AULA 6

Algumas Aplicações das Integrais tríplas

META:

Apresentar algumas aplicações das integrais triplas de funções de valores reais e domínio em $\mathbb{R}^3$.

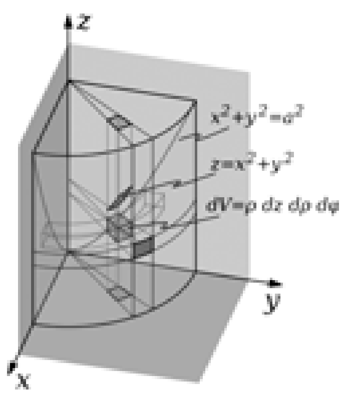
OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Determinar o volume, o centro de massa momento de massa e o momento de inércia de alguns sólidos em $\mathbb{R}^3$.

PRÉ-REQUISITOS

Os conhecimentos de integrais de funções de valores reais com domínio em $\mathbb{R}$, da disciplina Cálculo I, superfícies em R^3, coordenadas polares da disciplina Cálculo II, coordenadas cilíndricas, coordenadas esféricas e integrais duplas aula 04 e aula 05.



6.1 Introdução

Caros alunos, nossa sexta aula tem como objetivo introduzir algumas aplicações da integral tripla. Em particular veremos como calcular a massa de uma região $D \subset \mathbb{R}^3$ dada sua distribuição de densidade, bem como calcular, para a mesma, seu centro de gravidade e momentos de massa. É um bocado de cálculo, mais chegaremos lá.

6.2 Preliminares

Consideraremos uma região $D \subset \mathbb{R}^3$ finita, com uma distribuição de densidade (massa por unidade de volume) $\varrho(x, y, z), \forall(x, y, z) \in D$.

Determinação da massa

Para determinar a massa consideremos uma função Φ definida em um domínio paralelepipedal $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d \wedge e \leq z \leq f\}$ tal que $D \subset R$ e $\Phi(x, y, z) = \begin{cases} \varrho(x, y, z) & , (x, y, z) \in D \\ 0 & , (x, y, z) \notin D \end{cases}$. Considerando a uma partição para o retângulo R dada por $P = P[R] = P[a, b] \times P[c, d] \times [e, f]$, o produto cartesiano de partições $P[a, b]$, $P[c, d]$ e $P[e, f]$ onde $P[a, b] = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_l = b\}$,$x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_l$, $P[c, d] = \{y_0 = c, y_1, \ldots, y_j, y_{j+1}, \ldots, y_m = d\}$, $y_0 < y_1 < \cdots < y_j < y_{j+1} < \cdots < y_m$ e $P[e, f] = \{z_0 = e, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \ldots, z_n = f\}$, $z_0 < z_1 < \cdots < z_k < z_{k+1} < \cdots < z_n$. Tomamos um ponto $(\xi_i, \zeta_j, \eta_k) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$ em cada pequeno paralelepípedo e definimos a seguinte

soma de Riemann:
$S_{lmn} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \Phi(\xi_i, \zeta_j, \eta_k)\Delta V_{ijk}$.
A massa da região D, denotada $m(D)$, será a integral integral tripla da função $\varrho(x, y, z)$ sobre o domínio $D \subset \mathbb{R}^3$, dada por $\int\int\int_D \varrho(x, y, z)dxdydz$ e definida como o seguinte limite:
$m(D) = \int\int\int_D \varrho(x, y, z)dxdydz \overset{\text{def}}{=} \lim_{|P|\to 0} S_{lmn}$.

OBS 6.1. Para a determinação do peso da região D toma-se a seguinte soma de Riemann:
$S_{lmn} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} g(\xi_i, \zeta_j, \eta_k)\Phi(\xi_i, \zeta_j, \eta_k)\Delta V_{ijk}$,
onde $g(\xi_i, \zeta_j, \eta_k)$ é a aceleração da gravidade no ponto (ξ_i, ζ_j, η_k). E o peso da região D, denotado $p(D)$, será dado pela integral tripla:
$P(D) = \int\int\int_D g(x, y, z)\varrho(x, y, z)dxdydz \overset{\text{def}}{=} \lim_{|P|\to 0} S_{lmn}$.

Determinação dos Momentos de Massa

Usando as mesmas considerações acima para o cálculo da massa de uma região $D \subset \mathbb{R}^3$ limitada com distribuição de densidade $\varrho(x, y, z), \forall(x, y, z) \in D$. Para calcular o momento de massa de um pequeno paralelepípedo com relação ao plano coordenado yz tomamos o seguinte produto $\xi_i\Phi(\xi_i, \zeta_j, \eta_k)\Delta V_{ijk}$. Aqui ξ_i representa uma aproximação da distância do pequeno paralelepípedo $\Delta\xi_i\Delta\zeta_j\Delta\eta_k$ ao plano coordenado yz. O momento total em relação ao plano yz para a região D será aproximado pelo limite da soma de Riemann:

$S_{lmn} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \xi_i \Phi(\xi_i, \zeta_j, \eta_k)\Delta V_{ijk}.$
O momento de massa da região D em relação ao plano yz, denotado $M_{yz}(D)$, será dado pela integral tripla $\int\int\int_D x\varrho(x,y,z)dxdydz$ definida pelo limite:
$M_{yz}(D) = \int\int\int_D x\varrho(x,y,z)dxdydz \overset{\text{def}}{=} \lim_{|P|\to 0} S_{lmn}.$

De forma semelhante chega-se ao momento de massa da região D em relação ao plano xz tomando-se a seguinte soma de Riemann:
$S_{lmn} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \zeta_j \Phi(\xi_i, \zeta_j, \eta_k)\Delta V_{ijk}.$
O momento de massa da região D em relação ao plano xz, denotado $M_{yz}(D)$, será dado pela integral tripla $\int\int\int_D y\varrho(x,y,z)dxdydz$ definida pelo limite:
$M_{xz}(D) = \int\int\int_D y\varrho(x,y,z)dxdydz \overset{\text{def}}{=} \lim_{|P|\to 0} S_{lmn}.$

E o momento de massa da região D em relação ao plano xy tomando-se a seguinte soma de Riemann:
$S_{lmn} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \eta_k \Phi(\xi_i, \zeta_j, \eta_k)\Delta V_{ijk}.$
O momento de massa da região D em relação ao plano xy, denotado $M_{yz}(D)$, será dado pela integral tripla $\int\int\int_D z\varrho(x,y,z)dxdydz$ definida pelo limite:
$M_{xy}(D) = \int\int\int_D z\varrho(x,y,z)dxdydz \overset{\text{def}}{=} \lim_{|P|\to 0} S_{lmn}.$

Determinação dos Momentos de Inércia

Usando as mesmas considerações acima para o cálculo da massa de uma região $D \subset \mathbb{R}^3$ limitada com distribuição de densidade $\varrho(x,y,z), \forall(x,y,z) \in D$. Para calcular, aproximadamente, o momento de inércia de um pequeno paralelepípedo com relação a uma

reta r, tomamos o seguinte produto $d^2(\xi_i,\zeta_j,\eta_k)\Phi(\xi_i,\zeta_j,\eta_k)\Delta V_{ijk}$, onde $d(\xi_i,\zeta_j,\eta_k)$ representa a distância do ponto (ξ_i,ζ_j,η_k) à reta r. Em particular a distância do ponto (ξ_i,ζ_j,η_k) ao eixo x é dada por: $d(\xi_i,\zeta_j,\eta_k) = \sqrt{\zeta_j^2+\eta_k^2}$ e o momento de inércia do pequeno paralelepípedo em relação ao eixo x será aproximado por: $(\zeta_j^2+\eta_k^2)\Phi(\xi_i,\zeta_j,\eta_k)\Delta V_{ijk}$. O momento de inércia total em relação ao eixo x para a região D será aproximado pelo limite da soma de Riemann:
$S_{lmn} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(\zeta_j^2+\eta_k^2)\Phi(\xi_i,\zeta_j,\eta_k)\Delta V_{ijk}$.
O momento de inércia da região D em relação ao eixo x, denotado I_x é dado pela integral $\int\int\int_D (y^2+z^2)\varrho(x,y,z)dxdydz$ calculada pelo limite:
$I_x(D) = \int\int\int_D (y^2+z^2)\varrho(x,y,z)dxdydz \overset{\text{def}}{=} \lim_{|P|\to 0} S_{lmn}$.

De forma semelhante chega-se ao momento de inércia da região D em relação ao eixo y tomando-se a seguinte soma de Riemann:
$S_{lmn} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(\xi_i^2+\eta_k^2)\Phi(\xi_i,\zeta_j,\eta_k)\Delta V_{ijk}$.
O momento de inércia da região D em relação ao eixo y, denotado I_y é dado pela integral $\int\int\int_D (x^2+z^2)\varrho(x,y,z)dxdydz$ calculada pelo limite:
$I_y(D) = \int\int\int_D (x^2+z^2)\varrho(x,y,z)dxdydz \overset{\text{def}}{=} \lim_{|P|\to 0} S_{lmn}$.

Também chega-se ao momento de inércia da região D em relação ao eixo z tomando-se a seguinte soma de Riemann: $S_{lmn} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(\xi_i^2+\zeta_j^2)\Phi(\xi_i,\zeta_j,\eta_k)\Delta V_{ijk}$.
O momento de inércia da região D em relação ao eixo z é dada pela integral $\int\int\int_D (x^2+y^2)\varrho(x,y,z)dxdydz$ calculada pelo limite:

$$I_z(D) = \int\int\int_D (x^2+y^2)\varrho(x,y,z)dxdydz \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{|P|\to 0} S_{lmn}.$$

Determinação do Centro de Gravidade

O centro de gravidade de uma região $D \subset \mathbb{R}^3$ finita, com uma distribuição de densidade mássica $\varrho(x,y,z), \forall (x,y,z) \in D$, é o ponto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ definido por:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}(D)}{m(d)} = \frac{\displaystyle\int\int\int_D x\varrho(x,y,z)dxdydz}{\displaystyle\int\int\int_D \varrho(x,y,z)dxdydz},$$

$$\bar{y} = \frac{M_{xz}(D)}{m(d)} = \frac{\displaystyle\int\int\int_D y\varrho(x,y,z)dxdydz}{\displaystyle\int\int\int_D \varrho(x,y,z)dxdydz} \text{ e}$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}(D)}{m(d)} = \frac{\displaystyle\int\int\int_D z\varrho(x,y,z)dxdydz}{\displaystyle\int\int\int_D \varrho(x,y,z)dxdydz}.$$

6.3 Algumas Aplicações da Integral Tripla

Faremos duas aplicações da integral tripla. A primeira refere-se ao cálculo do centro de massa de de um sólido gerado pela intersecção de superfícies, usando o sistema de coordenadas cartesiano. A segunda trata-se da determinação da massa sólido gerado pela intersecção de superfícies, usando o sistema de coordenadas cilíndricas. Vamos aos nossos exemplos.

Exemplo 6.1. Considerando a intersecção das superfícies: $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = x^2$, $z = 0$ e $z = x^2$, (**Fig 6.1**), determinar sua massa e seu centro de massa levando en conta uma distribuição de densidade constante $\varrho(x,y,z) = \varrho$.

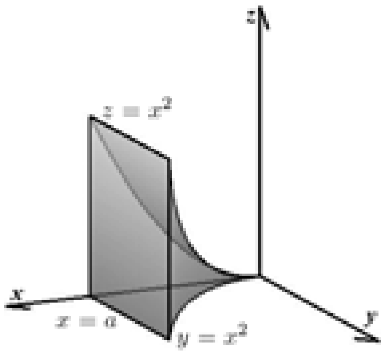


Figura 6.1: Gráfico do exemplo 1

SOLUÇÃO:

Começaremos por determinar os limites de integração inspecionando a (**Fig 6.1**) e verificando que $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq x^2$ e $0 \leq z \leq x^2$.

Em segundo calcularemos a massa da região D, $m(D)$ e os respectivos momentos de massa com relação ao planos yz, xz e xy, respectivamente.

Passo 1 determinar a massa $m(D)$, dada pela integral tripla:

$$m(D) = \int\int\int_D \varrho(x,y,z)dxdydz = \int_0^a \int_0^{x^2} \int_0^{x^2} \varrho dzdydx$$

Integrando em z temos:

$$m(D) = \int_0^a \int_0^{x^2} \varrho z\Big|_0^{x^2} dydx$$

Substituindo os limites de integração temos:

$$m(D) = \int_0^a \int_0^{x^2} \varrho(x^2 - 0)dydx$$

Simplificando temos:

$$m(D) = \varrho \int_0^a \int_0^{x^2} x^2 dydx$$

Integrando em y temos:

$$m(D) = \varrho \int_0^a x^2 y\Big|_0^{x^2} dx$$

Substituindo os limites de integração temos:
$m(D) = \varrho \int_0^a x^2(x^2 - 0)dx$
Simplificando temos:
$m(D) = \varrho \int_0^a x^4 dx$
Finalmente, integrando em x temos:
$m(D) = \varrho \frac{x^5}{5}\Big|_0^a$
Substituindo os limites de integração temos:
$m(D) = \varrho(\frac{a^5}{5} - \frac{0^5}{5})$
Simplificando temos:
$m(D) = \varrho \frac{a^5}{5}$

Passo 2 determinar o momento de massa relativo ao plano yz $M_{yz}(D)$, dada pela integral tripla:
$M_{yz}(D) = \int\int\int_D \varrho(x, y, z)xdxdydz = \int_0^a \int_0^{x^2} \int_0^{x^2} \varrho xdzdydx$
Integrando em z temos:
$M_{yz}(D) = \int_0^a \int_0^{x^2} \varrho xz\Big|_0^{x^2} dydx$
Substituindo os limites de integração temos:
$M_{yz}(D) = \int_0^a \int_0^{x^2} \varrho x(x^2 - 0)dydx$
Simplificando temos:
$M_{yz}(D) = \varrho \int_0^a \int_0^{x^2} x^3 dydx$
Integrando em y temos:
$M_{yz}(D) = \varrho \int_0^a x^3 y\Big|_0^{x^2} dx$
Substituindo os limites de integração temos:
$M_{yz}(D) = \varrho \int_0^a x^3(x^2 - 0)dx$
Simplificando temos:
$M_{yz}(D) = \varrho \int_0^a x^5 dx$
Finalmente, integrando em x temos:

$M_{yz}(D) = \varrho \frac{x^6}{6}\Big|_0^a$

Substituindo os limites de integração temos:

$M_{yz}(D) = \varrho (\frac{a^6}{6} - \frac{0^6}{6})$

Simplificando temos:

$M_{yz}(D) = \varrho \frac{a^6}{6}$

Passo 3 determinar o momento de massa relativo ao plano xz

$M_{xz}(D)$, dada pela integral tripla:

$M_{xz}(D) = \int\int\int_D \varrho(x,y,z) y dx dy dz = \int_0^a \int_0^{x^2} \int_0^{x^2} \varrho y dz dy dx$

Integrando em z temos:

$M_{xz}(D) = \int_0^a \int_0^{x^2} \varrho y z\Big|_0^{x^2} dy dx$

Substituindo os limites de integração temos:

$M_{xz}(D) = \int_0^a \int_0^{x^2} \varrho y(x^2 - 0) dy dx$

Simplificando temos:

$M_{xz}(D) = \varrho \int_0^a \int_0^{x^2} x^2 y dy dx$

Integrando em y temos:

$M_{xz}(D) = \varrho \int_0^a x^2 \frac{y^2}{2}\Big|_0^{x^2} dx$

Substituindo os limites de integração temos:

$M_{xz}(D) = \varrho \int_0^a x^2 (\frac{(x^2)^2}{2} - \frac{0^2}{2}) dx$

Simplificando temos:

$M_{xz}(D) = \varrho \int_0^a \frac{x^6}{2} dx$

Finalmente, integrando em x temos:

$M_{xz}(D) = \varrho \frac{x^7}{14}\Big|_0^a$

Substituindo os limites de integração temos:

$M_{xz}(D) = \varrho (\frac{a^7}{14} - \frac{0^7}{14})$

Simplificando temos:

$M_{xz}(D) = \varrho \frac{a^7}{14}$

Passo 4 determinar o momento de massa relativo ao plano xy. Como a região D tem simetria com relação às variáveis y e z, e a distribuição de densidade também (por ser constante) temos que $M_{xz}(D) = M_{xy}(D)$. De qualquer forma vamos verificar:

$$M_{xy}(D) = \int\int\int_D \varrho(x,y,z)zdxdydz = \int_0^a \int_0^{x^2} \int_0^{x^2} \varrho zdzdydx$$

Integrando em z temos:

$$M_{xy}(D) = \int_0^a \int_0^{x^2} \varrho \frac{z^2}{2}\Big|_0^{x^2} dydx$$

Substituindo os limites de integração temos:

$$M_{xz}(D) = \int_0^a \int_0^{x^2} \varrho(\frac{(x^2)^2}{2} - \frac{0^2}{2})dydx$$

Simplificando temos:

$$M_{xz}(D) = \varrho \int_0^a \int_0^{x^2} \frac{x^4}{2} dydx$$

Integrando em y temos:

$$M_{xz}(D) = \varrho \int_0^a \frac{x^4}{2} y\Big|_0^{x^2} dx$$

Substituindo os limites de integração temos:

$$M_{xz}(D) = \varrho \int_0^a \frac{x^4}{2}(x^2 - 0)dx$$

Simplificando temos:

$$M_{xz}(D) = \varrho \int_0^a \frac{x^6}{2} dx$$

Finalmente, integrando em x temos:

$$M_{xz}(D) = \varrho \frac{x^7}{14}\Big|_0^a$$

Substituindo os limites de integração temos:

$$M_{xz}(D) = \varrho(\frac{a^7}{14} - \frac{0^7}{14})$$

Simplificando temos:

$$M_{xz}(D) = \varrho \frac{a^7}{14}$$

Passo 5 determinar o centro de massa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ da região D, A saber:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}(D)}{m(d)} = \frac{\varrho\dfrac{a^6}{6}}{\varrho\dfrac{a^5}{5}} = \frac{5a}{6},$$

$$\bar{y} = \frac{M_{xz}(D)}{m(d)} = \frac{\varrho\dfrac{a^7}{14}}{\varrho\dfrac{a^5}{5}} = \frac{5a^2}{14} \text{ e}$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}(D)}{m(d)} = \frac{\varrho\dfrac{a^7}{14}}{\varrho\dfrac{a^5}{5}} = \frac{5a^2}{14}.$$

Vamos rapidinho ao nosso segundo exemplo.

Exemplo 6.2. Considerando a interseção das superfícies: $x = 0$, $x^2 + y^2 = b^2$, $z = 0$ e $z = a$, (**Fig 6.2**), determinar sua massa e seu momento de inércia $I_z(D)$, relativo ao eixo z, levando en conta uma distribuição de densidade constante $\varrho(x, y, z) = \varrho$.

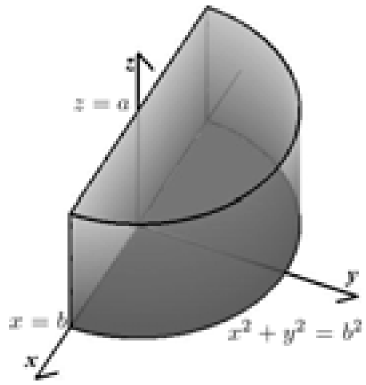


Figura 6.2: Gráfico do exemplo 2

SOLUÇÃO:

Começaremos por determinar os limites de integração inspecionando a (**Fig 6.2**) e verificando que $-b \leq x \leq +b$, $0 \leq y \leq +\sqrt{b^2 - x^2}$ e $0 \leq z \leq a$. Observemos que para este caso é mais adequado usar o sistema de coordenadas cilíndrico, dado pela transformação $(x, y, z) \mapsto (r, \vartheta, z)$ onde: $x = r\cos(\vartheta)$, $y = r\sin(\vartheta)$, $z = z$ e os limites de integração passam a: $0 \leq r \leq b$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$ e $0 \leq z \leq a$.

Em segundo, calcularemos a massa da região D, $m(D)$ e o momento de inércia $I_z(D)$, relativo ao eixo z, respectivamente.

Passo 1 determinar a massa $m(D)$, dada pela integral tripla:
$$m(D) = \int\int\int_D \varrho(x, y, z)dxdydz = \int_0^\pi \int_0^b \int_0^a \varrho r dz dr d\vartheta$$
Integrando em z temos:
$$m(D) = \int_0^\pi \int_0^b \varrho z\Big|_0^a r dr d\vartheta$$
Substituindo os limites de integração temos:
$$m(D) = \int_0^a \int_0^{x^2} \varrho(a-0) r dr d\vartheta$$
Simplificando temos:
$$m(D) = \varrho a \int_0^\pi \int_0^b r dr d\vartheta$$
Integrando em r temos:
$$m(D) = \varrho a \int_0^\pi \frac{r^2}{2}\Big|_0^b d\vartheta$$
Substituindo os limites de integração temos:
$$m(D) = \varrho a \int_0^\pi \left(\frac{b^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) d\vartheta$$
Simplificando temos:
$$m(D) = \varrho a \frac{b^2}{2} \int_0^\pi d\vartheta$$
Finalmente, integrando em ϑ temos:
$$m(D) = \varrho a \frac{b^2}{2} \vartheta\Big|_0^\pi$$
Substituindo os limites de integração temos:
$$m(D) = \varrho a \frac{b^2}{2}(\pi - 0)$$
Simplificando temos:
$$m(D) = \varrho \pi \frac{ab^2}{2}$$

Passo 2 Levando em conta que: $x^2+y^2 = (r\cos(\vartheta))^2+(r\sin(\vartheta))^2 = r^2$, determinar o momento de inércia $I_z(D)$, relativo ao eixo z, dada pela integral tripla:

$$I_z(D) = \int\int\int_D \varrho(x,y,z)(x^2+y^2)dxdydz = \int_0^\pi\int_0^b\int_0^a \varrho r^2 r dz dr d\vartheta$$

Integrando em z temos:

$$I_z(D) = \int_0^\pi\int_0^b \varrho z\Big|_0^a r^3 dr d\vartheta$$

Substituindo os limites de integração temos:

$$I_z(D) = \int_0^a\int_0^{x^2} \varrho(a-0)r^3 dr d\vartheta$$

Simplificando temos:

$$I_z(D) = \varrho a\int_0^\pi\int_0^b r^3 dr d\vartheta$$

Integrando em r temos:

$$I_z(D) = \varrho a\int_0^\pi \frac{r^4}{4}\Big|_0^b d\vartheta$$

Substituindo os limites de integração temos:

$$I_z(D) = \varrho a\int_0^\pi (\frac{b^4}{4} - \frac{0^4}{4})d\vartheta$$

Simplificando temos:

$$I_z(D) = \varrho a\frac{b^4}{4}\int_0^\pi d\vartheta$$

Finalmente, integrando em ϑ temos:

$$I_z(D) = \varrho a\frac{b^4}{4}\vartheta\Big|_0^\pi$$

Substituindo os limites de integração temos:

$$I_z(D) = \varrho a\frac{b^4}{4}(\pi - 0)$$

Simplificando temos:

$$I_z(D) = \varrho\pi\frac{ab^4}{4}$$

6.4 Conclusão

Na aula de hoje, vimos que dentre as inúmeras aplicações da integral tripla, algumas das mais importantes são: dada uma região

$D \subset \mathbb{R}^3$ e sua distribuição de densidade volumétrica de massa $\varrho(x, y, z), \forall(x, y, z) \in D$, as determinação da massa $m(d)$, dos seus momentos de massa M_{yz} relativo ao plano yz, M_{xz} relativo ao plano xz e M_{xy} relativo ao plano xy, dos momentos de inércia I_x relativo ao eixo x, I_y relativo ao eixo y e I_z relativo ao eixo z.

RESUMO

O nosso resumo de hoje constará de uma série de fórmulas para os cálculo da massa, momento de massa, momento de inércia e centro de gravidade de regiões $D \in R^3$ limitadas no espaço dada sua distribuição de densidade volumétrica de massa $\varrho(x, y, z), \forall(x, y, z) \in D$. No corpo do texto temos umas pequenas argumentações heurísticas de como chegar a tais fórmulas, usando partições e somas de Riemman.

Dada uma região $D \in \mathbb{R}^3$ limitada com distribuição de densidade volumétrica de massa $\varrho(x, y, z)$ podemos calcular:

A Massa da região *D*
$m(D) = \int\int\int_D \varrho(x, y, z) dxdydz.$

O Momento de Massa de *D* em Relação ao Plano *yz*
$M_{yz}(D) = \int\int\int_D x\varrho(x, y, z) dxdydz.$

O Momento de Massa de *D* em Relação ao Plano *xz*
$M_{xz}(D) = \int\int\int_D y\varrho(x, y, z) dxdydz.$

O Momento de Massa em Relação ao Plano xy

$M_{xy}(D) = \int\int\int_D z\varrho(x,y,z)dxdydz.$

O Momento de inércia de D em Relação ao eixo x

$I_x(D) = \int\int\int_D (y^2+z^2)\varrho(x,y,z)dxdydz.$

O Momento de inércia de D em Relação ao eixo y

$I_y(D) = \int\int\int_D (x^2+z^2)\varrho(x,y,z)dxdydz.$

O Momento de inércia de D em Relação ao eixo z

$I_z(D) = \int\int\int_D (x^2+y^2)\varrho(x,y,z)dxdydz.$

O Centro de Massa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de D

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}(D)}{m(d)} = \frac{\displaystyle\int\int\int_D x\varrho(x,y,z)dxdydz}{\displaystyle\int\int\int_D \varrho(x,y,z)dxdydz},$$

$$\bar{y} = \frac{M_{xz}(D)}{m(d)} = \frac{\displaystyle\int\int\int_D y\varrho(x,y,z)dxdydz}{\displaystyle\int\int\int_D \varrho(x,y,z)dxdydz} \text{ e}$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}(D)}{m(d)} = \frac{\displaystyle\int\int\int_D z\varrho(x,y,z)dxdydz}{\displaystyle\int\int\int_D \varrho(x,y,z)dxdydz}.$$

PRÓXIMA AULA

Em nossa próxima aula passaremos a estudar funções vetoriais $\boldsymbol{f} : C \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ onde C é curvas no espaço R^3, dada parametricamente por: $x = \hat{x}(t)$, $y = \hat{y}(t)$ e $z = \hat{z}(t)$, $t \in [a,b]$. Não estaremos, como no Cálculo II, interessados na geometria intrínseca das curvas e sim na contribuição de sua geometria no cálculo de integrais de campos de vetores definidos sobre tais curvas.

ATIVIDADES

Deixamos como atividades os seguintes problemas:

ATIV. 6.1. Considerando a interseção das superfícies: $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = x^2$, $z = 0$ e $z = x^2$, (**Fig 6.1**), determinar seu momento de inércia I_z relativo ao eixo z, levando em conta uma distribuição de densidade constante $\varrho(x, y, z) = \varrho$.
Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção o primeiro exemplo, ele lhe servirá de guia.

ATIV. 6.2. Considerando a interseção das superfícies: $x = 0$, $x^2+y^2 = b^2$, $z = 0$ e $z = a$, (**Fig 6.2**), determinar seu momento de massa M_{yz} relativo ao plano yz, levando em conta uma distribuição de densidade constante $\varrho(x, y, z) = \varrho$. **Comentário:** Volte ao texto e reveja com calma e atenção o segundo exemplo, ele lhe servirá de guia.

LEITURA COMPLEMENTAR

ÁVILA, Geraldo, Cálculo 3: Funções de Várias Variáveis, Livros Técnicos e Científicos Editora, São Paulo, 3ª edição, 1982.
LEITHOLD, Louis, O Cálculo com Geometria Analítica. Volume 2, Editora Harbra, 1994.
STEWART, James,Cálculo. Volume 3, 5ª edição, Editora CENGAGE Learning, 2009.

SWOKOWSKI, Earl E., Cálculo com Geometria Analítica, Volume 2, 2ª edição, Makron Books do Brásil SP, 1994.

THOMAS, George B., Cálculo, Volume 2, 10ª, Addilson Wesley, 2003.

KAPLAN, Wilfred, Cálculo Avançado Vol.1 e vol.2 Editora Edgard Blücher 1991.// SPIEGEL, Murray R. Cálculo Avançado, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1971.

BOUCHARA, Jacques, Cálculo Integral Avançado, EDUSP, 2006.