AULA 5

Mudança de Variáveis em Integrais tríplas

META:

Introduzir mudança de variáveis em integrais triplas de funções de valores reais e domínio em $\mathbb{R}^3$.

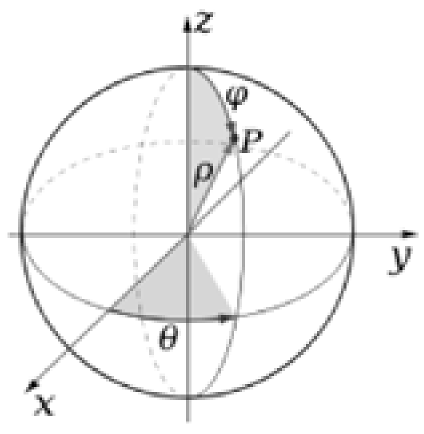
OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Calcular integrais triplas de funções de valores reais e domínio em $\mathbb{R}^3$ utilizando mudança de variáveis.

PRÉ-REQUISITOS

Os conhecimentos de integrais de funções de valores reais com domínio em $\mathbb{R}$, da disciplina Cálculo I, superfícies em R^3, de coordenadas polares da disciplina Cálculo II e integrais triplas aula 04.



5.1 Introdução

Caros alunos o problema da mudança de variáveis em integrais triplas é inteiramente análogo ao problema de mudança de variáveis em integrais duplas. Analogias a parte, o fato de do espaço $\mathbb{R}^3$ ter uma dimensão a mais que o $\mathbb{R}^2$, traz um esforço algébrico adicional ao tratamento geral da mudança de variáveis em integrais triplas. Veremos dois casos particulares de mudança de variáveis em integrais tripla que correspondem aos: sistemas de coordenadas cilíndricos e sistema de coordenadas esféricos.

HISTÓRIA

O teorema de mudança de variáveis em integrais tríplas foi primeiro proposto por Lagrange em 1773 e usado por Legendre, Laplace e Gauss, e primeiramente generalizado para n variáveis por Mikhail Ostrogradski em 1836, resistiu a uma demonstração mais rigorosa por longo tempo (cerca de 125 anos). E foi satisfatóriamente demonstrado por Elie Cartan em uma série de artigos nos anos 1890.

5.2 Mudança de Variáveis em Integrais Triplas

Vamos considerar a integração de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ onde $(x, y, z) \in D$ e conseqüentemente, $\forall(x, y, z) \in D$ temos $f(x, y, z) \in \mathbb{R}$. Consideraremos também, uma transformação $T : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto D' \subset \mathbb{R}^3$, biunívoca de modo que $D = T^{-1}(D')$, $\forall(u, v, w) \in D', (x, y, z) = T^{-1}(u, v, w) \in D$. Trocando em miúdos: $x = \hat{x}(u, v, w)$, $y = \hat{y}(u, v, w)$ e $z = \hat{z}(u, v, w)$. E suponhamos as funções contínuas e deriváveis e seu jacobiano, denotado J, definido por: $J\left(\dfrac{x, y, z}{u, v, w}\right)$ ou $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$:

$$J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \hat{x}}{\partial u} & \dfrac{\partial \hat{y}}{\partial u} & \dfrac{\partial \hat{z}}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \hat{x}}{\partial v} & \dfrac{\partial \hat{y}}{\partial v} & \dfrac{\partial \hat{z}}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \hat{x}}{\partial w} & \dfrac{\partial \hat{y}}{\partial w} & \dfrac{\partial \hat{z}}{\partial w} \end{bmatrix}.$$

Suponhamos uma partição de D' feita partindo de planos paralelos aos planos coordenados vw (u constante), uw (v constante) e uv (w constante). Denotando $u_{i+1} = u_i + \Delta u_i$, $v_{j+1} = v_j + \Delta v_j$ e

$w_{k+1} = w_k + \Delta w_k$, destacamos o pequeno paralelepípedo indexado por ijk, (**Fig 5.1**). Suponhamos que

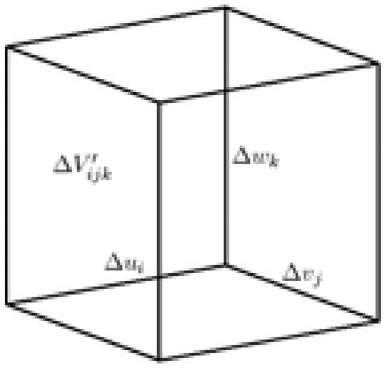


Figura 5.1: Elemento de volume em D'

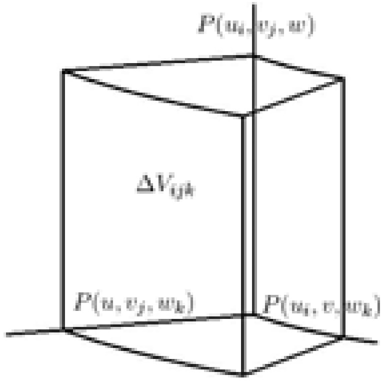


Figura 5.2: Elemento de volume em D

este pequeno paralelepípedo de volume $\Delta V'_{ijk} = \Delta u_i \Delta v_j \Delta w_k$ seja mapeado por T^{-1} em um subdomínio em D de volume ΔV_{ijk} (**Fig 5.2**). Seja: $P = P(u,v,w) = (\hat{x}(u,v,w), \hat{y}(u,v,w), \hat{z}(u,v,w))$. Os segmentos de reta (u, v_j, w_k), (u_i, v, w_k) e (u_i, v_j, w) começando no ponto (u_i, v_j, w_k) são mapeados por T^{-1} em $P(u, v_j, w_k)$ $P(u_i, v, w_k)$ $P(u_i, v_j, w)$ ver (**Fig 5.2**).

No subdomínio $V_{ijk} \subset D$ traçamos os vetores tangentes $\dfrac{\partial P}{\partial u}\Delta u_i$, $\dfrac{\partial P}{\partial v}\Delta v_j$ e $\dfrac{\partial P}{\partial w}\Delta w_k$, ver (**Fig 5.3**). Em seguida traçamos segmentos de reta paralelos aos vetores tangentes completando um paralelepípedo em D, ver (**Fig 5.4**), cujo volume admitiremos aproximadamente igual ao ΔV_{ijk} (esta é a argumentação heurística). Este volume é dado por:

$$\Delta V_{ijk} \approx \left| \frac{\partial P}{\partial u}\Delta u_i \times \frac{\partial P}{\partial v}\Delta v_j \bullet \frac{\partial P}{\partial w}\Delta w_k \right|.$$

Levando em conta que:

$$\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial u}\vec{\boldsymbol{i}} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial u}\vec{\boldsymbol{j}} + \frac{\partial \hat{z}}{\partial u}\vec{\boldsymbol{k}}$$
$$\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial v}\vec{\boldsymbol{i}} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial v}\vec{\boldsymbol{j}} + \frac{\partial \hat{z}}{\partial v}\vec{\boldsymbol{k}}$$
$$\frac{\partial P}{\partial w} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial w}\vec{\boldsymbol{i}} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial w}\vec{\boldsymbol{j}} + \frac{\partial \hat{z}}{\partial w}\vec{\boldsymbol{k}}$$

e calculando o produto vetorial mixto teremos:

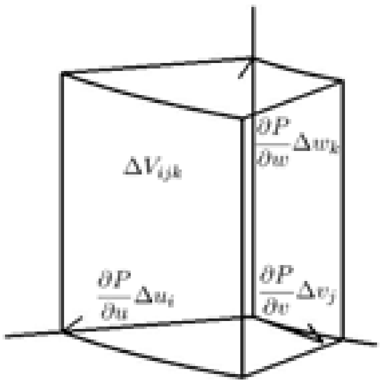


Figura 5.3: Elemento de volume em D'

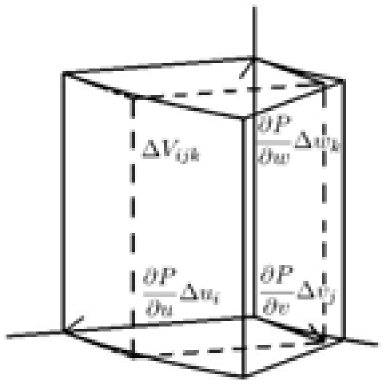


Figura 5.4: Elemento de volume em D

$$\frac{\partial P}{\partial u}\Delta u_i \times \frac{\partial P}{\partial v}\Delta v_j \bullet \frac{\partial P}{\partial w}\Delta w_k = det\begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial u} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial u} & \frac{\partial \hat{z}}{\partial u} \\ \frac{\partial \hat{x}}{\partial v} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial v} & \frac{\partial \hat{z}}{\partial v} \\ \frac{\partial \hat{x}}{\partial w} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial w} & \frac{\partial \hat{z}}{\partial w} \end{bmatrix}\Delta u_i \Delta v_j \Delta w_k$$

Daí, levando em conta a expressão do jacobiano em $\mathbb{R}^3$, dada acima, temos:

$$\Delta V_{ijk} \approx \left|\frac{\partial(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial(u,v,w)}\right| \Delta u_i \Delta v_j \Delta w_k$$

O que nos leva à seguinte expressão para a mudança de variáveis em integrais triplas:

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_{D'} F(u,v,w)\,|J|\,dudvdw$$

onde: $F(u,v,w) = f(\hat{x}(u,v,w), \hat{y}(u,v,w), \hat{z}(u,v,w))$ e J é o jacobiano $J = J\left(\dfrac{\hat{x},\hat{y},\hat{z}}{u,v,w}\right)$.

5.3 Alguns Exemplos

Nesta seção veremos dois exemplos de integrais triplas com mudança de variáveis. No primeiro aplicaremos a mudança de variáveis dada pelo sistema de coordenadas cilíndricas e no segundo o sistema de coordenadas esféricas $\alpha(\vartheta)$ $\beta(\vartheta)$

Primeiramente veremos um exemplo em coordenadas cilíndricas. Antes porém, veremos como determinar os limites de integração em coordenadas cilíndricas.

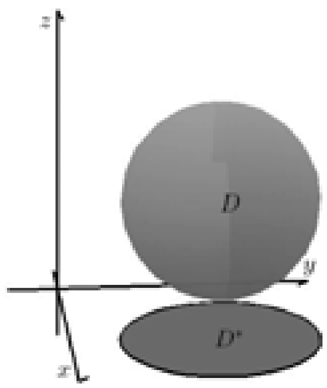


Figura 5.5: Coordenadas cilíndricas 1

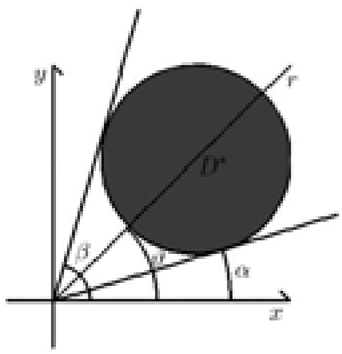


Figura 5.6: Coordenadas cilíndricas 2

Passo 1 Esboçar o domínio D bem como sua projeção D^* no plano xy (ver **Fig. 5.5**).

Passo 2 Identificar as curvas que limitam a região D^*. Atravessar a região D^* com uma reta r começando na origem (ver **Fig. 5.6**).

À medida em que a reta r percorre a região D^* o ângulo ϑ que ela forma com o eixo x positivo varia do mínimo α que será o limite inferior da variável ϑ ao máximo β que será o limite superior da variável ϑ. Daí, a variável $\vartheta \in [\alpha, \beta]$.

Passo 3 Para cada valor fixo da variável $\vartheta \in [\alpha, \beta]$ atravessar a região D^* com a reta r (ver **Fig. 5.7**). O ponto onde a reta r entra na região D^* é o limite inferior $\alpha(\vartheta)$ para a variável r e o ponto onde a reta r sai da região D^* é o limite inferior $\beta(\vartheta)$ para a variável r. Daí, $r \in [\alpha(\vartheta), \beta(\vartheta)]$.

Passo 4 Para cada valor fixo da variável $\vartheta \in [\alpha, \beta]$ e da variável $r \in [\alpha(\vartheta), \beta(\vartheta)]$ tomar o ponto $(r, \vartheta) \in D^*$ em coordenadas polares e levantar a reta s atravessando a região D (ver **Fig. 5.8**). O ponto onde a reta s entra na região D é o limite inferior $\alpha(r, \vartheta)$ para a variável z e o ponto onde a reta s sai da região D é o limite superior $\beta(r, \vartheta)$ para a variável z. Daí, $z \in [\alpha(r, \vartheta), \beta(r, \vartheta)]$.

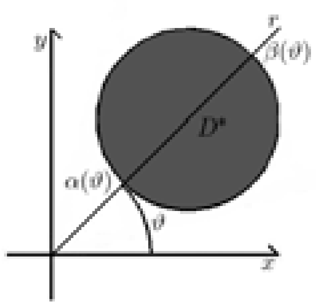


Figura 5.7: Coordenadas cilíndricas 3

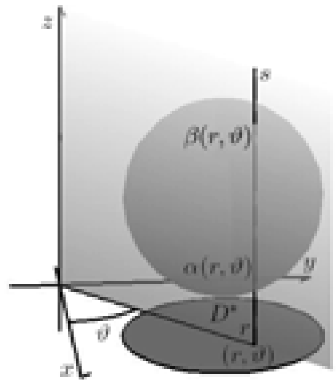


Figura 5.8: Coordenadas cilíndricas 4

Podemos agora encarar o nosso primeiro exemplo onde colocaremos em prática a determinação dos limites de integração em coordenadas cilíndricas.

Exemplo 5.1. Considere o sólido gerado pela intersecção das superfícies: $z = y + a$, (plano) $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, (cilindro) e $z = 0$, (plano) (**Fig 5.9**) e determine seu volume.

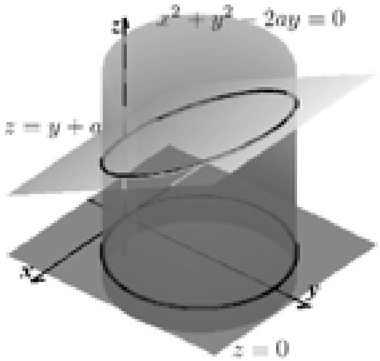


Figura 5.9: Superfícies do exemplo 1

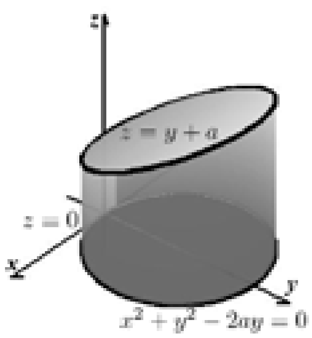


Figura 5.10: Interseção das superfícies do exemplo 1

SOLUÇÃO: Para uma melhor compreensão mostramos na (**Fig 5.10**) o sólido gerado pela interseção das superfícies dadas e na (**Fig 5.11**) as superfícies que compõem o sólido separadas no espaço.

Usaremos para o caso o sistema de coordenadas cilíndricas, dada pela transformação: $(x, y, z) \mapsto (r, \vartheta, z)$ onde $x = r\cos(\vartheta)$, $y = r\sin(\vartheta)$ e $z = z$. O jacobiano da transformação é dado por:

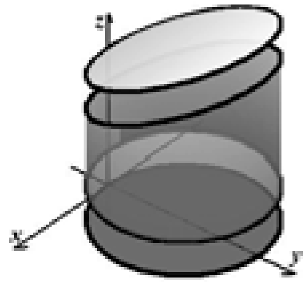


Figura 5.11: Domínio D para o exemplo 2

$$J = J\left(\frac{x,y,z}{r,\vartheta,z}\right) = det\begin{bmatrix} \frac{\partial\hat{x}}{\partial r} & \frac{\partial\hat{y}}{\partial r} & \frac{\partial\hat{z}}{\partial r} \\ \frac{\partial\hat{x}}{\partial\vartheta} & \frac{\partial\hat{y}}{\partial\vartheta} & \frac{\partial\hat{z}}{\partial\vartheta} \\ \frac{\partial\hat{x}}{\partial z} & \frac{\partial\hat{y}}{\partial z} & \frac{\partial\hat{z}}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Efetuando as derivadas parciais temos:

$$J = det\begin{bmatrix} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) & 0 \\ -r\sin(\vartheta) & r\cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r$$

Fazendo as contas do determinante temos:

$$J = r$$

Aproveitaremos o exemplo para aplicar os passos, vistos acima, para determinação dos limites de integração de uma integral tripla no sistema de Scoordenadas cilíndricas.

Passo 1: Esboçar a interseção das superfícies (sólido D), bem como sua projeção sobre o plano xy (superfície D^*), ver (**Fig 5.10**). A projeção sobre o plano xy (superfície D^*), conhecide com a superfície inferior do sólido, sendo o disco dado por $x^2+y^2-2ay \leq 0$.

Passo 2: Os limites para r e ϑ são determinados em D^* do mesmo modo que para coordenadas polares em $\mathbb{R}^2$. Neste caso $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ e para r temos: que r vai de zero até a borda de D^* que é dada por $x^2 + y^2 - 2ay = (r\cos(\vartheta))^2 + (r\sin(\vartheta))^2 - 2ar\sin(\vartheta) = 0$. Daí, $r^2 - 2ar\sin(\vartheta) = r(r - 2a\sin(\vartheta)) = 0$ Simplificando temos: $0 \leq r \leq 2a\sin(\vartheta)$.

Passo 3: Para determinar os limites para z. Por cada par $(r, \vartheta) \in D^*$, traçamos uma reta paralela ao eixo z orientada no sentido positivo do eixo z atravessando o sólido. O limite inferior de z é o ponto onde a reta entra no sólido e o limite superior o ponto onde a reta sai do sólido. Neste caso: $0 \leq z \leq a + x$ ou como $x = r\cos(\vartheta)$ temos: $0 \leq z \leq a + r\cos(\vartheta)$.

Daí, o cálculo do volume de D será dado pela integral:

$$Vol(D) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2a\sin(\vartheta)} \int_0^{a+r\sin(\vartheta)} r dz dr d\vartheta$$

Integrando na variável z temos:

$$Vol(D) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2a\sin(\vartheta)} rz\Big|_0^{a+r\sin(\vartheta)} dr d\vartheta$$

Substituindo os limites de integração temos:

$$Vol(D) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2a\sin(\vartheta)} r(a + r\sin(\vartheta) - 0) dr d\vartheta$$

Fazendo as contas temos:

$$Vol(D) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2a\sin(\vartheta)} (ar + r^2\sin(\vartheta)) dr d\vartheta$$

Integrando em na variável r temos:

$$Vol(D) = \int_0^{2\pi} (a\frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3}\sin(\vartheta))\Big|_0^{2a\sin(\vartheta)} d\vartheta$$

Substituindo o limite superior pois, o limite inferior por ser $r = 0$ não contribui, temos:

$$Vol(D) = \int_0^{2\pi} (a\frac{(2a\sin(\vartheta))^2}{2} + \frac{(2a\sin(\vartheta))^3}{3}\sin(\vartheta))d\vartheta$$

Simplificando temos:

$$Vol(D) = \int_0^{2\pi} (2a^3\sin(\vartheta)^2 + \frac{8a^3\sin(\vartheta)^4}{3}d\vartheta$$

Reescrevendo temos:

$$Vol(D) = 2a^3\int_0^{2\pi} (\sin(\vartheta)^2 d\vartheta + \frac{8a^3}{3}\int_0^{2\pi} \sin(\vartheta)^4 d\vartheta$$

Das tabelas de integrais temos:

$$\begin{aligned}
\int \sin(\alpha u)^n du &= -\frac{\alpha\sin(\alpha u)^{n-1}\cos(\alpha u)}{an} \\
&\quad + \left(\frac{n-1}{n}\right)\int \sin(\alpha u)^{n-2} du \\
\int \sin(\alpha u)^2 du &= \frac{u}{2} - \frac{\sin(2\alpha u)}{4\alpha}
\end{aligned}$$

Dai, temos:

$$\begin{aligned}
\int \sin(\vartheta)^2 d\vartheta &= \frac{\vartheta}{2} - \frac{\sin(2\vartheta)}{4} \\
\int \sin(\vartheta)^4 d\vartheta &= -\frac{\sin(\vartheta)^3\cos(\vartheta)}{4} + \frac{3}{4}\int \sin(\vartheta)^2 d\vartheta \\
&= -\frac{\sin(\vartheta)^3\cos(\vartheta)}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{\vartheta}{2} - \frac{\sin(2\vartheta)}{4}\right)
\end{aligned}$$

Podemos agora calcular as integrais. Para a integral de $\sin(\vartheta)^2$ temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin(\vartheta)^2 d\vartheta &= \frac{\vartheta}{2} - \frac{\sin(2\vartheta)}{4}\Big|_0^{2\pi} \\
&= +\frac{2\pi)}{2} - \frac{\sin(4\pi)}{4} \\
&\quad -\frac{0)}{2} - \frac{0)}{4} \\
&= \pi
\end{aligned}$$

Para a integral de $\sin(\vartheta)^4$ temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin(\vartheta)^4 d\vartheta &= \left(-\frac{\sin(\vartheta)^3\cos(\vartheta)}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{\vartheta}{2} - \frac{\sin(2\vartheta)}{4}\right)\right)\Big|_0^{2\pi} \\
&= +\left(-\frac{\sin(2\pi)^3\cos(2\pi)}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{2\pi}{2} - \frac{\sin(4\pi)}{4}\right)\right) \\
&\quad -\left(-\frac{\sin(0)^3\cos(0)}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{0}{2} - \frac{\sin(0)}{4}\right)\right) \\
&= \frac{3\pi}{4}
\end{aligned}$$

Substituindo no cálculo de $Vol(D)$ temos:

$$\begin{aligned}
Vol(D) &= 2\pi a^3 + \frac{8a^3}{3}\frac{3\pi}{4} \\
&= 4\pi a^3 \ \square
\end{aligned}$$

Em nosso segundo exemplo utilizaremos coordenadas esféricas, Antes porém, veremos como determinar os limites de integração em coordenadas esféricas.

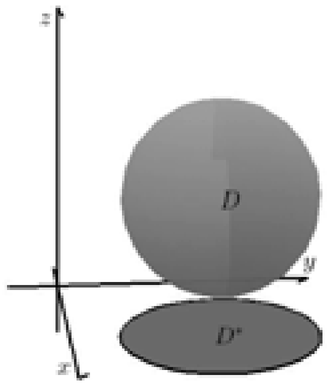


Figura 5.12: Coordenadas esféricas 1

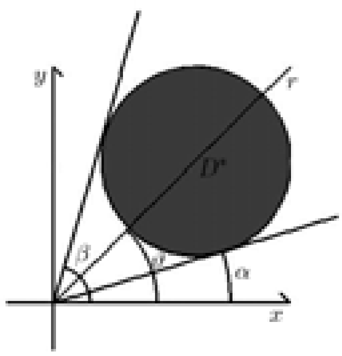


Figura 5.13: Coordenadas esféricas 2

Passo 1 Esboçar o domínio D bem como sua projeção D^* no plano xy (ver **Fig. 5.12**).

Passo 2 Identificar as curvas que limitam a região D^*. Atravessar a região D^* com uma reta r começando na origem (ver **Fig. 5.13**). Á medida em que a reta r percorre a região D^* o ângulo ϑ que ela forma com o eixo x positivo varia do mínimo α que será o limite inferior da variável ϑ ao máximo β que será o limite superior da variável ϑ. Daí, a variável $\vartheta \in [\alpha, \beta]$.

Passo 3 Para cada valor fixo da variável $\vartheta \in [\alpha, \beta]$ atravessar

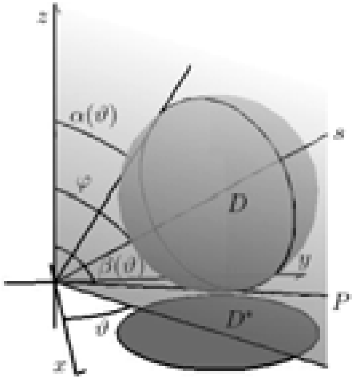


Figura 5.14: Coordenadas esféricas 3

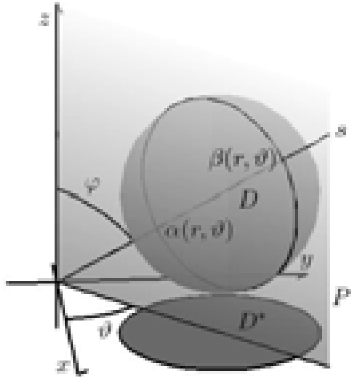


Figura 5.15: Coordenadas esféricas 4

a região D com o plano P que contem o eixo z e forma ângulo ϑ com o eixo x positivo (ver **Fig. 5.14**). Traçamos uma reta r que começa na origem e está contida no plano que corta D. À medida em que a reta r percorre a região D o ângulo φ que ela forma com o eixo z positivo varia do mínimo $\alpha(\vartheta)$ que será o limite inferior da variável φ ao máximo $\beta(\vartheta)$ que será o limite superior da variável φ. Daí, a variável $\varphi \in [\alpha(\vartheta), \beta(\vartheta)]$.

Passo 4 Para cada valor fixo da variável $\vartheta \in [\alpha, \beta]$ e da variável $r \in [\alpha(\vartheta), \beta(\vartheta)]$ plano P que contem o eixo z e forma ângulo ϑ com o eixo x positivo. No plano P traçar a reta s que forma ângulo φ

com o eixo z positivo atravessando a região D (ver **Fig. 5.15**). O ponto onde a reta s entra na região D é o limite inferior $\alpha(\vartheta, \varphi)$ para a variável r e o ponto onde a reta s sai da região D é o limite superior $\beta(\vartheta, \varphi)$ para a variável r. Daí, $r \in [\alpha(\vartheta, \varphi), \beta(\vartheta, \varphi)]$.

Podemos agora encarar o nosso segundo exemplo onde colocaremos em prática a determinação dos limites de integração em coordenadas esféricas.

Exemplo 5.2. Considere o sólido gerado pela interseção das superfícies: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (cone), $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ (esfera)(**Fig 5.11**) e determine seu volume.

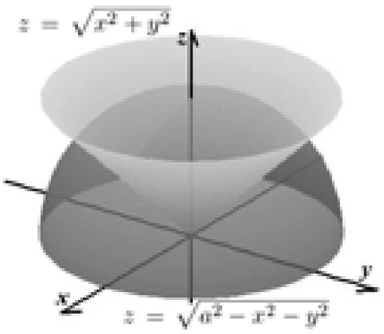


Figura 5.16: Superfícies de exemplo 1

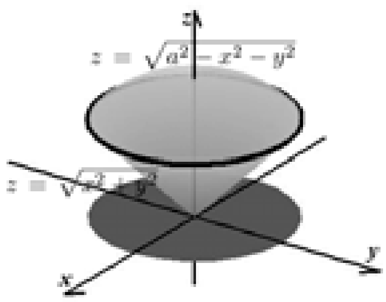


Figura 5.17: Interseção das superfícies de exemplo 1

SOLUÇÃO: Para uma melhor compreensão mostramos na (**Fig 5.17**) o sólido gerado pela interseção das superfícies dadas e na (**Fig 5.18**) as superfícies que compõem o sólido separadas no espaço.

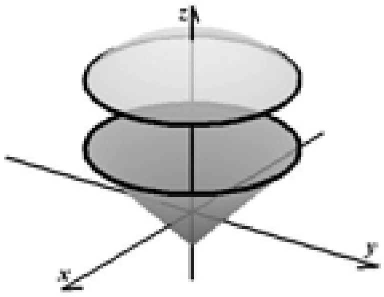


Figura 5.18: Domínio D para o exemplo 2

Usaremos para o caso o sistema de coordenadas esféricas, dada pela transformação: $(x, y, z) \mapsto (r, \vartheta, \varphi)$ onde $x = r\cos(\vartheta)\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\vartheta)\cos(\varphi)$ e $z = r\sin(\varphi)$. O jacobiano da transformação é dado por:

$$J = J\left(\frac{x, y, z}{r, \vartheta, z}\right) = det\begin{bmatrix} \frac{\partial\hat{x}}{\partial r} & \frac{\partial\hat{y}}{\partial r} & \frac{\partial\hat{z}}{\partial r} \\ \frac{\partial\hat{x}}{\partial\vartheta} & \frac{\partial\hat{y}}{\partial\vartheta} & \frac{\partial\hat{z}}{\partial\vartheta} \\ \frac{\partial\hat{x}}{\partial\varphi} & \frac{\partial\hat{y}}{\partial\varphi} & \frac{\partial\hat{z}}{\partial\varphi} \end{bmatrix}$$

Efetuando as derivadas parciais temos:

$$J = det\begin{bmatrix} \cos(\vartheta)\cos(\varphi) & \sin(\vartheta)\cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) & r\cos(\vartheta)\cos(\varphi) & 0 \\ -r\cos(\vartheta)\sin(\varphi) & -r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

Fazendo as contas do determinante temos:

$$J = r^2\sin(\varphi)$$

Aproveitaremos o exemplo para aplicar os passos na determinação dos limites de integração de uma integral tripla no sistema de coordenadas esféricas expostos acima.

Passo 1: Esboçar a interseção das superfícies (sólido D), bem como sua projeção sobre o plano xy (superfície D^*), ver (**Fig 5.19**). A projeção sobre o plano xy (superfície D^*), é dada por $x^2 + y^2 \leq a^2$.

Passo 2: Os limites para a variável ϑ são determinados em D^* como em um sistema de coordenadas polares. No caso como D^* é um disco de raio $\dfrac{\sqrt{a}}{2}$ temos que: $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$.

Passo 3: Os limites para a variável φ são determinados em D do seguinte modo: para cada valor fixo de ϑ, em D^*, cortamos o domínio D por um plano que passa no eixo z e forma ângulo ϑ com o eixo x. Traçamos uma reta M que passa na origem, pertence ao plano ϑ e atravessa o domínio D. O ângulo φ é o ângulo formado por M e o eixo z positivo. Para o caso o menor valor é $\varphi = 0$, quando M conhecide com o eixo Z e o maior valor de φ em D é quando M conhecide com a geratriz do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Passo 4: Os limites para a variável r são determinados em D do seguinte modo: para cada par fixo $\vartheta, \varphi)$ percorremos a reta M partindo da origem. O limite inferior de r é o ponto onde a reta entra em D e o limite superior o ponto onde M sai de D. Para o nosso caso: $0 \leq r \leq a$ (a reta sai na superfície da esfera $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

Podemos determinar o volume de D pela integral tripla:

$$Vol(D) = \int_0^{2\pi} \int_0^{pi/4} \int_0^a r^2 \sin(\varphi) dr d\varphi d\vartheta$$

Integrando primeiramente na variável r temos:

$$Vol(D) = \int_0^{2\pi} \int_0^{pi/4} \left. \frac{r^3}{3} \right|_0^a \sin(\varphi) d\varphi d\vartheta$$

Substituindo os limites de integração temos:

$$Vol(D) = \int_0^{2\pi} \int_0^{pi/4} \left(\frac{a^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) \sin(\varphi) d\varphi d\vartheta$$

Simplificando temos:

$$Vol(D) = \frac{a^3}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{pi/4} \sin(\varphi) d\varphi d\vartheta$$

Integrando na variável φ temos:

$$Vol(D) = \frac{a^3}{3} \int_0^{2\pi} - \cos(\varphi)\Big|_0^{pi/4} d\vartheta$$

Substituindo os limites de integração temos:

$$Vol(D) = \frac{a^3}{3} \int_0^{2\pi} \left(- \cos(pi/4) + \cos(0) \right) d\vartheta$$

Simplificando temos:

$$Vol(D) = \frac{a^3}{3} \frac{2 - \sqrt(2)}{2} \int_0^{2\pi} d\vartheta$$

Integrando na variável ϑ temos:

$$Vol(D) = \frac{a^3}{3} \frac{2 - \sqrt(2)}{2} \vartheta\Big|_0^{2\pi}$$

Substituindo os limites de integração temos:

$$Vol(D) = \frac{a^3}{3} \frac{2 - \sqrt(2)}{2} (2\pi - 0)$$

Finalmente, simplificando temos:

$$Vol(D) = \frac{\pi a^3 (2 - \sqrt(2))}{3} \quad \square$$

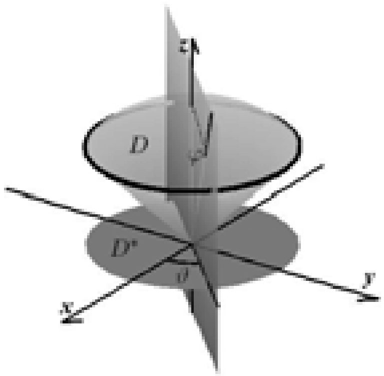


Figura 5.19: Domínio D para o exemplo 2

5.4 Conclusão

Na aula de hoje, vimos que algumas vezes é conveniente fazer uma mudança nas variáveis de integração em uma integral tripla, para facilitar o cálculo da mesma. Vimos em particularmente duas mudanças de variáveis são muito importantes e correspondem aos: sistema de coordenadas cilíndrico e sistema de coordenadas esférico.

RESUMO

Consideramos a transformação $(x, y, z) = T(u, v, w)$ tal que o domínio um ponto do domínio $D \subset \mathbb{R}^3$, (x, y, z) seja transformado no ponto (u, v, w) do domínio $D' \subset \mathbb{R}^3$, $(D = T(D'))$ e mais especificamente $x = \hat{x}(u, v, w)$, $y = \hat{y}(u, v, w)$ e $z = \hat{z}(u, v, w)$. Definindo o jacobiano da transformação, denotado J, $J\left(\dfrac{x, y, z}{u, v, w}\right)$ ou $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$, por:

$$J\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = det\begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial u} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial u} & \frac{\partial \hat{z}}{\partial u} \\ \frac{\partial \hat{x}}{\partial v} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial v} & \frac{\partial \hat{z}}{\partial v} \\ \frac{\partial \hat{x}}{\partial w} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial w} & \frac{\partial \hat{z}}{\partial w} \end{bmatrix}$$

Mudança de Variáveis em Integrais Triplas

Vale então,a seguinte fórmula para a mudança de variáveis en integrais duplas:

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_{D'} F(u,v,w)\,|J|\,dudvdw$$

onde: $F(u,v,w) = f(\hat{x}(u,v,w), \hat{y}(u,v,w), \hat{z}(u,v,w))$ e J é o jacobiano $J = J\left(\frac{\hat{x},\hat{y},\hat{z}}{u,v,w}\right)$.

Sistema de Coordenadas Cilíndricas

O sistema de coordenadas cilíndricas, dado pela transformação: $(x,y,z) \mapsto (r,\vartheta,z)$ onde $x = r\cos(\vartheta)$, $y = r\sin(\vartheta)$ e $z = z$. O jacobiano da transformação é dado por: $J = r$ e a integral tripla pela expressão:

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_{D'} F(r,\vartheta,z)rdzdrd\vartheta$$

onde: $F(r,\vartheta,z) = f(r\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta)z)$

Sistema de Coordenadas esféricas

O sistema de coordenadas esféricas, que é dado pela transformação: $(x,y,z) \mapsto (r,\vartheta,\varphi)$ onde $x = r\cos(\vartheta)\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\vartheta)\cos(\varphi)$ e $z = r\sin(\varphi)$. O jacobiano da transformação é dado por: $J = r^2\sin(\varphi)$ e a integral tripla pela expressão:

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_{D'} F(r,\vartheta,\varphi)r^2\sin(\varphi)drd\varphi d\vartheta$$

onde: $F(r,\vartheta,\varphi) = f(r\cos(\vartheta)\cos(\varphi), r\sin(\vartheta)\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$

Determinação dos Limites para Integração em Coordenadas Cilíndricas

Para determinação dos limites de integração tripla em coordenadas cilíndricas utiliza-se os seguintes passos:

Passo 1 Esboçar o domínio D bem como sua projeção D^* no plano xy (ver **Fig. 5.5**).

Passo 2 Identificar as curvas que limitam a região D^*. Atravessar a região D^* com uma reta r começando na origem (ver **Fig. 5.6**). Á medida em que a reta r percorre a região D^* o ângulo ϑ que ela forma com o eixo x positivo varia do mínimo α que será o limite inferior da variável ϑ ao máximo β que será o limite superior da variável ϑ. Daí, a variável $\vartheta \in [\alpha, \beta]$.

Passo 3 Para cada valor fixo da variável $\vartheta \in [\alpha, \beta]$ atravessar a região D^* com a reta r (ver **Fig. 5.7**). O ponto onde a reta r entra na região D^* é o limite inferior $\alpha(\vartheta)$ para a variável r e o ponto onde a reta r sai da região D^* é o limite inferior $\beta(\vartheta)$ para a variável r. Daí, $r \in [\alpha(\vartheta), \beta(\vartheta)]$.

Passo 4 Para cada valor fixo da variável $\vartheta \in [\alpha, \beta]$ e da variável $r \in [\alpha(\vartheta), \beta(\vartheta)]$ tomar o ponto $(r, \vartheta) \in D^*$ em coordenadas polares e levantar a reta s atravessando a região D (ver **Fig. 5.8**). O ponto onde a reta s entra na região D é o limite inferior $\alpha(r, \vartheta)$ para a variável z e o ponto onde a reta s sai da região D é o limite superior $\beta(r, \vartheta)$ para a variável z. Daí, $z \in [\alpha(r, \vartheta), \beta(r, \vartheta)]$.

Determinação dos Limites para Integração em Coordenadas Esféricas

Para determinação dos limites de integração tripla em coordenadas esféricas utiliza-se os seguintes passos:

Passo 1 Esboçar o domínio D bem como sua projeção D^* no plano xy (ver **Fig. 5.12**).

Passo 2 Identificar as curvas que limitam a região D^*. Atravessar a região D^* com uma reta r começando na origem (ver **Fig. 5.13**). Á medida em que a reta r percorre a região D^* o ângulo ϑ que ela forma com o eixo x positivo varia do mínimo α que será o limite inferior da variável ϑ ao máximo β que será o limite superior da variável ϑ. Daí, a variável $\vartheta \in [\alpha, \beta]$.

Passo 3 Para cada valor fixo da variável $\vartheta \in [\alpha, \beta]$ atravessar a região D com o plano P que contem o eixo z e forma ângulo ϑ com o eixo x positivo (ver **Fig. 5.14**). Traçamos uma reta r que começa na origem e está contida no plano que corta D. À medida em que a reta r percorre a região D o ângulo φ que ela forma com o eixo z positivo varia do mínimo $\alpha(\vartheta)$ que será o limite inferior da variável φ ao máximo $\beta(\vartheta)$ que será o limite superior da variável φ. Daí, a variável $\varphi \in [\alpha(\vartheta), \beta(\vartheta)]$.

Passo 4 Para cada valor fixo da variável $\vartheta \in [\alpha, \beta]$ e da variável $r \in [\alpha(\vartheta), \beta(\vartheta)]$ plano P que contem o eixo z e forma ângulo

ϑ com o eixo x positivo. No plano P traçar a reta s que forma ângulo φ com o eixo z positivo atravessando a região D (ver **Fig. 5.15**). O ponto onde a reta s entra na região D é o limite inferior $\alpha(\vartheta,\varphi)$ para a variável r e o ponto onde a reta s sai da região D é o limite superior $\beta(\vartheta,\varphi)$ para a variável r. Daí, $r \in [\alpha(\vartheta,\varphi), \beta(\vartheta,\varphi)]$.

PRÓXIMA AULA

Em nossa próxima aula veremos algumas das inúmeras aplicações da integral tripla. Nossa atenção estará voltada para o cálculo do centro de massa e momentos de inércia de sólidos gerados por interseções de superfícies em $\mathbb{R}^3$.

ATIVIDADES

Deixamos como atividades dois problemas envolvendo mudança de variáveis em integrais triplas.

ATIV. 5.1. Determine o volume do sólido formado pela intersecção das superfícies $z = 0$, $z = 1 + x^2 + 3y^2$ e $x^2 + y^2 = 1$.
Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção o primeiro exemplo e use o sistema de coordenadas cilíndricas.

ATIV. 5.2. Seja $D \subset \mathbb{R}^3$ a região formada pela intersecção das superfícies $z = 0$ e $x^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ e $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ dada por

$f(x,y,z) = z$. Determine a integral tripla $\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz$.

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção o segundo exemplo e use o sistema de coordenadas esféricas.

LEITURA COMPLEMENTAR

ÁVILA, Geraldo, Cálculo 3: Funções de Várias Variáveis, Livros Técnicos e Científicos Editora, São Paulo, 3ª edição, 1982.

LEITHOLD, Louis, O Cálculo com Geometria Analítica. Volume 2, Editora Harbra, 1994.

STEWART, James,Cálculo. Volume 3, 5ª edição, Editora CENGAGE Learning, 2009.

SWOKOWSKI, Earl E., Cálculo com Geometria Analítica, Volume 2, 2ª edição, Makron Books do Brásil SP, 1994.

THOMAS, George B., Cálculo, Volume 2, 10ª, Addilson Wesley, 2003.

KAPLAN, Wilfred, Cálculo Avançado Vol.1 e vol.2 Editora Edgard Blücher 1991.// SPIEGEL, Murray R. Cálculo Avançado, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1971.

BOUCHARA, Jacques, Cálculo Integral Avançado, EDUSP, 2006.