AULA 7

Integrais de Funções Vetoriais sobre Curvas em $\mathbb{R}^3$

META:

Apresentar integrais de funções vetoriais definidas sobre curvas em $\mathbb{R}^3$.

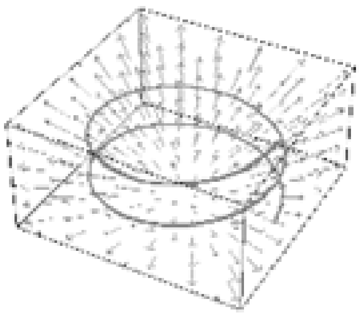
OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Definir integrais de funções vetoriais definidas sobre curvas em $\mathbb{R}^3$ e calcular integrais de algumas funções vetoriais definidas sobre curvas em $\mathbb{R}^3$.

PRÉ-REQUISITOS

Os conhecimentos de integrais de funções de valores reais com domínio em $\mathbb{R}$, da disciplina Cálculo I, vetores da disciplina Vetores e Geometria analítica e curvas em $\mathbb{R}^3$ da disciplina Cálculo II.



7.1 Introdução

Caros alunos nossa aula de hoje "Integrais de Funções Vetoriais sobre Curvas" tem um forte sabor de física pois, veremos coisas como: calculo do trabalho de uma força (função vetorial) ao longo de uma trajetória (curva) ou fluxo de um campo de vetores através de uma curva (o termo fluxo é tipicamente da física). Isto, não quer dizer que vocês tenham que se empenhar nos aspectos físicos, devendo apenas ater-se aos aspectos matemáticos que são os objetivos de nossa aula.

7.2 Curvas em $\mathbb{R}^3$

Nesta seção faremos uma pequena recapitulação sobre curvas em $\mathbb{R}^3$, que vocês já viram em Cálculo II. Será um breve resumo onde estaremos recapitulando as definições e principais resultados.

Considereremos uma curva $C \subset \mathbb{R}^3$ dada parametricamente por: $x = \hat{x}(t)$, $y = \hat{y}(t)$ e $z = \hat{z}(t)$, $t \in [a, b]$ ou em sua forma vetorial $\vec{\boldsymbol{r}}(t) = \hat{x}(t)\vec{\boldsymbol{i}} + \hat{y}(t)\vec{\boldsymbol{j}} + \hat{z}(t)\vec{\boldsymbol{k}}$.

O vetor tangente unitário à C é dado por:

$$\vec{\boldsymbol{T}}(t) = \left|\frac{d\vec{\boldsymbol{r}}(t)}{dt}\right|^{-1} \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}(t)}{dt}$$

A velocidade e a aceleração de uma partícula seguindo a curva C, com movimento dado por $\vec{\boldsymbol{r}}(t)$, no instante t são dadas por:

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{v}}(t) &= \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}(t)}{dt} = \frac{d\hat{x}(t)}{dt}\vec{\boldsymbol{i}} + \frac{d\hat{y}(t)}{dt}\vec{\boldsymbol{j}} + \frac{\hat{z}(t)}{dt}\vec{\boldsymbol{k}} \\
\vec{\boldsymbol{a}}(t) &= \frac{d^2\vec{\boldsymbol{r}}(t)}{dt^2} = \frac{d^2\hat{x}(t)}{dt^2}\vec{\boldsymbol{i}} + \frac{d^2\hat{y}(t)}{dt^2}\vec{\boldsymbol{j}} + \frac{d^2\hat{z}(t)}{dt^2}\vec{\boldsymbol{k}}
\end{aligned}$$

O comprimento de arco da curva $C \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por $x = \hat{x}(t)$, $y = \hat{y}(t)$ e $z = \hat{z}(t)$, no intervalo $[a, t]$ é dado por:

$$\hat{s}(t) = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{d\hat{x}(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\hat{y}(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\hat{z}(t)}{dt}\right)^2}\, dt$$

Podemos inverter $s = \hat{s}(t)$ como $t = \hat{t}(s)$ e descrever a curva $C \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por comprimento de arco $x = \hat{x}(\hat{t}(s))$, $y = \hat{y}(\hat{t}(s))$ e $z = \hat{z}(\hat{t}(s))$.

A curvatura de C é definida por:

$$k(s) = \left|\frac{d\vec{\boldsymbol{T}}(s)}{ds}\right|$$

e pode ser calculada usando-se a fórmula:

$$k(t) = \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{v}}(t)|}\left|\frac{d\vec{\boldsymbol{T}}(t)}{dt}\right|$$

O vetor normal unitário é definido por:

$$\vec{\boldsymbol{N}}(t) = \left|\frac{d\vec{\boldsymbol{T}}(t)}{dt}\right|^{-1} \frac{d\vec{\boldsymbol{T}}(t)}{dt}$$

O vetor binormal à curva $C \subset \mathbb{R}^3$ é definido por:

$$\vec{\boldsymbol{B}}(t) = \vec{\boldsymbol{T}}(t) \times \vec{\boldsymbol{N}}(t)$$

Finalmente a torção da curva $C \subset \mathbb{R}^3$ é definida por:

$$\tau(s) = -\frac{d\vec{\boldsymbol{B}}(s)}{ds} \bullet \vec{\boldsymbol{N}}$$

7.3 Massa, Momento de Massa e Momento de Inércia de Curvas em $\mathbb{R}^3$

Muito embora o cálculo da massa, momento de massa e centro de massa de uma curva $C \subset \mathbb{R}^3$ não envolva integração de funções vetoriais, começaremos por aqui.

Seja $C \subset \mathbb{R}^3$, uma curva contínua e lisa, parametrizada por comprimento de arco e $\varrho : C \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^+$, a densidade linear de massa de C onde: $\forall(x, y, z) \in C, \varrho(x, y, z) > 0$.

Definição 7.1. A massa de $C \subset \mathbb{R}^3$, denotada $m(C)$, é definida por:

$$m(C) = \int_C \varrho(x, y, z)ds$$

Definição 7.2. O momento de massa de $C \subset \mathbb{R}^3$ relativo ao plano yz, denotada $M_{yz}(C)$, é definido por:

$$M_{yz}(C) = \int_C \varrho(x, y, z)xds$$

Definição 7.3. O momento de massa de $C \subset \mathbb{R}^3$ relativo ao plano xz, denotada $M_{xz}(C)$, é definido por:

$$M_{xz}(C) = \int_C \varrho(x, y, z)yds$$

Definição 7.4. O momento de massa de $C \subset \mathbb{R}^3$ relativo ao plano xy, denotada $M_{xy}(C)$, é definido por:

$$M_{xy}(C) = \int_C \varrho(x, y, z)zds$$

Definição 7.5. O centro de Massa de $C \subset \mathbb{R}^3$ é dado por $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, onde:

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{M_{yz}(C)}{m(C)} = \frac{\displaystyle\int_C \varrho(x,y,z)x ds}{\displaystyle\int_C \varrho(x,y,z) ds} \\
\bar{y} &= \frac{M_{xz}(C)}{m(C)} = \frac{\displaystyle\int_C \varrho(x,y,z)y ds}{\displaystyle\int_C \varrho(x,y,z) ds} \\
\bar{z} &= \frac{M_{xy}(C)}{m(C)} = \frac{\displaystyle\int_C \varrho(x,y,z)z ds}{\displaystyle\int_C \varrho(x,y,z) ds}
\end{aligned}$$

Definição 7.6. O momento de inércia de $C \subset \mathbb{R}^3$ relativo ao eixo x, denotada $I_x(C)$, é definido por:

$$I_x(C) = \int_C \varrho(x,y,z)(y^2 + z^2) ds$$

Definição 7.7. O momento de inércia de $C \subset \mathbb{R}^3$ relativo ao eixo y, denotada $I_y(C)$, é definido por:

$$I_y(C) = \int_C \varrho(x,y,z)(x^2 + z^2) ds$$

Definição 7.8. O momento de inércia de $C \subset \mathbb{R}^3$ relativo ao eixo z, denotada $I_z(C)$, é definido por:

$$I_z(C) = \int_C \varrho(x,y,z)(x^2 + y^2) ds$$

OBS 7.1. Se a curva $C \subset \mathbb{R}^3$ é dada parametricamente por: $x = \hat{x}(t)$, $y = \hat{y}(t)$ e $z = \hat{z}(t)$, $t \in [a, b]$, a massa, momento de massa relativo aos planos yz, xz e xy, momento de inércia relativo aos eixos x, y e z respectivamente pode ser calculados por:

$$\begin{aligned}
m(C) &= \int_a^b \varrho(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{z}(t))|\vec{\boldsymbol{v}}(t)|dt \\
M_{yz}(C) &= \int_a^b \varrho(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{z}(t))\hat{x}(t)|\vec{\boldsymbol{v}}(t)|dt \\
M_{xz}(C) &= \int_a^b \varrho(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{z}(t))\hat{y}(t)|\vec{\boldsymbol{v}}(t)|dt \\
M_{xy}(C) &= \int_a^b \varrho(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{z}(t))\hat{z}(t)|\vec{\boldsymbol{v}}(t)|dt \\
I_x(C) &= \int_a^b \varrho(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{z}(t))(\hat{y}^2(t) + \hat{z}^2(t))|\vec{\boldsymbol{v}}(t)|dt \\
I_y(C) &= \int_a^b \varrho(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{z}(t))(\hat{x}^2(t) + \hat{z}^2(t))|\vec{\boldsymbol{v}}(t)|dt \\
I_z(C) &= \int_a^b \varrho(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{z}(t))(\hat{x}^2(t) + \hat{y}^2(t))|\vec{\boldsymbol{v}}(t)|dt
\end{aligned}$$

7.4 Campos Vetoriais: Trabalho, Circulação e Fluxo

Consideremos um campo de vetores $\vec{\boldsymbol{F}} : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ e uma curva $C \subset D$ contínua e suave.

Definição 7.9. Definimos o fluxo integral de escoamento do campo vetorial $\vec{\boldsymbol{F}}$ ao longo da curva $C \subset \mathbb{R}^3$ por:

$$\Phi(F, C) = \int_C \vec{\boldsymbol{F}} \bullet \vec{\boldsymbol{T}} ds$$

OBS 7.2. Quando a curva é simples e fechada, o fluxo integral de escoamento é denominado de circulação e escrevemos:

$$\Phi(F, C) = \oint_C \vec{\boldsymbol{F}} \bullet \vec{\boldsymbol{T}} ds$$

OBS 7.3. Se a curva $C \subset D \subset \mathbb{R}^3$ é parametrizada por: $x = \hat{x}(t)$, $y = \hat{y}(t)$ e $z = \hat{z}(t)$, $t \in [a, b]$. Podemos interpretar o campo vetorial $\vec{\boldsymbol{F}} : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ como um campo de força no espaço, a curva $C \subset D \subset \mathbb{R}^3$ como uma trajetória, a parametrização da curva $C \subset D \subset \mathbb{R}^3$ dada por $x = \hat{x}(t)$, $y = \hat{y}(t)$ e $z = \hat{z}(t)$, $t \in [a,b]$ como o movimento de uma partícula seguindo a trajetória C e o fluxo integral de escoamento como o trabalho executado pela força $\vec{\boldsymbol{F}}$ ao longo de C e dado por:

$$T(F,C) = \int_a^b \vec{\boldsymbol{F}}(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{z}(t)) \bullet \vec{\boldsymbol{T}}(t)dt$$

OBS 7.4. Se a curva $C \subset \mathbb{R}^3$ é representada vetorialmente por: $\vec{\boldsymbol{r}} = \hat{x}(t)\vec{\boldsymbol{i}} + \hat{y}(t)\vec{\boldsymbol{j}} + \hat{z}(t)\vec{\boldsymbol{k}}$, $t \in [a,b]$, e o campo vetorial $\vec{\boldsymbol{F}} : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ representado por: $\vec{\boldsymbol{F}} = f_1(x,y,z)\vec{\boldsymbol{i}} + f_2(x,y,z)\vec{\boldsymbol{j}} + f_3(x,y,z)\vec{\boldsymbol{k}}$, onde $f_1, f_2, f_3 : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ são funções de valores reais, o fluxo integral de escoamento pode ser escrito como uma das três formas:

$$\begin{aligned} T(F,C) &= \int_C \vec{\boldsymbol{F}} \bullet d\vec{\boldsymbol{r}} \\ T(F,C) &= \int_C (f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz) \\ T(F,C) &= \int_a^b \left(f_1 \frac{d\hat{x}(t)}{dt} + f_2 \frac{d\hat{y}(t)}{dt} + f_3 \frac{d\hat{z}(t)}{dt} \right) dt \end{aligned}$$

Consideraremos, agora o caso particular de uma curva plana $C \subset D \subset \mathbb{R}^2$ simples e fechada e de um campo vetorial $\vec{\boldsymbol{F}} : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$. Interpretaremos o campo vetorial $\vec{\boldsymbol{F}}$ como o campo de velocidade de um fluido que atravessa a região $D \subset \mathbb{R}^2$.

Definição 7.10. Definimos o fluxo de F através de C por:

$$\phi(F,C) \stackrel{\text{def}}{=} \oint_C \vec{\boldsymbol{F}} \bullet \vec{\boldsymbol{N}} ds$$

onde: $\vec{\boldsymbol{N}}$ é a normal unitária exterior a C.

7.5 Independência do Caminho

Consideremos um campo vetorial $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, dois pontos $A, B \in D$ e um caminho $C \subset D$ ligando o ponto A ao ponto B. O trabalho realizado para mover uma partícula do ponto A ao ponto B ao longo da trajetória C, dado por $\int_A^B \vec{F} \bullet \vec{dr}$ de modo geral depende do caminho C que liga os dois pontos. Porém, para alguns campos vetoriais este trabalho depende apenas dos pontos A e B.

Definição 7.11. Sejam $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ um campo vetorial e dois pontos $A, B \in D$. Se $\int_A^B \vec{F} \bullet \vec{dr}$ é a mesma $\forall C \subset D$ parametrizada por: $x = \hat{x}(t)$, $y = \hat{y}(t)$ e $z = \hat{z}(t)$, $t \in [a, b]$ tal que $A = C(a)$ e $B = C(b)$ dizemos que $\vec{F}$ é um campo conservativo em D.

Vamos em seguida definir um operador diferencial vetorial muito importante denominado gradiente, A saber:

Definição 7.12. Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ uma função derivável de valores reais. Definimos o gradiente de f, denotado ∇f, como o campo vetorial $\nabla f : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ dado por:

$$\nabla f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Quando um campo vetorial pode ser dado pelo gradiente de um campo escalar, dizemos que o campo escalar é uma função potencial para o campo vetorial. A saber:

Definição 7.13. Sejam $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ um campo vetorial e $f : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ uma função derivável de valores reais tais que

$\vec{F} = \nabla f$ então f é dita uma função potencial para o campo vetorial $\vec{F}$ em D

Daqui por diante consideraremos C uma curva lisa i.e. constituída por um número finito de curvas simples unidas pelas extremidades e D um conjunto aberto e conexo i.e. dado qualquer ponto de D existe uma bola de centro no ponto inteiramente contida em D e dado dois pontos quaisquer de D o segmento de reta que os une está inteiramente contido em D. Consideraremos o campo vetorial $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ dado por $\vec{F} = f_1(x,y,z)\vec{i} + f_2(x,y,z)\vec{j} + f_3(x,y,z)\vec{k}$ onde $f_1, f_2, f_3 : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ são funções de valores reais contínuas e com derivadas de primeira ordem contínuas.

Teorema 7.1. *Sejam $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ dado por $\vec{F} = f_1(x,y,z)\vec{i} + f_2(x,y,z)\vec{j} + f_3(x,y,z)\vec{k}$ onde $f_1, f_2, f_3 : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ são funções de valores reais contínuas e com derivadas de primeira ordem contínuas em uma região $D \subset \mathbb{R}^3$ aberta e conexa do espaço. Então existe uma função $f : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ contínua e diferenciável em $D \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{F} = \nabla f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$ se somente se $\vec{F}$ for um campo conservativo.*

PROVA: Provaremos aqui a suficiência do teorema i.e. Se existe uma função $f : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ contínua e diferenciável em $D \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{F} = \nabla f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$ então $\vec{F}$ é um campo conservativo.

Suponha dois pontos $A, B \in D$ e uma curva $C \subset D$ parametrizada por $\vec{r}(t) = \hat{x}(t)\vec{i} + \hat{y}(t)\vec{j} + \hat{z}(t)\vec{k}$, $t \in [a,b]$ tal que $A = C(a)$ e $B = C(b)$. Ao longo da curva C f é uma função $f(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{z}(t))$ derivável com relação a t e levando em conta a regra da cadeia temos:

$\dfrac{df}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{d\hat{x}}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{d\hat{y}}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{d\hat{z}}{dt}$

Por outro lado o gradiente de f e a derivada do vetor posição $\vec{\boldsymbol{r}}$ com relação a t são dados por:

$\nabla f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{\boldsymbol{i}} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{\boldsymbol{j}} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{\boldsymbol{k}}$

$\dfrac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} = \dfrac{d\hat{x}}{dt}\vec{\boldsymbol{i}} + \dfrac{d\hat{y}}{dt}\vec{\boldsymbol{j}} + \dfrac{d\hat{z}}{dt}\vec{\boldsymbol{k}}$

Fazendo o produto escalar de ∇f por $\dfrac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}$ ao longo de C temos:

$\nabla f \bullet \dfrac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{d\hat{x}}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{d\hat{y}}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{d\hat{z}}{dt}$

Como $\vec{\boldsymbol{F}} = \nabla f$ ao longo de C temos:

$\vec{\boldsymbol{F}} \bullet \dfrac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{d\hat{x}}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{d\hat{y}}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{d\hat{z}}{dt}$

O trabalho realizado por $\vec{\boldsymbol{F}}$ ao longo da curva C do ponto A até o ponto B é dado por:

$\displaystyle\int_C \vec{\boldsymbol{F}} \bullet d\vec{\boldsymbol{r}} = \int_C \vec{\boldsymbol{F}} \bullet \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}dt$

Aproveitando as equações acima podemos escrever:

$\displaystyle\int_C \vec{\boldsymbol{F}} \bullet d\vec{\boldsymbol{r}} = \int_C \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{d\hat{x}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d\hat{y}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{d\hat{z}}{dt}\right) dt$

$\displaystyle\int_C \vec{\boldsymbol{F}} \bullet d\vec{\boldsymbol{r}} = \int_a^b \frac{df}{dt}dt$

$\displaystyle\int_C \vec{\boldsymbol{F}} \bullet d\vec{\boldsymbol{r}} = f(\hat{x}(b), \hat{y}(b), \hat{z}(b)) - f(\hat{x}(a), \hat{y}(a), \hat{z}(a))$

Portanto $\displaystyle\int_C \vec{\boldsymbol{F}} \bullet d\vec{\boldsymbol{r}}$ é independente do caminho C que liga o ponto A ao ponto B provando assim que $\vec{\boldsymbol{F}}$ é um campo conservativo. Caros alunos deixamos como desafio a prova da necessidade. Novamente vocês podem recorrer aos livros de Cálculo Avançado.

Temos outro teorema que caracteriza campos vetoriais conservativos. A saber:

Teorema 7.2. *Seja* $\vec{\boldsymbol{F}} : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ *um campo vetorial dado por:* $\vec{\boldsymbol{F}} = f_1\vec{\boldsymbol{i}} + f_2\vec{\boldsymbol{j}} + f_3\vec{\boldsymbol{k}}$*, cujas funções componentes* $f_1, f_2, f_3 : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ *tem derivadas parciais de primeira ordem contínuas.*

Então $\vec{F}$ é conservativo se, somente se $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial z} = \dfrac{\partial f_3}{\partial x}$ *e* $\dfrac{\partial f_2}{\partial z} = \dfrac{\partial f_3}{\partial y}$

PROVA: Novamente vamos provar a suficiência. Se $\vec{F}$ é conservativo, existe $f : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ tal que:

$\vec{F} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$.

Em outras palavras: $f_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $f_2 = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ e $f_3 = \dfrac{\partial f}{\partial z}$.

Daí temos:

$\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ e $\dfrac{\partial f_2}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Da continuidade das derivadas parciais de f_1 e f_2 temos:

$\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x}$. De forma semelhante temos:

$\dfrac{\partial f_1}{\partial z} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$ e $\dfrac{\partial f_3}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$.

Da continuidade das derivadas parciais de f_1 e f_3 temos:

$\dfrac{\partial f_1}{\partial z} = \dfrac{\partial f_3}{\partial x}$.

E finalmente:

$\dfrac{\partial f_2}{\partial z} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$ e $\dfrac{\partial f_3}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$.

Da continuidade das derivadas parciais de f_2 e f_3 temos:

$\dfrac{\partial f_2}{\partial z} = \dfrac{\partial f_3}{\partial y}$.

Deixamos a demonstração da necessidade para vocês. Novamente consultem livros de Cálculo Avançado.

Vejamos agora como determinar o campo potencial quando ele existe, utilizando um exemplo.

7.6 Algumas Aplicações das Integrais de Linha

Veremos agora duas aplicações das integrais de linha de campos vetoriais sobre curvas no espaço.

Exemplo 7.1. Calcular o trabalho realizado pelo campo de força

$F : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ dado por $\vec{\boldsymbol{F}}(t) = z\vec{\boldsymbol{i}} + 0\vec{\boldsymbol{j}} + xy\vec{\boldsymbol{k}}$ ao longo da hélice

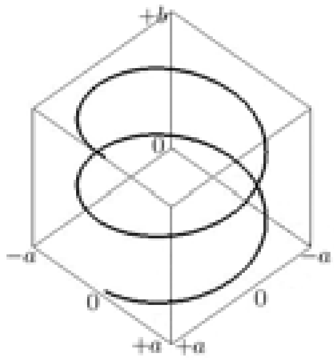


Figura 7.1: Gráfico do exemplo 1

$C \subset \mathbb{R}^3$ dada por $\vec{\boldsymbol{r}} = a\cos(t)\vec{\boldsymbol{i}} + a\sin(t)\vec{\boldsymbol{j}} + bt\vec{\boldsymbol{k}}$, $t \in [0, 4\pi]$ (ver **Fig. 7.1**).

SOLUÇÃO: Derivando o vetor posição $\vec{\boldsymbol{r}}(t)$ com relação a t temos:

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{r}}(t)}{dt} = -a\sin(t)\vec{\boldsymbol{i}} + a\cos(t)\vec{\boldsymbol{j}} + b\vec{\boldsymbol{k}}$$

O campo de força $\vec{\boldsymbol{F}}$ ao longo da curva $C \subset \mathbb{R}^3$ é dado por:

$$\vec{\boldsymbol{F}}(t) = bt\vec{\boldsymbol{i}} + 0\vec{\boldsymbol{j}} + a^2\sin(t)\cos(t)\vec{\boldsymbol{k}}$$

Fazendo o produto escalar de $\vec{\boldsymbol{F}}(t)$ por $\dfrac{d\vec{\boldsymbol{r}}(t)}{dt}$ temos:

$$\vec{\boldsymbol{F}}(t) \bullet \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}(t)}{dt} = -bat\sin(t) + ba^2\sin(t)\cos(t)$$

Calculando o trabalho realizado pela força $\vec{\boldsymbol{F}}(t)$ ao longo da curva

C temos:

$$\begin{aligned}
T(\vec{\boldsymbol{F}}, C) &= \int_C \vec{\boldsymbol{F}}(t) \bullet d\vec{\boldsymbol{r}}(t) \\
&= \int_C \vec{\boldsymbol{F}}(t) \bullet \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}(t)}{dt} dt \\
&= \int_0^{4\pi} (-bat\sin(t) + ba^2 \sin(t)\cos(t))dt \\
&= ba(-\sin(t) + t\cos(t)) + \frac{ba^2}{2}\sin^2(t)\Big|_0^{4\pi} \\
&= ba(-\sin(4\pi) + 4\pi\cos(4\pi)) + \frac{ba^2}{2}\sin^2(4\pi) - \\
&\quad -(ba(-\sin(0) + 0\cos(0)) + \frac{ba^2}{2}\sin^2(0)) \\
&= 4\pi ba
\end{aligned}$$

E agora sem demora o segundo exemplo.

Exemplo 7.2. Calcular o trabalho realizado pelo campo de força constante $F : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ dado por $\vec{\boldsymbol{F}} = K\vec{\boldsymbol{i}} + Ky\vec{\boldsymbol{j}} + K\vec{\boldsymbol{k}}$ ao longo da

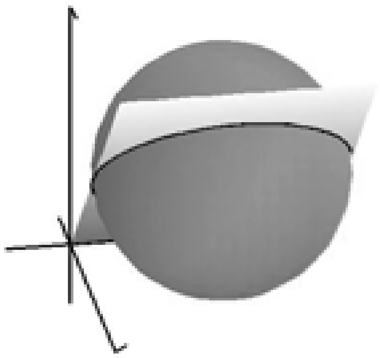


Figura 7.2: Gráfico do exemplo 2

curva $C \subset \mathbb{R}^3$ da intersecção da esfera $(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2 = a^2$ e do plano $x - z = 0$ (ver **Fig. 7.1**).

SOLUÇÃO: Primeira coisa a fazer é obter uma parametrização para a curva $\begin{cases} (x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2 = a^2 \\ x - z = 0 \end{cases}$. Como a curva $C \subset \mathbb{R}^3$ pertence a reta podemos eliminar $z = y$ na equação da esfera e temos:

$2(x-a)^2+(y-a)^2 = a^2$, podemos propor como parametrização satisfazendo a equação acima: $y = a + a\sin(t)$ e $x = a + \dfrac{\sqrt{2}}{2}a\cos(t)$.

Como $z = x$ temos:

$z = a + \dfrac{\sqrt{2}}{2}a\cos(t)$.

Resumindo temos a seguinte parametrização para a intersecção da esfera como plano dados:

$$\begin{cases} x = a + \dfrac{\sqrt{2}}{2}a\cos(t) \\ y = a + a\sin(t) \qquad \forall t \in [-\pi, +\pi] \\ z = a + \dfrac{\sqrt{2}}{2}a\cos(t) \end{cases} .$$

Podemos escrever o vetor posição $\vec{\boldsymbol{r}}$ como:

$\vec{\boldsymbol{r}} = (a + \dfrac{\sqrt{2}}{2}a\cos(t))\vec{\boldsymbol{i}} + (a + a\sin(t))\vec{\boldsymbol{j}} + (a + \dfrac{\sqrt{2}}{2}a\cos(t))\vec{\boldsymbol{k}}$. Derivando o vetor posição $\vec{\boldsymbol{r}}(t)$ com relação a t temos:

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{r}}(t)}{dt} = -\frac{\sqrt{2}}{2}a\sin(t)\vec{\boldsymbol{i}} + a\cos(t)\vec{\boldsymbol{j}} - \frac{\sqrt{2}}{2}a\sin(t)\vec{\boldsymbol{k}}$$

Ao longo da curva $C \subset \mathbb{R}^3$ o campo de força é dado por:

$\vec{\boldsymbol{F}}(t) = K\vec{\boldsymbol{i}} + Ka(1+\sin(t))\vec{\boldsymbol{j}} + K\vec{\boldsymbol{k}}$.

Fazendo o produto escalar de $\vec{\boldsymbol{F}}(t)$ por $\dfrac{d\vec{\boldsymbol{r}}(t)}{dt}$ temos:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{F}}(t) \bullet \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}(t)}{dt} &= -\frac{\sqrt{2}}{2}Ka\sin(t) + Ka^2(1+\sin(t))\cos(t) - \\ &\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}Ka\sin(t) \\ &= -\sqrt{2}Ka\sin(t) + Ka^2(1+\sin(t))\cos(t) \end{aligned}$$

Calculando o trabalho realizado pela força $\vec{\boldsymbol{F}}(t)$ ao longo da curva

C temos:

$$\begin{aligned}
T(\vec{\boldsymbol{F}}, C) &= \int_C \vec{\boldsymbol{F}}(t) \bullet d\vec{\boldsymbol{r}}(t) \\
&= \int_C \vec{\boldsymbol{F}}(t) \bullet \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}(t)}{dt} dt \\
&= \int_{-\pi}^{+\pi} (-\sqrt{2}Ka\sin(t) + Ka^2(1+\sin(t))\cos(t))dt \\
&= (\sqrt{2}Ka\cos(t) - \frac{\sqrt{2}}{2}Ka^2(1+\sin(t))^2)\Big|_{-\pi}^{+\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Vejamos mais um exemplo. Desta vez veremos como determinar a função potencial para um campo conservativo.

Exemplo 7.3. Seja $\vec{\boldsymbol{F}} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ um campo vetorial conservativo dado por: $\vec{\boldsymbol{F}} = yz\vec{\boldsymbol{i}} + (xz+1)\vec{\boldsymbol{j}} + xy\vec{\boldsymbol{k}}$. Determine sua função potencial.

SOLUÇÃO: Primeiramente testaremos se o campo vetorial $\vec{\boldsymbol{F}}$ é um campo conservativo, usando a condição necessária e suficiente dada por:
$\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial z} = \dfrac{\partial f_3}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f_2}{\partial z} = \dfrac{\partial f_3}{\partial y}$.
Como para o $\vec{\boldsymbol{F}}$ dado $f_1 = yz$, $f_2 = xz+1$ e $f_3 = xy$ temos:
$\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = z = \dfrac{\partial f_2}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial z} = y = \dfrac{\partial f_3}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f_2}{\partial z} = x = \dfrac{\partial f_3}{\partial y}$.
A condição está satisfeita e $\vec{\boldsymbol{F}}$ é um campo vetorial conservativo e podemos procurar o $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ tal que:
$\vec{\boldsymbol{F}} = \nabla f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{\boldsymbol{i}} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{\boldsymbol{j}} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{\boldsymbol{k}}$.
De onde tiramos:

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial f}{\partial x} = f_1 = yz \\
\dfrac{\partial f}{\partial y} = f_2 = xz + 1 \\
\dfrac{\partial f}{\partial z} = f_3 = xy
\end{array}\right.$$

Integrando a primeira equação $\dfrac{\partial f}{\partial x} = yz$ com relação a x temos:
$f = xyz + g(y, z)$ pois daí tiramos $\dfrac{\partial f}{\partial x} = yz$.
Temos agora que determinar o $g(y, z)$ de modo que a segunda equação sejam satisfeita.

Derivando $f = xyz + g(y, z)$ com relação a y temos:
$\dfrac{\partial f}{\partial y} = xz + \dfrac{\partial g}{\partial y}$.
Comparando com a segunda equação $\dfrac{\partial f}{\partial y} = xz + 1$ temos:
$\dfrac{\partial g}{\partial y} = 1$.
Integrando com relação a y temos:
$g(y, z) = y + h(z)$ pois daí tiramos $\dfrac{\partial g}{\partial y} = 1$.
Podemos reescrever f comos:

$f + xyz + y + h(z)$.

Temos agora que determinar o $h(z)$ de modo que a terceira equação sejam satisfeita.

Derivando $f = xyz + y + h(z)$ com relação a z temos:
$\dfrac{\partial f}{\partial y} = xy + \dfrac{dh}{dz}$.
Comparando com a terceira equação $\dfrac{\partial f}{\partial z} = xy$ temos:
$\dfrac{dh}{dz} = 0$.
Logo $h(z) = K$ é uma constante que podemos sem perda de generalidade fazer igual a zero e f passa a ter a forma final:

$f(x, y, z) = xyz + y$

7.7 Conclusão

Na aula de hoje, vimos como integrar campos vetoriais (funções vetoriais) ao longo de curvas no espaço e no plano. Que, essencialmente, os conceitos por trás da integração de campos vetoriais como circulação e fluxo sobre curvas estão intimamente ligados à Física.

RESUMO

Seja $C \subset \mathbb{R}^3$, uma curva contínua e lisa, parametrizada por comprimento de arco e $\varrho : C \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^+$, a densidade linear de massa de C onde: $\forall(x, y, z) \in C, \varrho(x, y, z) > 0$.

Definição: Massa A massa de $C \subset \mathbb{R}^3$, denotada $m(C)$, é definida por:

$$m(C) = \int_C \varrho(x, y, z)ds$$

Definição: Momento de Massa relativo aos planos $\boldsymbol{yz}$, $\boldsymbol{xz}$ e $\boldsymbol{xy}$. O momento de massa de $C \subset \mathbb{R}^3$ relativo ao plano yz, xz e xy denotados $M_{yz}(C)$, $M_{xz}(C)$ e $M_{xy}(C)$ são definidos respectivamente por:

$$\begin{aligned} M_{yz}(C) &= \int_C \varrho(x, y, z)xds \\ M_{xz}(C) &= \int_C \varrho(x, y, z)yds \\ M_{xy}(C) &= \int_C \varrho(x, y, z)zds \end{aligned}$$

Se a curva $C \subset \mathbb{R}^3$ é dada parametricamente por: $x = \hat{x}(t)$, $y = \hat{y}(t)$ e $z = \hat{z}(t)$, $t \in [a, b]$, a massa, momento de massa relativo aos planos yz, xz e xy, respectivamente pode ser calculados por:

$$\begin{aligned}
m(C) &= \int_a^b \varrho(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{z}(t))|\vec{\boldsymbol{v}}(t)|dt \\
M_{yz}(C) &= \int_a^b \varrho(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{z}(t))\hat{x}(t)|\vec{\boldsymbol{v}}(t)|dt \\
M_{xz}(C) &= \int_a^b \varrho(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{z}(t))\hat{y}(t)|\vec{\boldsymbol{v}}(t)|dt \\
M_{xy}(C) &= \int_a^b \varrho(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{z}(t))\hat{z}(t)|\vec{\boldsymbol{v}}(t)|dt
\end{aligned}$$

Definição: Centro de Massa. O centro de Massa de $C \subset \mathbb{R}^3$ é dado por $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, onde:

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{M_{yz}(C)}{m(C)} = \frac{\displaystyle\int_C \varrho(x,y,z)x\,ds}{\displaystyle\int_C \varrho(x,y,z)ds} \\
\bar{y} &= \frac{M_{xz}(C)}{m(C)} = \frac{\displaystyle\int_C \varrho(x,y,z)y\,ds}{\displaystyle\int_C \varrho(x,y,z)ds} \\
\bar{z} &= \frac{M_{xy}(C)}{m(C)} = \frac{\displaystyle\int_C \varrho(x,y,z)z\,ds}{\displaystyle\int_C \varrho(x,y,z)ds}
\end{aligned}$$

Definição: Momento de Inércia relativo aos eixos $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$. O momento de inércia de $C \subset \mathbb{R}^3$ relativo ao eixos x, y e z denotados $I_x(C)$, $I_y(C)$ e $I_z(C)$ são definidos respectivamente por:

$$\begin{aligned}
I_x(C) &= \int_C \varrho(x,y,z)(y^2+z^2)ds \\
I_y(C) &= \int_C \varrho(x,y,z)(x^2+z^2)ds \\
I_z(C) &= \int_C \varrho(x,y,z)(x^2+y^2)ds
\end{aligned}$$

Se a curva $C \subset \mathbb{R}^3$ é dada parametricamente por: $x = \hat{x}(t)$, $y = \hat{y}(t)$ e $z = \hat{z}(t)$, $t \in [a,b]$, o momento de inércia relativo aos eixos x, y e z, respectivamente pode ser calculados por:

$$
\begin{aligned}
I_x(C) &= \int_a^b \varrho(\hat{x}(t),\hat{y}(t),\hat{z}(t))(\hat{y}^2(t)+\hat{z}^2(t))|\vec{\boldsymbol{v}}(t)|dt \\
I_y(C) &= \int_a^b \varrho(\hat{x}(t),\hat{y}(t),\hat{z}(t))(\hat{x}^2(t)+\hat{z}^2(t))|\vec{\boldsymbol{v}}(t)|dt \\
I_z(C) &= \int_a^b \varrho(\hat{x}(t),\hat{y}(t),\hat{z}(t))(\hat{x}^2(t)+\hat{y}^2(t))|\vec{\boldsymbol{v}}(t)|dt
\end{aligned}
$$

Definição: Fluxo Integral de Escoamento. Seja um campo de vetores $\vec{\boldsymbol{F}} : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ e uma curva $C \subset D$ contínua e suave. Definimos o fluxo integral de escoamento do campo vetorial $\vec{\boldsymbol{F}}$ ao longo da curva $C \subset \mathbb{R}^3$ por:

$$\Phi(F,C) = \int_C \vec{\boldsymbol{F}} \bullet \vec{\boldsymbol{T}} ds$$

Alternativamente se a curva $C \subset \mathbb{R}^3$ é representada vetorialmente por: $\vec{\boldsymbol{r}} = \hat{x}(t)\vec{\boldsymbol{i}} + \hat{y}(t)\vec{\boldsymbol{j}} + \hat{z}(t)\vec{\boldsymbol{k}}$, $t \in [a,b]$ e o campo vetorial $\vec{\boldsymbol{F}} : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ por: $\vec{\boldsymbol{F}} = f_1(x,y,z)\vec{\boldsymbol{i}} + f_2(x,y,z)\vec{\boldsymbol{j}} + f_3(x,y,z)\vec{\boldsymbol{k}}$, com $f_1, f_2, f_3 : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ são funções de valores reais, o fluxo integral de escoamento pode ser escrito como:

$$
\begin{aligned}
T(F,C) &= \int_C \vec{\boldsymbol{F}} \bullet d\vec{\boldsymbol{r}} \\
T(F,C) &= \int_C (f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz) \\
T(F,C) &= \int_a^b \left(f_1 \frac{d\hat{x}(t)}{dt} + f_2 \frac{d\hat{y}(t)}{dt} + f_3 \frac{d\hat{z}(t)}{dt} \right) dt
\end{aligned}
$$

Definição: Campo Conservativo. Sejam $\vec{\boldsymbol{F}} : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ um campo vetorial, dois pontos $A, B \in D$. Se $\int_A^B \vec{(}F) \bullet \vec{\boldsymbol{dr}}$ é constante $\forall C \subset D$ parametrizada por: $x = \hat{x}(t)$, $y = \hat{y}(t)$ e $z = \hat{z}(t)$, $t \in [a,b]$ tal que $A = C(a)$ e $B = C(b)$ dizemos que $\vec{\boldsymbol{F}}$ é um campo conservativo em D.

Definição: Gradiente. Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ uma função derivável de valores reais. Definimos o gradiente de f, denotado

∇f, como o campo vetorial $\nabla f : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ dado por:

$$\nabla f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\boldsymbol{i}} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\boldsymbol{j}} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{\boldsymbol{k}}$$

Definição: Função Potencial. Sejam $\vec{\boldsymbol{F}} : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ um campo vetorial e $f : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ uma função derivável de valores reais tais que $\vec{\boldsymbol{F}} = \nabla f$ então f é dita uma função potencial para o campo vetorial $\vec{\boldsymbol{F}}$ em D

PRÓXIMA AULA

Em nossa próxima aula veremos, essencialmente, integração de funções reais e campos vetoriais (funções vetoriais) sobre superfícies $S \subset \mathbb{R}^3$. Veremos também como calcular área, massa, momento de massa e centro de massa de superfícies.

ATIVIDADES

Deixamos como atividades os seguintes problemas envolvendo integração de campos vetoriais sobre curvas no espaço.

ATIV. 7.1. Seja $\vec{\boldsymbol{F}} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ o campo vetorial dado por: $\vec{\boldsymbol{F}}(x, y, z) = y(2xyz^2 + e^{xy})\vec{\boldsymbol{i}} + x(2xyz^2 + e^{xy})\vec{\boldsymbol{j}} + 2x^2y^2z\vec{\boldsymbol{k}}$:

- Mostre que campo vetorial $\vec{\boldsymbol{F}}$ é conservativo.
- Determine uma função potencial $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ tal que $\vec{\boldsymbol{F}} = \nabla f$.

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção os problemas resolvidos acima, eles lhe servirão de guia.

ATIV. 7.2. Sejam $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ o campo vetorial dado por: $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} + z\vec{j} + b\vec{k}$, $b \neq 0$ e $C \subset \mathbb{R}^3$ a curva no espaço dada por $\vec{r}(t) = a\cos(t)\vec{i} + a\sin(t)\vec{j} + c\vec{k}$, $\forall t \in [0, 2\pi]$, $a, c > 0$. Determine o trabalho realizado por $\vec{F}$ ao longo da curva C.

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção os problemas resolvidos acima, eles lhe servirão de guia.

LEITURA COMPLEMENTAR

ÁVILA, Geraldo, Cálculo 3: Funções de Várias Variáveis, Livros Técnicos e Científicos Editora, São Paulo, 3ª edição, 1982.

LEITHOLD, Louis, O Cálculo com Geometria Analítica. Volume 2, Editora Harbra, 1994.

STEWART, James,Cálculo. Volume 3, 5ª edição, Editora CENGAGE Learning, 2009.

SWOKOWSKI, Earl E., Cálculo com Geometria Analítica, Volume 2, 2ª edição, Makron Books do Brásil SP, 1994.

THOMAS, George B., Cálculo, Volume 2, 10ª, Addilson Wesley, 2003.

KAPLAN, Wilfred, Cálculo Avançado Vol.1 e vol.2 Editora Edgard Blücher 1991.// SPIEGEL, Murray R. Cálculo Avançado, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1971.

BOUCHARA, Jacques, Cálculo Integral Avançado, EDUSP, 2006.