de massa e momento de inércia de figuras planas usando integrais duplas de funções de valores reais e domínio em $\mathbb{R}^2$.

PRÉ-REQUISITOS

Os conhecimentos de integrais de funções de valores reais com domínio em $\mathbb{R}$, da disciplina Cálculo I, curvas em R^2 e coordenadas polares da disciplina Cálculo II e integrais duplas aula 01 e aula 02.



3.1 Introdução

Caros alunos nesta terceira aula do nosso curso de Cálculo III com o tema "Algumas Aplicações das Integrais Duplas". Dentre as inúmeras aplicações da integral dupla, veremos apenas duas pelo pouco tempo que dispomos. Veremos apenas como usar as integrais duplas para calcular a massa de uma região plana dada sua distribuição de densidade e como calcular seu centro de gravidade. Para outras aplicações recomendo uma busca na INTERNET

3.2 Preliminares

Consideraremos uma região $D \subset \mathbb{R}^2$ finita, com uma distribuição de densidade mássica superficial (massa por unidade de superfície) $\varrho(x, y), \forall (x, y) \in D$.

Determinação da massa

Para determinar a massa consideremos uma função Φ definida em um domínio retangular $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\}$ tal que $D \subset R$ e $\Phi(x, y) = \begin{cases} \varrho(x, y) & ,(x, y) \in D \\ 0 & ,(x, y) \notin D \end{cases}$.
Considerando a uma partição para o retângulo R dada por $P = P[R] = P[a, b] \times P[c, d]$, o produto cartesiano das partições $P[a, b]$ e $P[c, d]$ onde $P[a, b] = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_j, x_{j+1}, \ldots,\ x_m = b\}$ e $P[c, d] = \{y_0 = c, y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_n = d\}$. Tomamos um ponto $(\xi_j, \zeta_k) \in [x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k]$ em cada pequeno retângulo e definimos a seguinte soma de Riemann:

$$S_{mn} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \Phi(\xi_j, \zeta_k) \Delta A_{jk}.$$

A massa da região D, denotada $m(D)$, será a integral dupla da função $\varrho(x,y)$ sobre o domínio $D \subset \mathbb{R}^2$, denotada $\displaystyle\int\int_D \varrho(x,y)dxdy$ será então definida como o seguinte limite:

$$m(D) = \int\int_D \varrho(x,y)dxdy \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{|P|\to 0} S_{mn}$$

.

OBS 3.1. Para a determinação do peso da região D toma-se a seguinte soma de Riemann:

$$S_{mn} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} g(\xi_j,\zeta_k)\Phi(\xi_j,\zeta_k)\Delta A_{jk}$$

onde $g(\xi_j,\zeta_k)$ é a aceleração da gravidade no ponto (ξ_j,ζ_k). E o peso da região D, denotado $p(D)$, será dado pela integral dupla:

$$p(D) = \int\int_D g(x,y)\varrho(x,y)dxdy \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{|P|\to 0} S_{mn}$$

.

Determinação do Momento de Massa

Usando as mesmas considerações acima para o cálculo da massa de uma região D limitada com distribuição de densidade $\varrho(x,y)$. Para calcular o momento de massa de um pequeno retângulo com relação ao eixo y tomamos o seguinte produto $\xi_j\Phi(\xi_j,\zeta_k)\Delta A_{jk}$. O momento de massa total em relação ao eixo y para a região D será aproximado pelo limite da soma de Riemann:

$$S_{mn} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \xi_j\Phi(\xi_j,\zeta_k)\Delta A_{jk}$$

.

O momento de massa da região D em relação ao eixo y será dada pelo limite:

$$M_y(D) = \int\int_D x\varrho(x,y)dxdy \overset{\text{def}}{=} \lim_{|P|\to 0} S_{mn}$$

.

De forma semelhante chega-se ao momento de massa da região D em relação ao eixo x tomando-se a seguinte soma de Riemann:

$$S_{mn} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \zeta_k \Phi(\xi_j, \zeta_k)\Delta A_{jk}$$

.

O momento de massa da região D em relação ao eixo x será dada pelo limite:

$$M_x(D) = \int\int_D y\varrho(x,y)dxdy \overset{\text{def}}{=} \lim_{|P|\to 0} S_{mn}$$

.

Determinação do Centro de Massa

O centro de massa de uma região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ finita, com uma distribuição de densidade mássica superficial $\varrho(x,y), \forall(x,y) \in D$, é o ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ definido por:

$$\bar{x} = \frac{M_y(D)}{m(d)} = \frac{\displaystyle\int\int_D x\varrho(x,y)dxdy}{\displaystyle\int\int_D \varrho(x,y)dxdy}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x(D)}{m(d)} = \frac{\displaystyle\int\int_D y\varrho(x,y)dxdy}{\displaystyle\int\int_D \varrho(x,y)dxdy}$$

Determinação do Momento de Inércia

Usando as mesmas considerações acima para o cálculo da massa de uma região D limitada com distribuição de densidade $\varrho(x,y)$. Para calcular o momento de inércia de um pequeno retângulo com relação ao eixo y tomamos o seguinte produto $\xi_j^2\Phi(\xi_j,\zeta_k)\Delta A_{jk}$. O momento de inércia total em relação ao eixo y para a região D será aproximado pelo limite da soma de Riemann:

$$S_{mn} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\xi_j^2\Phi(\xi_j,\zeta_k)\Delta A_{jk}$$

.

O momento de inércia da região D em relação ao eixo y será dada pelo limite:

$$I_y(D) = \int\int_D x^2\varrho(x,y)dxdy \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{|P|\to 0} S_{mn}$$

.

De forma semelhante chega-se ao momento de inércia da região D em relação ao eixo x tomando-se a seguinte soma de Riemann:

$$S_{mn} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\zeta_k^2\Phi(\xi_j,\zeta_k)\Delta A_{jk}$$

.

O momento da região D em relação ao eixo x será dada pelo limite:

$$I_x(D) = \int\int_D y^2\varrho(x,y)dxdy \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{|P|\to 0} S_{mn}$$

.

O momento de inércia em relação a origem é dado pela seguinte integral dupla:

$$I_0(D) = \int\int_D (x^2 + y^2)\varrho(x, y)dxdy$$

.

3.3 Algumas Aplicações da Integral Dupla

Faremos duas aplicações da integral dupla ao cálculo do centro de massa de duas figuras planas. Na primeira usaremos o sistema de coordenadas cartesiano. Na segunda usaremos uma mudança de variáveis para o sistema de coordenadas polares.
Vamos aos nossos exemplos.

Exemplo 3.1. Para o primeiro exemplo desejamos determinar o centro de massa de uma região triangular D dada pela interseção das retas $x = 0$, $y = 0$ e a reta que passa pelos pontos $(0, a)$ e $(b, 0)$ com $a, b > 0$ (**Fig 3.1**), cuja densidade superficial de massa é constante $\varrho(x, y) = \varrho$.

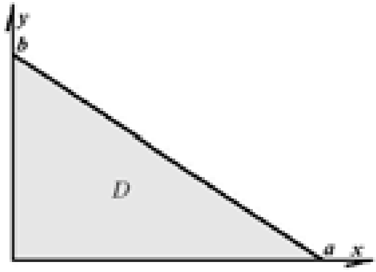


Figura 3.1: Gráfico do exemplo 1

SOLUÇÃO:

Começaremos por determinar os limites de integração inspecionando a (**Fig 3.1**) e verificando que $0 \leq x \leq a$ e $0 \leq y \leq b\big(1 - \dfrac{x}{a}\big)$.

Em segundo calcularemos a massa da região D, $m(D)$ e os respectivos momentos de massa com relação ao eixo x e ao eixo y $M_x(D)$ e $M_y(D)$ respectivamente.

Passo 1 determinar a massa $m(D)$, dada pela integral dupla:

$$m(D) = \int\int_D \varrho(x,y)dxdy = \int_0^a \int_0^{b(1-x/a)} \varrho dydx$$

Integrando em y temos:

$$m(D) = \varrho \int_0^a y\Big|_0^{b(1-x/a)} dx$$

Substituindo os limites de integração temos:

$$m(D) = \varrho \int_0^a b\big(1 - \frac{x}{a}\big)dx$$

Integrando em x temos:

$$m(D) = \varrho b\big(x - \frac{x^2}{2a}\big)\Big|_0^a$$

Substituindo os limites de integração temos:

$$m(D) = \varrho b\big(a - \frac{a^2}{2a}\big)$$

Simplificando temos:

$$m(D) = \varrho \frac{ab}{2}$$

Passo 2 calcular o momento de massa $M_x(D)$ dado pela integral dupla:

$$M_x(D) = \int\int_D \varrho(x,y)ydxdy$$

Substituindo os limites temos:

$$M_x(D) = \int\int_D \varrho(x,y)ydxdy = \int_0^a \int_0^{b(1-x/a)} \varrho ydydx$$

Integrando em y teremos:

$$M_x(D) = \int_0^a \varrho \frac{y^2}{2}\Big|_0^{b(1-x/a)} dx$$

Substituindo os limites de integração temos:

$$M_x(D) = \int_0^a \frac{(b(1-x/a))^2}{2} dx$$

Simplificando o integrando temos:

$M_x(D) = \varrho \int_0^a (\frac{b^2}{2} - \frac{b^2 x}{a} + \frac{b^2 x^2}{2a^2}) dx$
Integrando em x teremos:
$M_x(D) = \varrho(\frac{b^2 x}{2} - \frac{b^2 x^2}{2a} + \frac{b^2 x^3}{6a^2})\Big|_0^a$
Substituindo os limites de integração temos:
$M_x(D) = \varrho(\frac{b^2 a}{2} - \frac{b^2 a^2}{2a} + \frac{b^2 a^3}{6a^2})$
Simplificando as frações temos:
$M_x(D) = \varrho \frac{b^2 a}{6}$

Passo 3 calcular o momento de massa $M_y(D)$ dado pela integral dupla:
$M_y(D) = \int \int_D \varrho(x, y) x dx dy$
$M_y(D) = \int \int_D \varrho(x, y) x dx dy$
Substituindo os limites temos:
$M_y(D) = \int \int_D \varrho(x, y) x dx dy = \int_0^a \int_0^{b(1-x/a)} \varrho x dy dx$
Integrando em y teremos:
$M_y(D) = \int_0^a \varrho xy\Big|_0^{b(1-x/a)} dx$
Substituindo os limites de integração temos:
$M_y(D) = \int_0^a \varrho bx\big(1 - \frac{x}{a}\big) dx$
Integrando em x teremos:
$M_y(D) = \varrho b(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3a})\Big|_0^a$
Substituindo os limites de integração temos:
$M_y(D) = \varrho b(\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3a})$
Simplificando as frações temos:
$M_y(D) = \varrho \frac{ba^2}{6}$

Passo 4 Determinar o centro de massa de D pelas fórmulas:
$\bar{x} = \frac{M_y(D)}{m(D)}$ e $\bar{y} = \frac{M_x(D)}{m(D)}$.
Usando os resultados anteriores temos:

$\bar{x} = \dfrac{\varrho\dfrac{ba^2}{6}}{\varrho\dfrac{ab}{2}}$ e $\bar{y} = \dfrac{\varrho\dfrac{b^2a}{6}}{\varrho\dfrac{ab}{2}}$
Simplificando temos:
$\bar{x} = \dfrac{a}{3}$ e $\bar{y} = \dfrac{b}{3}$ $\square$

Como segundo exemplo usaremos uma região em que o sistema de coordenadas polares facilita os cálculos.

Exemplo 3.2. Para o segundo exemplo desejamos determinar o centro de massa de uma região D dada pelo quarto da coroa circular de raio interno a e raio externo b que situa-se no primeiro quadrante (**Fig 3.2**), cuja densidade superficial de massa é constante $\varrho(x, y) = \varrho$.

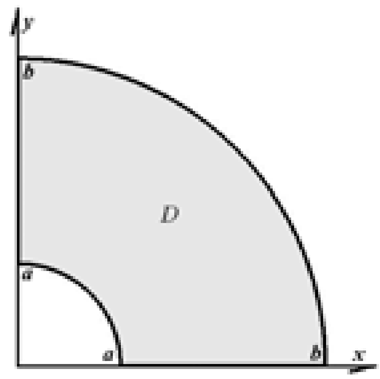


Figura 3.2: Gráfico do exemplo 2

SOLUÇÃO:

Começaremos por determinar os limites de integração inspecionando a (**Fig 3.2**) e verificando que $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$ e $a \leq r \leq b$.
Em segundo calcularemos a massa da região D, $m(D)$ e os respectivos momentos de massa com relação ao eixo x e ao eixo y $M_x(D)$ e $M_y(D)$ respectivamente.

Passo 1 determinar a massa $m(D)$, dada pela integral dupla:
$m(D) = \int\int_D \varrho(x,y)dxdy = \int_0^{\pi/2}\int_a^b \varrho r dr d\vartheta$
Integrando em r temos:
$m(D) = \int_0^{\pi/2} \varrho \frac{r^2}{2}\Big|_a^b d\vartheta$
Substituindo os limites de integração temos:
$m(D) = \varrho \int_0^{\pi/2} (\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2})d\vartheta$
Integrando em ϑ temos:
$m(D) = \varrho(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2})\vartheta\Big|_0^{\pi/2}$
Substituindo os limites de integração temos:
$m(D) = \frac{1}{4}\varrho\pi(b^2 - a^2)$
Passo 2 calcular o momento de massa $M_x(D)$ dado pela integral dupla:
$M_x(D) = \int\int_D \varrho(x,y)ydxdy$
Substituindo os limites em coordenadas polares e sabendo que $y = r\sin(\vartheta)$ temos:
$M_x(D) = \int\int_D \varrho(x,y)ydxdy = \int_0^{\pi/2}\int_a^b \varrho r\sin(\vartheta)rdrd\vartheta$
Integrando em r temos:
$M_x(D) = \varrho\int_0^{\pi/2} \sin(\vartheta)\frac{r^3}{3}\Big|_a^b d\vartheta$
Substituindo os limites de integração temos:
$M_x(D) = \varrho\int_0^{\pi/2} \sin(\vartheta)(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3})d\vartheta$
Integrando em ϑ temos:
$M_x(D) = \varrho(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3})(-\cos(\vartheta))\Big|_0^{\pi/2}$
Substituindo os limites de integração temos:
$M_x(D) = \varrho(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3})(-\cos(\pi/2) - -\cos(0))$
Simplificando temos:
$M_x(D) = \frac{1}{3}\varrho(b^3 - a^3)$
Passo 3 calcular o momento de massa $M_y(D)$ dado pela integral dupla:

$M_y(D) = \int\int_D \varrho(x,y)xdxdy$

$M_y(D) = \int\int_D \varrho(x,y)xdxdy$

Substituindo os limites em coordenadas polares e sabendo que $x = r\cos(\vartheta)$ temos:

$M_x(D) = \int\int_D \varrho(x,y)ydxdy = \int_0^{\pi/2}\int_a^b \varrho r\cos(\vartheta)rdrd\vartheta$

Integrando em r temos:

$M_x(D) = \varrho\int_0^{\pi/2} \cos(\vartheta)\frac{r^3}{3}\Big|_a^b d\vartheta$

Substituindo os limites de integração temos:

$M_x(D) = \varrho\int_0^{\pi/2} \cos(\vartheta)(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3})d\vartheta$

Integrando em ϑ temos:

$M_x(D) = \varrho(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3})(\sin(\vartheta))\Big|_0^{\pi/2}$

Substituindo os limites de integração temos:

$M_x(D) = \varrho(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3})(\sin(\pi/2) - \sin(0))$

Simplificando temos:

$M_x(D) = \frac{1}{3}\varrho(b^3 - a^3)$

Passo 4 Determinar o centro de massa de D pelas fórmulas:

$\bar{x} = \frac{M_y(D)}{m(D)}$ e $\bar{y} = \frac{M_x(D)}{m(D)}$.

Usando os resultados anteriores temos:

$\bar{x} = \bar{y} = \frac{\frac{1}{3}\varrho(b^3 - a^3)}{\frac{1}{4}\varrho\pi(b^2 - a^2)}$

Levando em conta que $b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ba + a^2)$ e $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$ temos:

$\bar{x} = \bar{y} = \frac{\frac{1}{3}\varrho(b-a)(b^2 + ba + a^2)}{\frac{1}{4}\varrho\pi(b-a)(b+a)}$

Simplificando temos:

$\bar{x} = \bar{y} = \frac{4}{3\pi}.\frac{b^2 + ba + a^2}{b+a}$ $\square$

3.4 Conclusão

Na aula de hoje, vimos que dentre as inúmeras aplicações da integral dupla, dentro da área da física destacamos, entre outras, algumas das mais importantes que são: a determinação da massa de uma região plana limitada por curvas, dada sua distribuição de densidade, o cálculo do momento de massa de uma região plana limitada por curvas, dada sua distribuição de densidade, o momento de inércia de uma região plana limitada por curvas, dada sua distribuição de densidade e o cálculo do centro de massa de uma região plana limitada por curvas, dada sua distribuição de densidade.

RESUMO

Dada uma região $D \in \mathbb{R}^2$ plana limitada com distribuição de densidade superficial $\varrho(x, y)$ podemos calcular a massa de D, o momento de massa em relação ao eixo x, o momento de massa relativo ao eixo y, o momento de inércia em relação ao eixo x, o momento de inércia relativo ao eixo y e momento de inércia relativo a origem, denotados respectivamente $m(D)$, $M_x(D)$, $M_y(D)$, $I_x(D)$, $I_y(D)$ e $I_0(D)$, pelas integrais duplas:

$m(D) = \displaystyle\int\int_D \varrho(x, y)dxdy$

$M_x(D) = \displaystyle\int\int_D \varrho(x, y)ydxdy$

$M_y(D) = \displaystyle\int\int_D \varrho(x, y)xdxdy$

$I_x(D) = \displaystyle\int\int_D \varrho(x, y)y^2dxdy$

$I_y(D) = \displaystyle\int\int_D \varrho(x, y)x^2dxdy$ e

$I_0(D) = \int\int_D \varrho(x,y)(x^2+y^2)dxdy$

Podemos também calcular o centro de massa, denotado $(\bar{x},\bar{y})$ usando as seguintes fórmulas:

$$\bar{x} = \frac{M_y(D)}{m(d)} = \frac{\displaystyle\int\int_D x\varrho(x,y)dxdy}{\displaystyle\int\int_D \varrho(x,y)dxdy}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x(D)}{m(d)} = \frac{\displaystyle\int\int_D y\varrho(x,y)dxdy}{\displaystyle\int\int_D \varrho(x,y)dxdy}$$

PRÓXIMA AULA

Em nossa próxima aula veremos as integrais triplas. Primeiramente definindo-as para funções de domínios retangulares através do limite de somas de riemann estendendo a definição para funções definidas em domínios não retangulares porém limitados.

ATIVIDADES

Deixamos como atividades dois problemas de determinação do centro de massa.

ATIV. 3.1. Determine o centro de massa da região D dada pela interseção das retas $y = 0$, $x = 1$ e $y = ax^2$ (**Fig 3.3**) região em cinza.

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção as demonstrações acima, elas lhe servirão de guia. Use para este caso coordenadas cartesianas.

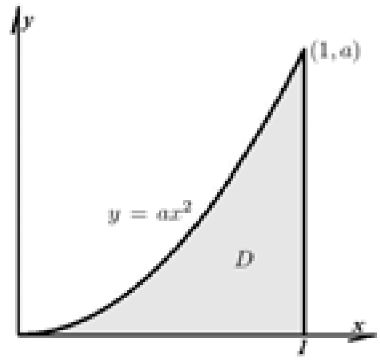


Figura 3.3: Atividade 1

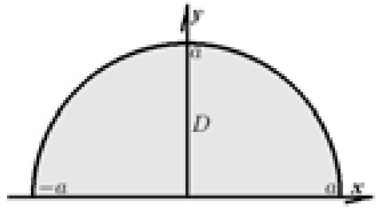


Figura 3.4: Atividade 2

ATIV. 3.2. Determine o centro de massa da região D dada pelo semi-círculo superior $x^2 + y^2 = a^2$ (**Fig 3.4**) região em cinza.

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção as demonstrações acima, elas lhe servirão de guia. Use para este caso coordenadas polares.

LEITURA COMPLEMENTAR

ÁVILA, Geraldo, Cálculo 3: Funções de Várias Variáveis, Livros Técnicos e Científicos Editora, São Paulo, 3ª edição, 1982.

LEITHOLD, Louis, O Cálculo com Geometria Analítica. Volume 2, Editora Harbra, 1994.

STEWART, James,Cálculo. Volume 3, 5ª edição, Editora CENGAGE Learning, 2009.

SWOKOWSKI, Earl E., Cálculo com Geometria Analítica, Volume 2, 2ª edição, Makron Books do Brásil SP, 1994.

THOMAS, George B., Cálculo, Volume 2, 10ª, Addilson Wesley, 2003.

KAPLAN, Wilfred, Cálculo Avançado Vol.1 e vol.2 Editora Edgard

Blücher 1991.// SPIEGEL, Murray R. Cálculo Avançado, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1971.

BOUCHARA, Jacques, Cálculo Integral Avançado, EDUSP, 2006.