AULA 4

# Integrais triplas

**META:**

Apresentar integrais triplas de funções de valores reais e domínio em $\mathbb{R}^3$.

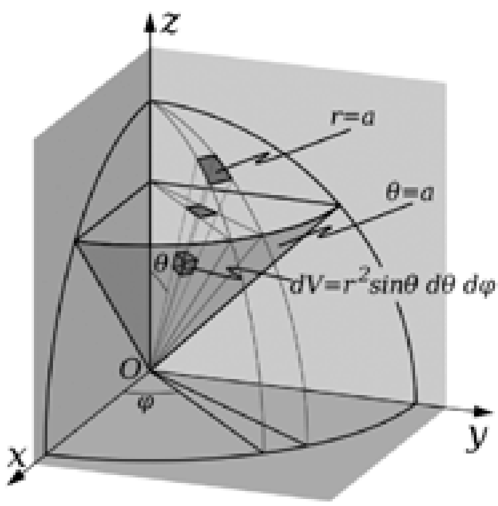
**OBJETIVOS:**

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Definir integral tripla e calcular algumas integrais triplas de funções de valores reais e domínio em $\mathbb{R}^3$.

**PRÉ-REQUISITOS**

Os conhecimentos de integrais de funções de valores reais com domínio em $\mathbb{R}$, da disciplina Cálculo I.



## 4.1 Introdução

Caros alunos a quarta aula do nosso curso de Cálculo III com o tema "Integrais Triplas". Bem como a integral dupla, vista na nossa primeira aula, a integração tripla, em essência, é uma extensão natural da integral simples vista em Cálculo I e definida como limite de somas de Riemann. Na prática, a integração tripla é dada por três integrações simples, cada uma efetuada sobre uma variável e considerando as demais como constantes. É o que denominamos de integrais interadas. As características e detalhes próprios das integrais triplas serão vistas ao longo do nosso curso, nas próximas três aulas.

**HISTÓRIA**

A primeira técnica sistemática documentada para o cálculo de integrais triplas no cálculo de volume foi o método da exaustão de Eudoxus cerca de 370AC. O maior avanço no cálculo de integrais triplas veio do Iraque, no século 11, na figura de Ibn AL-Haythan (conhecido na Europa por Alhazen ). Enquanto resolvia o que ficou conhecido como "Problema de Alhazen" (um problema de ótica) ele calculou o volume de um parabolsóide usando um método de indução. Wikipédia.

## 4.2 Integração Tripla: Domínios Paralelepípedais

Começamos por considerar uma função $\phi$ definida em um domínio paralelepipedal $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d \wedge e \leq z \leq f\}$. Formalmente $\phi : [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \mapsto \mathbb{R}$. Usando a imaginação, pensemos em $R$ retalhada por uma rede de planos paralelos aos planos coordenados e que dividem $R$ em pequenos paralelepípedos. Oficialmente, consideraremos três partições $P[a, b] = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_l = b\}$, $P[c, d] = \{y_0 = c, y_1, \ldots, y_j, y_{j+1}, \ldots, y_m = d\}$ e $P[e, f] = \{z_0 = e, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \ldots, z_n = f\}$ onde como visto em Cálculo I temos: $x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_l$, $y_0 < y_1 < \cdots < y_j < y_{j+1} < \cdots < y_m$ e $z_0 < z_1 < \cdots < z_k < z_{k+1} < \cdots < z_n$. Desta forma cada um dos pequenos subintervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $J_j =$

$[y_{j-1}, y_j]$ e $K_k = [z_{k-1}, z_k]$ têm comprimentos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ e $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, respectivamente. Definimos, agora, a uma partição para o paralelepípedo $R$ por $P = P[R] = P[a,b] \times P[c,d] \times P[e,f]$, o produto cartesiano das partições $P[a,b]$, $P[c,d]$ e $P[e,f]$. Os planos retalham a região $R$ em uma série de pequenos paralelepípedos $V_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k], 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n$. O volume de cada pequeno paralelepípedo é dado por $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$. Como tanto $\Delta x_i$ quanto $\Delta y_j$ quanto $\Delta z_k$ são diferentes de zero, o volume de cada pequeno paralelepípedo é também diferente de zero. Podemos então definir a norma da partição por: $|P| = \max\limits_{\substack{1 \leq i \leq l \\ 1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq n}} (\Delta V_{ijk})$, que corresponde ao maior volume entre todos os pequenos paralelepípedos.

Pausa para respirar que já vamos definir a integral tripla sobre domínios paralelepípedais. Para isto tomemos um ponto $(\xi_i, \zeta_j, \eta_k) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$ em cada pequeno paralelepípedo e definimos a seguinte soma de Riemann:

$$S_{lmn} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \phi(\xi_i, \zeta_j, \eta_k) \Delta V_{ijk}$$

A integral tripla da função $\phi(x,y,z)$ sobre o paralelepípedo $R$, denotada $\int\int\int_R \phi(x,y,z)dxdydz$ será então definida como o seguinte limite:

$$\int\int\int_R \phi(x,y,z)dxdydz \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{|P| \to 0} S_{lmn}$$

## 4.3 Integração Tripla: Domínios Não Paralelepípedais Limitados

Para definir a integral tripla de uma função $\phi : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ onde $D$ é não paralelepipedal limitado, começamos por considerar uma função $\Phi$ definida em um domínio paralelepipedal $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d \wedge e \leq z \leq f\}$ tal que $D \subset R$ e $\Phi(x,y,z) = \begin{cases} \phi(x,y,z) & ,(x,y,z) \in D \\ 0 & ,(x,y,z) \notin D \end{cases}$. Formalmente $\Phi : [a,b] \times [c,d] \times [e,f] \mapsto \mathbb{R}$ é uma extensão da função $\phi(x,y,z)$. Usando a imaginação, pensemos em $R$ coberta por uma rede de planos paralelos aos planos coordenados e que dividem $R$ em pequenos paralelepípedos e procedemos como na integral tripla sobre domínios paralelepípedais, considerando a uma partição para o paralelepípedo $R$ por $P = P[R] = P[a,b] \times P[c,d] \times [e,f]$, o produto cartesiano das partições $P[a,b]$, $P[c,d]$ e $P[e,f]$ onde $P[a,b] = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots,\ x_l = b\}$, $P[c,d] = \{y_0 = c, y_1, \ldots, y_j, y_{j+1}, \ldots, y_m = d\}$ e $P[c,d] = \{z_0 = e, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \ldots, z_n = f\}$. Do mesmo modo definimos a norma da partição por: $|P| = \max\limits_{\substack{1 \leq i \leq l \\ 1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq n}} (\Delta V_{ijk})$ onde $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ e $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$. Tomamos um ponto $(\xi_i, \zeta_j, \eta_k) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$ em cada pequeno paralelepípedo e definimos a seguinte soma de Riemann para a função estendida $\Phi(x,y,z)$:

$$S_{lmn} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \Phi(\xi_i, \zeta_j, \eta_k) \Delta V_{ijk}$$

A integral tripla da função $\phi(x, y, z)$ sobre o domínio $D \subset \mathbb{R}^3$, denotada $\int\int\int_D \phi(x, y, z)dxdydz$ será então definida como o seguinte limite:

$$\int\int\int_D \phi(x, y, z)dxdydz \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{|P| \to 0} S_{lmn}$$

. Observem que, semelhante ao caso das integrais duplas, apenas os pequenos paralelepípedos cujo ponto escolhido pertence ao domínio $D \subset \mathbb{R}^3$, contribuem para a soma de Riemann os demais têm contribuição nula visto que o ponto escolhido dentro destes estão fora de $D \subset \mathbb{R}^2$ e portanto $\Phi(\xi_i, \zeta_j, \eta_k) = 0$.

## 4.4 Interpretação Geométrica

Quando a função $\phi : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ é constante e igual a um $(\phi(x, y, z) = 1, \forall(x, y, z) \in D)$ e a região domínio $D$ é limitada, vemos que a soma de Riemann aproxima o volume da região $D$ e quanto maior for o refinamento da partição de $\mathbb{R}^3 \supset R \supset D$ melhor será a aproximação. Podemos então, interpretar a integral tripla $\int\int\int_D dxdydz$ como o volume da região $D \subset R^3$.

## 4.5 Integrais Iteradas

Dada uma função $\phi : R \mapsto \mathbb{R}$ onde $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$, do mesmo modo que na integral dupla, valem as integrais interadas:

1. $\displaystyle\int\int\int_R \phi(x, y, z)dxdydz = \int_a^b \Big[\int_c^d \Big[\int_e^f \phi(x, y, z)dz\Big]dy\Big]dx$
2. $\displaystyle\int\int\int_R \phi(x, y, z)dxdydz = \int_a^b \Big[\int_e^f \Big[\int_c^d \phi(x, y, z)dy\Big]dz\Big]dx$

3. $\int\int\int_R \phi(x,y,z)dxdydz = \int_c^d \Big[\int_a^b \Big[\int_e^f \phi(x,y,z)dz\Big]dx\Big]dy$

4. $\int\int\int_R \phi(x,y,z)dxdydz = \int_c^d \Big[\int_e^f \Big[\int_a^b \phi(x,y,z)dx\Big]dz\Big]dy$

5. $\int\int\int_R \phi(x,y,z)dxdydz = \int_e^f \Big[\int_c^d \Big[\int_a^b \phi(x,y,z)dx\Big]dy\Big]dz$

6. $\int\int\int_R \phi(x,y,z)dxdydz = \int_e^f \Big[\int_a^b \Big[\int_c^d \phi(x,y,z)dy\Big]dx\Big]dz$

Em outras palavras, quando o domínio da integral tripla é paralelepipedal a ordem de integração não importa.

## 4.6 Propriedades das Integrais Triplas

Como nosso curso é de Cálculo, apenas listaremos, sem demonstração, alguma das propriedades das integrais triplas. Caso desejem conhecer a demonstração de algumas destas propriedades, recomendo livros de Cálculo Avançado como os citados na bibliografia abaixo.

**Propriedade 4.6.** *Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ uma função de valores reais integrável em $D$ e $c \in \mathbb{R}$, então vale:*

$$\int\int\int_D cf(x,y,z)dxdydz = c\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz$$

**Propriedade 4.7.** *Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ duas funções de valores reais integráveis em $D$, então vale:*

$$\begin{aligned}\int\int\int_D (f+g)(x,y,z)dxdydz = &\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz\\ &+\int\int\int_D g(x,y,z)dxdydz\end{aligned}$$

**Propriedade 4.8.** *Sejam* $f : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ *uma função de valores reais integrável em* $D$ *tal que* $f(x,y,z) \geq 0, \forall (x,y,z) \in D$*, então vale:*

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz \geq 0$$

**Propriedade 4.9.** *Sejam* $f,g : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ *duas funções de valores reais integráveis em* $D$ *tais que* $f(x,y,z) \geq g(x,y,z), \forall (x,y,z) \in D$*, então vale:*

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz \geq \int\int\int_D g(x,y,z)dxdydz$$

**Propriedade 4.10.** *Seja* $f : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ *uma função de valores reais integrável em* $D$ *onde* $D = A \cup B$ *e* $A \cap B$ *é a união de um número finito de superfícies em* $\mathbb{R}^3$*, então vale:*

$$\begin{aligned}\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz = & \int\int\int_A f(x,y,z)dxdydz \\ & + \int\int\int_B f(x,y,z)dxdydz\end{aligned}$$

**OBS 4.1.** As duas primeiras propriedades diz respeito à "linearidade" do operador integral tripla. As terceira e quarta propriedades são denominadas "dominação" enquanto que a quinta propriedade é denominada "aditividade".

## 4.7 Exemplos

Nada mais natural que ilustrar um novo conceito com exemplos e, vamos aqui fazer exatamente isto. Ilustrar o conceito de integral tripla com dois exemplos. Antes porém, vale observar que a na prática uma integral tripla equivale a três integrais simples e neste caso uma pergunta fica no ar. Qual das duas variáveis $x$, $y$ ou $z$ integraremos primeiro? Muito bem, a resposta é dada pela propria expressão da integral tripla. Isto é, na integral $\int\int\int_R f(x,y,z)dxdydz$ primeiramente integramos na variável $x$, depois na variável $y$ e por último na variável $z$. Já na integral $\int\int\int_R f(x,y,z)dzdydx$ primeiramente integramos na variável $z$, depois na variável $y$ e por último na variável $x$.

**Exemplo 4.1.** Considere a função $f : [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 + y^2 + z^2$ e determine a integral tripla $I = \int\int_R f(x,y,z)dxdydz$ sobre a região $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 1\}$.

**SOLUÇÃO:**

**Passo 1** colocaremos os limites de integração que representam a região $R$ dada, segundo a ordem de integração:

$I = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$

**Passo 2** integraremos na variável $x$ considerando as variáveis $y$ e $z$ como constantes:

$I = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} + y^2x + z^2x\right) dydz$

Substituindo os limites de integração temos:

$I = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} + y^2(1-0) + z^2(1-0)\right) dydz$

Efetuando os cálculos temos:

$I = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + y^2 + z^2\right) dy$

**Passo 3** integraremos na variável $y$ considerando a variável $x$ como constante:

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}y + \frac{y^3}{3} + z^2 y\right)\Big|_0^1 dz$$

Substituindo os limites de integração temos:

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}(1-0) + \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} + z^2(1-0)\right) dz$$

Efetuando os cálculos temos:

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + z^2\right) dz$$

**Passo 4** último passo, integraremos na variável $z$:

$$I = \left(\frac{1}{3}z + \frac{1}{3}z + \frac{z^3}{3}\right)\Big|_0^1$$

Substituindo os limites de integração temos:

$$I = \left(\frac{1}{3}(1-0) + \frac{1}{3}(1-0) + \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)$$

Efetuando os cálculos temos:

$$I = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 \ \square$$

**OBS 4.2.** Daremos aqui um método prático para determinar os limites de integração em uma integral tripla sobre domínio não retangular da forma: $D$.

**Passo 1** Fazer um desenho da região $D$. (**Fig. 4.1**) identificando as superfícies inferior $a(x, y)$ e superior $b(x, y)$ que limitam a região $D$, bem como a

sombra projetada no plano $xy$ por $D$, denotada $D^*$ e identificar as curvas limites da região $D^*$ $a(x)$ curva inferior e $b(x)$ curva superior, como na AULA01.

**Passo 2** Atravessar toda a região $D^*$ e o eixo $x$ com um segmento de reta paralelo e orientado na direção positiva ao eixo $y$ (segmento $r$ na **Fig. 4.1**)

**Passo 3** Deslocar o segmento de reta $r$ paralelo ao eixo $y$ na direção negativa do eixo $x$ até tocar o ponto mais à esquerda de $D^*$

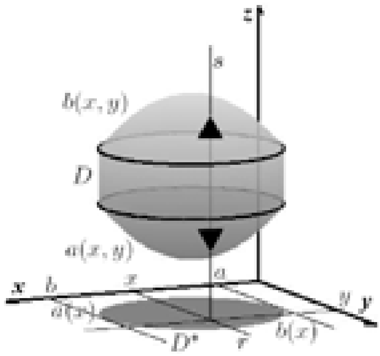



Figura 4.1: Determinação prática dos limites para $D$

marcando o limite inferior de $x$ (ponto $a$ na **Fig. 4.1**).

**Passo 4** Deslocar o segmento de reta $r$ paralelo ao eixo $y$ na direção positiva do eixo $x$ até tocar o ponto mais à direita de $D^*$ marcando o limite superior de $x$ (ponto $b$ na **Fig. 4.1**).

**Passo 5** Tomando um ponto qualquer $x \in (a, b)$ passamos o segmento de reta $r$ através da região $D^*$ paralelo ao eixo $y$ na direção positiva do eixo $x$. O limite inferior para a variável $y$ será a função $a(x)$, ponto da curva onde o segmento entra na região $D^*$ e o limite superior para a variável $y$ será $b(x)$, ponto da curva onde o segmento de reta sai da região $D^*$.

**Passo 6** Tomando um ponto qualquer $(x, y) \in D^*$ passamos o segmento de reta $s$ através da região $D$, paralelo ao eixo $z$ orientado na direção positiva de $z$. O limite inferior para a variável $z$ será a função $a(x, y)$, ponto da superfície onde o segmento entra na região $D$ e o limite superior para a variável $z$ será $b(x, y)$, ponto da superfície onde o segmento de reta sai da região $D$.

Nossa integral será efetuada assim:

$$\int\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_{a(x)}^{b(x)} \int_{a(x,y)}^{b(x,y)} f(x,y,z)dzdydx$$

Vamos diretamente para um segundo exemplo de integral dupla sobre domínios não retangulares. A saber:

**Exemplo 4.2.** Considere a função $f : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = xyz$ e determine a integral dupla $I = \int\int_D f(x,y,z)dxdydz$ sobre a região $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x^2 \wedge 0 \leq z \leq 1\}$, (**Fig. 4.2**).

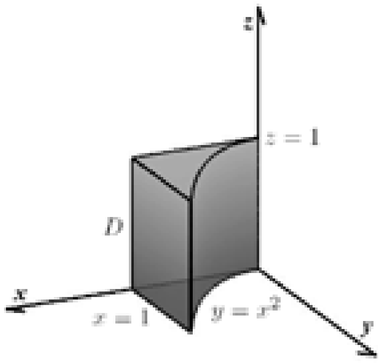



Figura 4.2: Domínio $D$ para o exemplo 2

**SOLUÇÃO:**

**Passo 1** faremos o desenho das superfícies que determinam os limites para a região $D$. A saber $x = 0$, $x = 1$, $y = x^2$, $x = 0$ e $z = 1$ (**Fig. 4.1**).

Usando o processo prático exposto acima determinamos os limites de integração. A saber: $a = 0$, $b = 1$, $a(x) = 0$, $b(x) = x^2$, $a(x,y) = 0$ e $b(x,y) = 1$.

$I = \int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^1 xyzdzdydx$

**Passo 2** integraremos na variável $z$ considerando a variável $y$ e $x$ como uma constante:

$I = \int_0^1 \int_0^{x^2} \left( xy\frac{z^2}{2}\Big|_0^1 \right) dydx$

Substituindo os limites de integração temos:

$I = \int_0^1 \int_0^{x^2} \left( xy\frac{1^2}{2} - xy\frac{0^2}{2}) \right) dydx$

Efetuando os cálculos temos:

$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{x^2} xydydx$

**Passo 3** integraremos na variável $y$ considerando a variável $x$ constante temos:

$I = \int_0^1 x\frac{y^2}{2}\Big|_0^{x^2} dx$

Substituindo os limites de integração temos:

$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \left( x\frac{(x^2)^2}{2} - x\frac{0^2}{2} \right) dx$

Efetuando os cálculos temos:

$I = \frac{1}{4}\int_0^1 x^5 dx$

Integrando , finalmente , na variável $x$ temos:

$I = \frac{1}{4}\left( \frac{x^6}{6}\Big|_0^1 \right)$

Substituindo os limites de integração temos:

$I = \frac{1}{4}\left( \frac{1^6}{6} - \frac{0^6}{6} \right)$

Efetuando os cálculos temos: $I = \dfrac{1}{24}$ □

## 4.8 Conclusão

Na aula de hoje, vimos que a integral tripla é uma extensão natural do conceito de integral simples visto em Cálculo I e também uma extensão natural do conceito de integral dupla, vista em nossa primeira aula do curso de Cálculo III. E se por um lado a integral simples pode ser interpretada como a área sob a curva descrita por função positiva $f(x)$ em um domínio $[a, b]$ e a integral dupla pode ser vista como o volume de um prisma reto limitado superiormente pela a superfície descrita por uma função positiva $f(x, y)$ e limitado inferiormente pelo domínio $[a, b] \times [c, d]$, a integral tripla só tem interpretação geométrica no caso simples em que $f(x, y, z) = 1$. Neste caso a integral tripla representa o volume da região limitada $D \subset \mathbb{R}^3$.

## RESUMO

**Integração Tripla: Domínios Paralelepipedais**

Considerando uma função $\phi$ definida em um domínio paralelepipedal $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d \wedge e \leq z \leq f\}$. Podemos dividir $R$ em pequenos paralelepípedos considerando os planos paralelos ao planos cartesianos gerados pela paartição $P = P[R] = P[a, b] \times P[c, d] \times [e, f]$, o produto cartesiano das partições $P[a, b]$, $P[c, d]$ e $P[e, f]$ onde $P[a, b] = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_l = b\}$, $P[c, d] = \{y_0 = c, y_1, \ldots, y_j, y_{j+1}, \ldots, y_m = d\}$ e $P[c, d] = \{z_0 = e, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \ldots, z_n = f\}$. Os planos retalham a região $R$ em uma série de pequenos paralelepípedos $V_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k], 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n$. O volume de cada pequeno paralelepípedo é dado por $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$. A norma da partição fica estabelecida como: $|P| = \max_{\substack{1 \leq i \leq l \\ 1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq n}} (\Delta V_{ijk})$.

Toma-se um ponto $(\xi_i, \zeta_j, \eta_k) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$ em cada pequeno paralelepípedo e definimos a seguinte soma de

Riemann:

$$S_{lmn} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\phi(\xi_i, \zeta_j, \eta_k)\Delta V_{ijk}$$

A integral tripla da função $\phi(x, y, z)$ sobre o paralelepípedo $R$, denotada $\int\int\int_R \phi(x, y, z)dxdydz$ será então definida como o seguinte limite:

$$\int\int\int_R \phi(x, y, z)dxdydz \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{|P|\to 0} S_{lmn}$$

**Integração Tripla: Domínios Não Paralelepípedais Limitados** Para definir a integral tripla de uma função $\phi : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ onde $D$ é não paralelepipedal limitado, começamos por considerar uma função $\Phi$ definida em um domínio paralelepipedal $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d \wedge e \leq z \leq f\}$ tal que $D \subset R$ e $\Phi(x, y, z) = \begin{cases} \phi(x, y, z) & , (x, y, z) \in D \\ 0 & , (x, y, z) \notin D \end{cases}$. Formalmente $\Phi : [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \mapsto \mathbb{R}$ é uma extensão da função $\phi(x, y, z)$. A partir daqui todo o procedimento é semelhante ao da definição da integral tripla em domínios paralelepipedais. Podemos definir a integral tripla de uma função $\phi(x, y, z)$ em um domínio não retangular $D$ por:

$$\int\int\int_D \phi(x, y, z)dxdydz \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{|P|\to 0} S_{lmn}$$

. onde $S_{lmn} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\Phi(\xi_i, \zeta_j, \eta_k)\Delta V_{ijk}$ é a soma de Riemann para $\Phi(x, y, z$.

**Integrais Iteradas**

As integrais iteradas dizem que em um domínio retangular $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ a ordem de execução das integrais simples não alteram o valor da integral tripla, que pode ser representada por:

1. $\displaystyle\int\int\int_R \phi(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \Big[\int_c^d \Big[\int_e^f \phi(x,y,z)dz\Big]dy\Big]dx$

2. $\displaystyle\int\int\int_R \phi(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \Big[\int_e^f \Big[\int_c^d \phi(x,y,z)dy\Big]dz\Big]dx$

3. $\displaystyle\int\int\int_R \phi(x,y,z)dxdydz = \int_c^d \Big[\int_a^b \Big[\int_e^f \phi(x,y,z)dz\Big]dx\Big]dy$

4. $\displaystyle\int\int\int_R \phi(x,y,z)dxdydz = \int_c^d \Big[\int_e^f \Big[\int_a^b \phi(x,y,z)dx\Big]dz\Big]dy$

5. $\displaystyle\int\int\int_R \phi(x,y,z)dxdydz = \int_e^f \Big[\int_c^d \Big[\int_a^b \phi(x,y,z)dx\Big]dy\Big]dz$

6. $\displaystyle\int\int\int_R \phi(x,y,z)dxdydz = \int_e^f \Big[\int_a^b \Big[\int_c^d \phi(x,y,z)dy\Big]dx\Big]dz$

. **Propriedades das Integrais triplas**

As integrais triplas são de certo modo semelhantes às propriedades das integrais simples que vimos em Cálculo I sendo quase que uma extensão natural destas. As integrais triplas têm, entre outras, as seguintes propriedades:

**Propriedade 1** Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ uma função de valores reais integrável em $D$ e $c \in \mathbb{R}$, então vale:

$$\int\int\int_D cf(x,y,z)dxdydz = c\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz$$

**Propriedade 2** Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ duas funções de valores reais integráveis em $D$, então vale:

$$\begin{aligned}\int\int\int_D (f+g)(x,y,z)dxdydz &= \int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz \\ &+ \int\int\int_D g(x,y,z)dxdydz\end{aligned}$$

**Propriedade 3** Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ uma função de valores reais integrável em $D$ tal que $f(x, y, z) \geq 0, \forall (x, y, z) \in D$, então vale:

$$\int\int\int_D f(x, y, z)dxdydz \geq 0$$

**Propriedade 4** Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ duas funções de valores reais integráveis em $D$ tais que $f(x, y, z) \geq g(x, y, z), \forall (x, y, z) \in D$, então vale:

$$\int\int\int_D f(x, y, z)dxdydz \geq \int\int\int_D g(x, y, z)dxdydz$$

**Propriedade 5** Seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ uma função de valores reais integrável em $D$ onde $D = A \cup B$ e $A \cap B$ é a união de um número finito de superfícies em $\mathbb{R}^3$, então vale:

$$\begin{aligned}\int\int\int_D f(x, y, z)dxdydz = & \int\int\int_A f(x, y, z)dxdydz \\ & + \int\int\int_B f(x, y, z)dxdydz\end{aligned}$$

**Determinação dos Limites de Integração para Integrais Triplas**

Daremos aqui um método prático para determinar os limites de integração em uma integral tripla sobre domínio não retangular da forma: $D$.

**Passo 1** Fazer um desenho da região $D$. (**Fig. 4.1**) identificando as superfícies inferior $a(x, y)$ e superior $b(x, y)$ que limitam a região $D$, bem como a sombra projetada no plano $xy$ por $D$, denotada

$D^*$ e identificar as curvas limites da região $D^*$ $a(x)$ curva inferior e $b(x)$ curva superior, como na AULA01.

**Passo 2** Atravessar toda a região $D^*$ e o eixo $x$ com um segmento de reta paralelo e orientado na direção positiva ao eixo $y$ (segmento $r$ na **Fig. 4.1**)

**Passo 3** Deslocar o segmento de reta $r$ paralelo ao eixo $y$ na direção negativa do eixo $x$ até tocar o ponto mais à esquerda de $D^*$ marcando o limite inferior de $x$ (ponto $a$ na **Fig. 4.1**).

**Passo 4** Deslocar o segmento de reta $r$ paralelo ao eixo $y$ na direção positiva do eixo $x$ até tocar o ponto mais à direita de $D^*$ marcando o limite superior de $x$ (ponto $b$ na **Fig. 4.1**).

**Passo 5** Tomando um ponto qualquer $x \in (a, b)$ passamos o segmento de reta $r$ através da região $D^*$ paralelo ao eixo $y$ na direção positiva do eixo $x$. O limite inferior para a variável $y$ será a função $a(x)$, ponto da curva onde o segmento entra na região $D^*$ e o limite superior para a variável $y$ será $b(x)$, ponto da curva onde o segmento de reta sai da região $D^*$.

**Passo 6** Tomando um ponto qualquer $(x, y) \in D^*$ passamos o segmento de reta $s$ através da região $D$, paralelo ao eixo $z$ orientado na direção positiva de $z$. O limite inferior para a variável $z$ será a função $a(x, y)$, ponto da superfície onde o segmento entra na região $D$ e o limite superior para a variável $z$ será $b(x, y)$, ponto da superfície onde o segmento de reta sai da região $D$.

Nossa integral será efetuada assim:

$$\int\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_{a(x)}^{b(x)} \int_{a(x,y)}^{b(x,y)} f(x,y,z)dzdydx$$

## PRÓXIMA AULA

Em nossa próxima aula veremos mudança de variáveis na integração tripla. O objetivo da mudança de variáveis em uma integral tripla será a de facilitar esta integração de uma de duas formas. A primeira será tornando o integrando mais simples. A segunda transformando o domínio $D$ do integrando em um domínio de forma geométrica mais simples.

## ATIVIDADES

Deixamos como atividades o cálculo de algumas integrais tríplas.

**ATIV. 4.1.** Seja $f : [-1,+1] \times [-1,+1] \times [-1,+1] \mapsto \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Determine a integral tripla $\displaystyle\int\int\int_R f(x,y,z)dxdydz$.

**Comentário:** Volte ao texto e reveja com calma e atenção o cálculo de integrais duplas dos exemplos acima, elas lhe servirão de guia.

**ATIV. 4.2.** Seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = 1$, onde $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x \geq 0 \wedge 0 \leq y \leq 1 - x^2 \wedge 0 \leq z \leq 1 - x^2\}$.

- Determine os limites da integral tripla $\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz$,
- esboce a região de integração e
- calcule a integral dupla $\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz$.

**Comentário:** Volte ao texto e reveja com calma e atenção o cálculo de integrais duplas dos exemplos acima, elas lhe servirão de guia.

## LEITURA COMPLEMENTAR

ÁVILA, Geraldo, Cálculo 3: Funções de Várias Variáveis, Livros Técnicos e Científicos Editora, São Paulo, $3^{a}$ edição, 1982.

LEITHOLD, Louis, O Cálculo com Geometria Analítica. Volume 2, Editora Harbra, 1994.

STEWART, James,Cálculo. Volume 3, $5^{a}$ edição, Editora CENGAGE Learning, 2009.

SWOKOWSKI, Earl E., Cálculo com Geometria Analítica, Volume 2, $2^{a}$ edição, Makron Books do Brásil SP, 1994.

THOMAS, George B., Cálculo, Volume 2, $10^{a}$, Addilson Wesley, 2003.

KAPLAN, Wilfred, Cálculo Avançado Vol.1 e vol.2 Editora Edgard Blücher 1991.// SPIEGEL, Murray R. Cálculo Avançado, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1971.

BOUCHARA, Jacques, Cálculo Integral Avançado, EDUSP, 2006.