

# Integrais de Superfícies

## META:

Apresentar integrais de funções definidas sobre superfícies em  $\mathbb{R}^3$ .

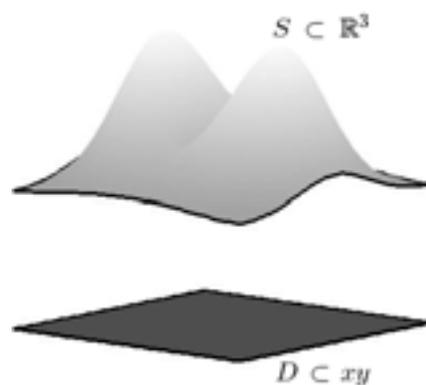
## OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Definir integrais de funções definidas sobre superfícies em  $\mathbb{R}^3$  e calcular algumas integrais de funções vetoriais definidas sobre superfícies em  $\mathbb{R}^3$ .

## PRÉ-REQUISITOS

Os conhecimentos de integrais de funções de valores reais com domínio em  $\mathbb{R}$ , da disciplina Cálculo I, vetores da disciplina Vetores e Geometria analítica e superfícies em  $\mathbb{R}^3$ .



## 8.1 Introdução

Caros alunos nossa aula de hoje “Integrais de Superfícies” tem, como a nossa aula anterior “Integrais de Funções Vetoriais sobre Curvas em  $\mathbb{R}^3$ ”, um sabor de física, desde a determinação da massa, momento de massa e centro de massa de uma superfície até a determinação do fluxo de um campo vetorial através de uma superfície. Da mesma forma que na aula anterior, vocês devem ater-se apenas aos aspectos matemáticos da matéria abordada.

## 8.2 Superfícies em $\mathbb{R}^3$

Bom, vamos começar, bem do começo, com algumas formas de representação de superfícies. A primeira forma de representação de uma superfície é considerar uma função  $f : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$  e tomar um ponto  $c \in \text{Img}(f)$  da imagem de  $f$ . Desta forma, de modo geral,  $f(x, y, z) = c$  representa uma superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$ .

**Exemplo 8.1.** Sejam  $a, b, c > 0$  e  $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$  dada por:  $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ . Desta forma  $f(x, y, z) = d$  representa elipsóides para valores positivos de  $d$ .

Outra forma de representação de uma superfície é através de uma parametrização. Representar  $S \subset \mathbb{R}^3$  por:  $x = \hat{x}(u, v)$ ,  $y = \hat{y}(u, v)$  e  $z = \hat{z}(u, v)$ ,  $\forall (u, v) \in [a, b] \times [c, d]$ .

**Exemplo 8.2.** Tomando o exemplo anterior podemos parametrizar os elipsóides por:  $x = a\sqrt{d}\cos(u)\cos(v)$ ,  $y = b\sqrt{d}\sin(u)\cos(v)$  e  $z = c\sqrt{d}\sin(v)$ ,  $\forall (u, v) \in [-\pi, +\pi] \times [-\pi, +\pi]$ .

8.3 Área de Superfícies em  $\mathbb{R}^3$ 

Vamos usar nesta seção uma argumentação heurística objetivando encontrar uma fórmula para determinação da área de uma superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$ . A argumentação baseia-se na possibilidade (ver, **Fig. 8.1**) de determinar a área de uma superfície através de uma integração dupla sobre sua projeção (sombra) no plano  $D \subset xy$ . Suponhamos que a projeção da superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$  dada

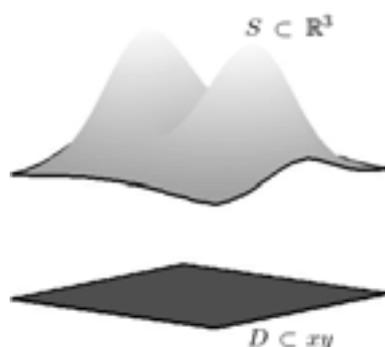


Figura 8.1: Superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$  e sua projeção  $D$

por:  $z = f(x, y)$  sobre o plano  $xy$  seja a região  $D \subset xy$  e seja  $D \subset R \subset xy$  um retângulo do plano  $xy$  paralelo aos eixos coordenados e que contenha a região  $D$  (ver, **Fig. 8.2**). Podemos subdividir  $R$  em pequenos retângulos (através de partições como vimos em nossa primeira aula)  $\Delta_{ij}$  de área  $\Delta x_i \Delta y_j$ . Podemos aproximar (ai está a argumentação heurística) a pequena área da superfície  $S$ , denotada  $\Delta \sigma_{ij}$  cuja projeção é o pequeno retângulo  $\Delta_{ij}$  pela parte do plano tangente a  $S$  no ponto  $(x_i, y_j, f(x_i, y_j))$ , denotada  $\Delta P_{ij}$ , que tem a forma de um paralelogamo, (ver, **Fig. 8.2**) cuja projeção no plano  $xy$  é também o pequeno retângulo  $\Delta_{ij}$   $\vec{p} \cdot \nabla f$ . A área de  $\Delta P_{ij}$  é, de modo geral, maior que a área de

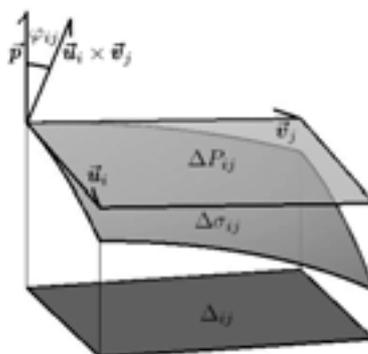


Figura 8.2: Detalhe do elemento de área  $\Delta\sigma_{ij}$

$\Delta_{ij}$  (a área da sombra é sempre maior ou igual à área do objeto). Da geometria vetorial  $|\vec{u}_i \times \vec{v}_j \cdot \vec{p}|$  é a área da projeção do paralelogramo  $\Delta P_{ij}$  onde  $\vec{p}$  é a normal a  $\Delta_{ij}$  (no caso para projeções no plano  $xy$   $\vec{p} = \vec{k}$  mas, deixaremos  $\vec{p}$  nas fórmulas caso seja escolhido outro plano de projeção).

$$|\vec{u}_i \times \vec{v}_j \cdot \vec{p}| = \Delta_{ij}$$

Também da geometria vetorial temos:

$$|\vec{u}_i \times \vec{v}_j \cdot \vec{p}| = |\vec{u}_i \times \vec{v}_j| \cdot |\vec{p}| \cdot |\cos(\varphi_{ij})| = \Delta_{ij}$$

onde  $\varphi_{ij}$  é o ângulo formado pelo vetor normal  $\vec{p}(x_i, y_j)$  e o vetor  $\vec{u}_i \times \vec{v}_j$ .

Como, da geometria vetorial, (ver em livros de Cálculo Avançado)

$|\vec{u}_i \times \vec{v}_j| = \Delta P_{ij}$  e  $|\vec{p}| = 1$ , temos:

$$\Delta P_{ij} = \frac{\Delta_{ij}}{|\cos(\varphi)|}$$

Como cada pedaço  $\Delta P_{ij}$  aproxima o pedaço da superfície  $\Delta\sigma_{ij}$  então a soma:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \Delta P_{ij} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\Delta_{ij}}{|\cos(\varphi_{ij})|}$$

aproxima a área de  $S$ . Um refinamento da partição de  $D \subset xy$  melhora a aproximação e podemos então (argumentação heurística) escrever:

$$Are(S) = \iint_D \frac{1}{|\cos(\varphi)|} dx dy$$

Para uma superfície dada por  $f(x, y, z) = c$ , temos  $|\nabla f \cdot \vec{p}| = |\nabla f| \cdot |\vec{p}| \cdot |\cos(\varphi)|$  e como  $|\vec{p}| = 1$  portanto:

$$Are(S) = \iint_S d\sigma = \iint_D \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \vec{p}|} dA$$

Por outro lado podemos estender a argumentação e determinar a integral de uma função  $g : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$  definida sobre a superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$  na forma:

$$\iint_S g(x, y, z) d\sigma = \iint_D g(x, y, z) \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \vec{p}|} dA$$

Vamos a um exemplo para ilustrar os conceitos acima expostos.

**Exemplo 8.3.** Considere a superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$  dada por  $z = a + x^2 + y^2$ , cuja  $z = a$  projeção no plano  $xy$  é a região  $D \subset xy$  dada por  $x^2 + y^2 \leq b^2$  e determine sua área (ver **Fig. 8.3**).

**SOLUÇÃO:** Deixamos como a primeira atividade mostrar que:

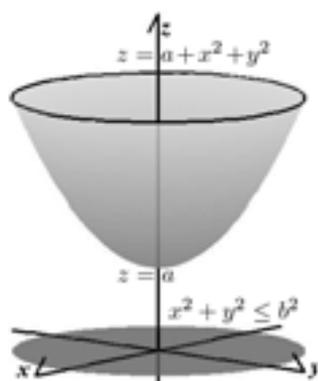


Figura 8.3: Parabolóide  $z = a + x^2 + y^2$

se a superfície é dada por  $z = f(x, y)$  projetada no plano  $xy$  em  $D \subset xy$  sua área é dada por:

$$Are(S) = \int \int_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy$$

Como  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$  temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y \end{aligned}$$

Daí, substituindo na expressão da área temos:

$$\begin{aligned} Are(S) &= \int \int_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy \\ &= \int \int_{x^2+y^2 \leq b^2} \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1} dx dy \end{aligned}$$

Usando so sistema de coordenadas polares,  $x = r \cos(\vartheta)$  e  $r \sin(\vartheta)$ , para o cálculo da integral dupla temos para a projeção  $x^2 + y^2 \leq b^2$  os seguintes limites  $r = \begin{cases} b \\ 0 \end{cases}$  e  $\vartheta = \begin{cases} 2\pi \\ 0 \end{cases}$  e podemos reescrever a integral dupla como:

$$\begin{aligned} Are(S) &= \int_0^{2\pi} \int_0^b \sqrt{(2r \cos(\vartheta))^2 + (2r \sin(\vartheta))^2 + 1} r dr d\vartheta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^b \sqrt{4r^2 \cos^2(\vartheta) + 4r^2 \sin^2(\vartheta) + 1} r dr d\vartheta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^b \sqrt{4r^2 + 1} r dr d\vartheta \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis  $z = 4r^2 + 1$  temos:  $\frac{dz}{dr} = 8r$  e os limites de integração  $r = \begin{cases} b \\ 0 \end{cases}$  passa a  $z = \begin{cases} 4b^2 + 1 \\ 1 \end{cases}$  e podemos

reescrever a integral dupla como:

$$Are(D) = \int_0^{2\pi} \int_1^{4b^2+1} \sqrt{z} dz d\vartheta$$

Integrando primeiro em  $z$  depois em  $\vartheta$  temos:

$$\begin{aligned} Are(D) &= \int_0^{2\pi} \int_1^{4b^2+1} \sqrt{z} dz d\vartheta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{z^3} \Big|_1^{4b^2+1} d\vartheta \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} (\sqrt{(4b^2+1)^3} - 1) d\vartheta \\ &= \frac{2}{3} (\sqrt{(4b^2+1)^3} - 1) \vartheta \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{4\pi}{3} (\sqrt{(4b^2+1)^3} - 1) \end{aligned}$$

#### 8.4 Massa, Momento de massa e Centro de Massa de Superfícies de Casca Fina em $\mathbb{R}^3$

Seja uma superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$  de casca fina dada por  $f(x, y, z) = c$  e com densidade superficial  $\varrho : S \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ , a massa, o momento de massa em relação aos planos  $yz$ ,  $xz$  e  $xy$  são dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} M(S) &= \int \int_S \varrho(x, y, z) d\sigma = \int \int_D \varrho(x, y, z) \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \bullet \vec{p}|} dA \\ M_{yz}(S) &= \int \int_S \varrho(x, y, z) x d\sigma = \int \int_D \varrho(x, y, z) x \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \bullet \vec{p}|} dA \\ M_{xz}(S) &= \int \int_S \varrho(x, y, z) y d\sigma = \int \int_D \varrho(x, y, z) y \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \bullet \vec{p}|} dA \\ M_{xy}(S) &= \int \int_S \varrho(x, y, z) z d\sigma = \int \int_D \varrho(x, y, z) z \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \bullet \vec{p}|} dA \end{aligned}$$

O centro de massa, denotado  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , é dado por:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{M_{yz}(S)}{M(S)} = \frac{\int \int_D \varrho(x, y, z)x \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \bullet \vec{p}} dA}{\int \int_D \varrho(x, y, z) \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \bullet \vec{p}} dA} \\ \bar{y} &= \frac{M_{xz}(S)}{M(S)} = \frac{\int \int_D \varrho(x, y, z)y \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \bullet \vec{p}} dA}{\int \int_D \varrho(x, y, z) \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \bullet \vec{p}} dA} \\ \bar{z} &= \frac{M_{xy}(S)}{M(S)} = \frac{\int \int_D \varrho(x, y, z)z \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \bullet \vec{p}} dA}{\int \int_D \varrho(x, y, z) \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \bullet \vec{p}} dA}\end{aligned}$$

Os momentos de inércia com relação aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  são dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned}I_x(S) &= \int \int_D \varrho(x, y, z)(y^2 + z^2) \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \bullet \vec{p}} dA \\ I_y(S) &= \int \int_D \varrho(x, y, z)(x^2 + z^2) \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \bullet \vec{p}} dA \\ I_z(S) &= \int \int_D \varrho(x, y, z)(x^2 + y^2) \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \bullet \vec{p}} dA\end{aligned}$$

Vamos ilustrar com um exemplo. Considere a casca fina descrita pela superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$  dada pela parte do cone  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  que situa-se acima do plano  $z = 0$  e abaixo do plano  $z = a$ , cuja densidade é constante e igual a  $\varrho$  e determine seu centro de massa (ver **Fig. 8.4**).

**SOLUÇÃO:** Em primeiro lugar determinaremos a massa da casca fina, levando em conta que a projeção de  $S \subset \mathbb{R}^3$  no plano  $xy$  é a região circular  $D \subset xy$  dada por:  $x^2 + y^2 \leq a^2$ .

Para o caso  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$  e  $\vec{p} = \vec{k}$ , daí, seu gradiente será:

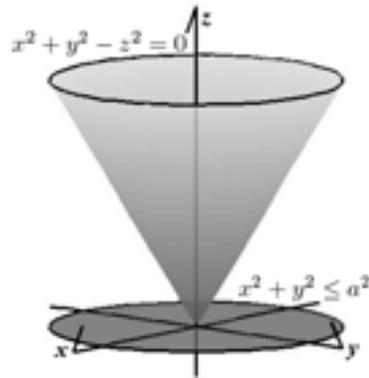


Figura 8.4: Cone  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

$$\nabla f = -2x\vec{i} - 2y\vec{j} - 2z\vec{k}$$

E temos:

$$|\nabla f \cdot \vec{p}| = 2z$$

$$|\nabla f| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2x^2 + 2y^2}$$

A massa da casca fina será:

$$\begin{aligned} M(S) &= \iint_D \rho \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \vec{p}|} dA \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \rho \frac{\sqrt{2x^2 + 2y^2}}{2z} dx dy \\ &= \rho \frac{\sqrt{2}}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \frac{\sqrt{z^2}}{z} dx dy \\ &= \rho \frac{\sqrt{2}}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} dx dy \end{aligned}$$

Usando so sistema de coordenadas polares,  $x = r \cos(\vartheta)$  e  $r \sin(\vartheta)$ , para o cálculo da integral dupla temos para a projeção  $x^2 + y^2 \leq a^2$  os seguintes limites  $r = \begin{cases} a \\ 0 \end{cases}$  e  $\vartheta = \begin{cases} 2\pi \\ 0 \end{cases}$  e podemos reescrever

a integral dupla como:

$$\begin{aligned}
 M(S) &= \varrho \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a r dr d\vartheta \\
 &= \varrho \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} \left. \frac{r^2}{2} \right|_0^a d\vartheta \\
 &= \varrho \frac{a^2 \sqrt{2}}{4} \int_0^{2\pi} d\vartheta \\
 &= \varrho \frac{\sqrt{2}}{4} \vartheta \Big|_0^{2\pi} \\
 &= \pi \varrho \frac{a^2 \sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

Para determinar o centro de massa temos que determinar apenas  $M_{xy}$  pois, pela simetria da superfície e como  $\varrho$  é constante temos que  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ .

O momento de massa  $M_{xy}$  da casca fina será:

$$\begin{aligned}
 M_{xy}(S) &= \int \int_D \varrho z \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \bullet \vec{p}|} dA \\
 &= \int \int_{x^2+y^2 \leq a^2} \varrho z \frac{\sqrt{2x^2+2y^2}}{2z} dx dy \\
 &= \varrho \frac{\sqrt{2}}{2} \int \int_{x^2+y^2 \leq a^2} z dx dy \\
 &= \varrho \frac{\sqrt{2}}{2} \int \int_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{x^2+y^2} dx dy
 \end{aligned}$$

Usando so sistema de coordenadas polares,  $x = r \cos(\vartheta)$  e  $r \sin(\vartheta)$ , para o cálculo da integral dupla temos para a projeção  $x^2 + y^2 \leq a^2$  os seguintes limites  $r = \begin{cases} a \\ 0 \end{cases}$  e  $\vartheta = \begin{cases} 2\pi \\ 0 \end{cases}$  e podemos reescrever

a integral dupla como:

$$\begin{aligned}
 M_{xy}(S) &= \rho \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{(r \cos(\vartheta))^2 + (r \sin(\vartheta))^2} r dr d\vartheta \\
 &= \rho \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{r^2 \cos^2(\vartheta) + r^2 \sin^2(\vartheta)} r dr d\vartheta \\
 &= \rho \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{r^2} r dr d\vartheta \\
 &= \rho \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 dr d\vartheta \\
 &= \rho \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} \left. \frac{r^3}{3} \right|_0^a d\vartheta \\
 &= \rho \frac{a^2 \sqrt{2}}{6} \int_0^{2\pi} d\vartheta \\
 &= \rho \frac{\sqrt{2}}{6} \vartheta \Big|_0^{2\pi} \\
 &= \pi \rho \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}
 \end{aligned}$$

O valor de  $\bar{z}$  será dado por:

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}(S)}{M(S)} = \frac{\pi \rho \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}}{\pi \rho \frac{a^2 \sqrt{2}}{2}} =$$

## 8.5 Superfícies Parametrizadas

Nesta seção veremos como calcular integrais de superfícies para superfícies parametrizadas.

Seja uma superfície lisa  $S \subset \mathbb{R}^3$  parametrizada por:  $x = \hat{x}(u, v)$ ,  $y = \hat{y}(u, v)$  e  $z = \hat{z}(u, v)$ ,  $\forall (u, v) \in [a, b] \times [c, d]$  onde  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$  possuem derivadas contínuas com relação a  $u$  e a  $v$ . Podemos representar a superfície pelo vetor posição  $\vec{r}(u, v) = \hat{x}(u, v)\vec{i} + \hat{y}(u, v)\vec{j} + \hat{z}(u, v)\vec{k}$ . Representaremos as derivadas do vetor  $r$  com relação a  $u$  e a  $v$  respectivamente por  $\vec{r}_u$ ,  $\vec{r}_v$ . Consideraremos em  $R = [a, b] \times [c, d]$  as quatro retas  $u = u_0$ ,  $u = u_0 + \Delta u$ ,  $v = v_0$  e

$v = v_0 + \Delta v$   $u = u_0 + \Delta u$  e denotamos  $\Delta_{uv}$  o pequeno retângulo formado pela intersecção das quatro retas (ver **Fig. 8.8**). O pe-

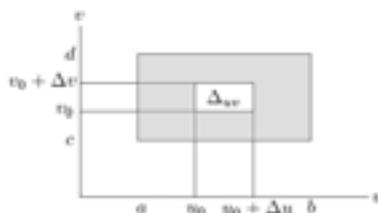


Figura 8.5: Domínio da parametrização

queno retângulo  $\Delta_{uv}$  é mapeado pela parametrização no pequeno elemento de área  $\Delta\sigma_{uv}$  sobre a superfície  $S$ . O paralelogramo formado pelos vetores  $\Delta u\vec{r}_u$  e  $\Delta v\vec{r}_v$  aproximam (por falta) o elemento de área  $\Delta\sigma_{uv}$  (ver **Fig. 8.6**). A área do paralelogramo é dada por:

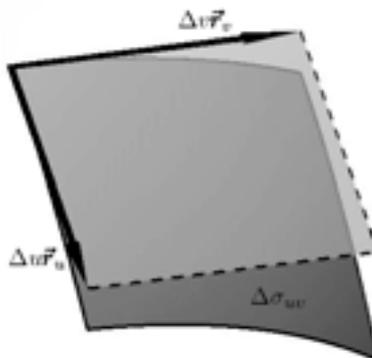


Figura 8.6: Elemento de área  $\Delta\sigma_{uv}$  em  $S$ .

$$|\Delta u\vec{r}_u \times \Delta v\vec{r}_v| = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\Delta u\Delta v.$$

A suposição de que  $S$  é uma superfície lisa garante que o produto vetorial  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$  não é o vetor nulo e portanto a área do pequeno

paralelogramo também não é nula. Podemos então fazer um partição da região  $R$  do plano  $uv$  e mapeando-a pela parametrização sobre a superfície  $S$ . Aproximando cada  $\Delta\sigma_{uv}$  pela área do paralelogramo associado podemos aproximar a área de  $S$  pela soma de Riemann:

$$\sum_u \sum_v |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \Delta u \Delta v.$$

Fazendo  $\Delta u$  e  $\Delta v$  tenderem a zero independentemente, a continuidade das derivadas  $\vec{r}_v$  do vetor posição garante que a soma de Riemann aproxime-se da integral dupla que dá a área  $Are(S)$  da superfície  $S$  i.e.

$$Are(S) = \int_a^b \int_c^d |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv.$$

Esta argumentação heurística nos permite estender os conceitos acima desenvolvidos para definir a integral de uma função  $f : S \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$  definida sobre a superfície  $S$  da seguinte forma:

**Definição 8.1.** Sejam  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície lisa definida parametricamente por  $\vec{r}(u, v) = \hat{x}(u, v)\vec{i} + \hat{y}(u, v)\vec{j} + \hat{z}(u, v)\vec{k}$ ,  $\forall (u, v) \in [a, b] \times [c, d]$  e  $f : S \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$  uma função de valores reais definida sobre  $S$  então, a integral de  $f$  sobre  $S$  será:

$$\int \int_S f(x, y, z) d\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \int_c^d f(\hat{x}(u, v), \hat{y}(u, v), \hat{z}(u, v)) |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv.$$

Um conceito, vindo da Física, muito importante é o do fluxo de um campo vetorial através de uma superfície no espaço. Como exemplo temos o fluxo de massa (massa por unidade de tempo por unidade de área) de um fluido que é calculado através do seu campo de velocidade e da sua densidade de massa. Vamos à definição:

**Definição 8.2.** Sejam  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície lisa no espaço e  $\vec{F} : S \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$  uma função de valores vetoriais. Definimos o

fluxo de  $\vec{F}$  através de  $S$ , denotado  $\phi(\vec{F})$ , por:

$$\phi(\vec{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \int \int_S \vec{F}(x, y, z) \bullet \vec{n} d\sigma.$$

Onde  $n$  é a normal unitária em  $S$ .

**OBS 8.1.** Alternativamente, se  $S \subset \mathbb{R}^3$  é lisa e definida parametricamente por  $\vec{r}(u, v) = \hat{x}(u, v)\vec{i} + \hat{y}(u, v)\vec{j} + \hat{z}(u, v)\vec{k}$ ,  $\forall (u, v) \in [a, b] \times [c, d]$  e  $\vec{F} : S \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$  uma função de valores vetoriais. O fluxo de  $\vec{F}$  através de  $S$ , é dado por:

$$\phi(\vec{F}) = \int_a^b \int_c^d \vec{F}(\hat{x}(u, v), \hat{y}(u, v), \hat{z}(u, v)) \bullet \vec{n} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv.$$

Como podemos calcular o vetor normal por  $\vec{n} = \frac{1}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)$  a integral para o fluxo do campo vetorial  $\vec{F}$  através da superfície  $S$  pode ser reescrita como:

$$\phi(\vec{F}) = \int_a^b \int_c^d \vec{F}(\hat{x}(u, v), \hat{y}(u, v), \hat{z}(u, v)) \bullet (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) dudv.$$

Vejamos um exemplo envolvendo a determinação do fluxo de um campo vetorial através de uma superfície no espaço.

**Exemplo 8.4.** Determine o fluxo do campo vetorial  $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$  dado por  $\vec{F}(x, y, z) = z\vec{i} + z\vec{j} + xy\vec{k}$  através da superfície do parabolóide  $z = a^2 - x^2 - y^2$ , que fica acima do plano  $z = 0$  (ver **Fig. 8.7**). **SOLUÇÃO:** Começaremos por parametrizar a superfície do parabolóide fazendo  $\hat{x} = v \cos(u)$ ,  $\hat{y} = v \sin(u)$  e  $z = a^2 - v^2$ . Desta forma o vetor posição para a superfície fica expresso por:

$$\vec{r}(u, v) = v \cos(u)\vec{i} + v \sin(u)\vec{j} + (a^2 - v^2)\vec{k}.$$



Figura 8.7: Parabolóide  $z = a^2 - x^2 - y^2$ .

As derivadas parciais do vetor posição  $\vec{r}$  com relação a  $u$  e a  $v$  são:

$$\begin{cases} \vec{r}_u = -v \sin(u)\vec{i} + v \cos(u)\vec{j} + 0\vec{k} \\ \vec{r}_v = \cos(u)\vec{i} + \sin(u)\vec{j} - 2v\vec{k} \end{cases}$$

Podemos calcular  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$  operacionalmente por:

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v \stackrel{\text{op}}{=} \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -v \sin(u) & v \cos(u) & 0 \\ \cos(u) & \sin(u) & -2v \end{vmatrix}$$

Calculando o determinante temos:

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = -2v^2 \sin(u)\vec{i} + 2v^2 \sin(u)\vec{j} - v\vec{k}$$

O campo vetorial  $\vec{F}$  sobre a superfície pode ser escrito como:

$$\vec{F}(u, v) = (a^2 - v^2)\vec{i} + (a^2 - v^2)\vec{j} + v^2 \sin(u) \cos(u)\vec{k}.$$

Fazendo o produto escalar do campo vetorial  $\vec{F}$  por  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$  temos:

$$\vec{F} \bullet (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) = -2v^2(a^2 - v^2) \sin(u) + 2v^2(a^2 - v^2) \sin(u) - v^3 \sin(u) \cos(u)$$

Simplificando e calculando o fluxo do campo vetorial  $\vec{F}$  sobre a superfície  $S$  temos:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{F}) &= \int_0^a \int_{-\pi}^{+\pi} -v^3 \sin(u) \cos(u) dudv \\ &= \int_0^a -v^3 \frac{\sin^2(u)}{2} \Big|_{-\pi}^{+\pi} dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^a -v^3 (\sin^2(+\pi) - \sin^2(-\pi)) dv \\ &= 0\end{aligned}$$

### 8.6 Conclusão

Na aula de hoje, vimos como integrar funções definidas sobre uma superfície no espaço. Funções escalares de valores reais ao longo de superfícies no espaço com as quais podemos determinar área, massa, momento de massa, centro de massa momento de inércia de uma superfície representando uma casca fina. Vimos também como calcular integrais de campos vetoriais (funções vetoriais) definidos sobre uma superfície no espaço, que essencialmente, os conceitos por trás da integração de campos vetoriais como o fluxo através de superfícies estão intimamente ligados à Física.



### RESUMO

Caros alunos, em nossa aula de hoje, sobre integrais de funções definidas sobre superfícies no espaço, tanto funções escalares quanto campos vetoriais o conteúdo visto pode ser resumido como:

**Área de uma Superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$** 

Sejam  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície dada por  $f(x, y, z) = c$  cuja projeção em um dos planos coordenados seja  $D$  e  $\vec{p}$  a normal a  $D$ . A área da superfície  $S$  é dada por:

$$Area(S) = \int \int_S d\sigma = \int \int_D \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \vec{p}|} dA$$

**Integral de Superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$** 

Sejam  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície dada por  $f(x, y, z) = c$  cuja projeção em um dos planos coordenados seja  $D$  e  $\vec{p}$  a normal a  $D$  e  $g : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$  uma função de valores reais cujo domínio é a superfície  $S$ . A integral de  $g$  sobre a superfície  $S$  é dada por:

$$\int \int_S g(x, y, z) d\sigma = \int \int_D g(x, y, z) \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \vec{p}|} dA$$

**Massa e Momento de Massa de uma Superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$** 

Se a superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$  representa uma casca fina de densidade superficial  $\varrho : S \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^+$  então, a massa, momento de massa relativo aos planos coordenados  $yz$ ,  $xz$  e  $xy$ , são dados respectivamente por:

$$\begin{aligned} M(S) &= \int \int_S \varrho(x, y, z) d\sigma = \int \int_D \varrho(x, y, z) \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \vec{p}|} dA \\ M_{yz}(S) &= \int \int_S \varrho(x, y, z) x d\sigma = \int \int_D \varrho(x, y, z) x \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \vec{p}|} dA \\ M_{xz}(S) &= \int \int_S \varrho(x, y, z) y d\sigma = \int \int_D \varrho(x, y, z) y \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \vec{p}|} dA \\ M_{xy}(S) &= \int \int_S \varrho(x, y, z) z d\sigma = \int \int_D \varrho(x, y, z) z \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \vec{p}|} dA \end{aligned}$$

**Centro de Massa de uma Superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$** 

Se a superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$  representa uma casca fina de densidade

superficial  $\varrho : S \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^+$  então, O centro de massa da casca fina, denotado  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , é dado por:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{M_{yz}(S)}{M(S)} = \frac{\int \int_D \varrho(x, y, z) x \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \bullet \vec{p}} dA}{\int \int_D \varrho(x, y, z) \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \bullet \vec{p}} dA} \\ \bar{y} &= \frac{M_{xz}(S)}{M(S)} = \frac{\int \int_D \varrho(x, y, z) y \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \bullet \vec{p}} dA}{\int \int_D \varrho(x, y, z) \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \bullet \vec{p}} dA} \\ \bar{z} &= \frac{M_{xy}(S)}{M(S)} = \frac{\int \int_D \varrho(x, y, z) z \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \bullet \vec{p}} dA}{\int \int_D \varrho(x, y, z) \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \bullet \vec{p}} dA}\end{aligned}$$

### Momento de Inércia de uma Superfície $S \subset \mathbb{R}^3$

Se a superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$  representa uma casca fina de densidade superficial  $\varrho : S \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^+$  então, os momentos de inércia com relação aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  são dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned}I_x(S) &= \int \int_D \varrho(x, y, z)(y^2 + z^2) \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \bullet \vec{p}} dA \\ I_y(S) &= \int \int_D \varrho(x, y, z)(x^2 + z^2) \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \bullet \vec{p}} dA \\ I_z(S) &= \int \int_D \varrho(x, y, z)(x^2 + y^2) \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \bullet \vec{p}} dA\end{aligned}$$

### Fluxo de um Campo Vetorial Através de uma Superfície

$pmb S \subset \mathbb{R}^3$

Sejam  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície lisa no espaço e  $\vec{F} : S \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$  uma função de valores vetoriais. Definimos o fluxo de  $\vec{F}$  através de  $S$ , denotado  $\phi(\vec{F})$ , por:

$$\phi(\vec{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \int \int_S \vec{F}(x, y, z) \bullet \vec{n} d\sigma.$$

Onde  $n$  é a normal unitária em  $S$ .

### Área de uma Superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ Parametrizada

Sejam  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície lisa definida parametricamente por  $\vec{r}(u, v) = \hat{x}(u, v)\vec{i} + \hat{y}(u, v)\vec{j} + \hat{z}(u, v)\vec{k}$ ,  $\forall (u, v) \in [a, b] \times [c, d]$  então, a área de  $S$  será:

$$Area(S) = \int_a^b \int_c^d |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv.$$

### Integral de Superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ Parametrizada

Sejam  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície lisa definida parametricamente por  $\vec{r}(u, v) = \hat{x}(u, v)\vec{i} + \hat{y}(u, v)\vec{j} + \hat{z}(u, v)\vec{k}$ ,  $\forall (u, v) \in [a, b] \times [c, d]$  e  $f : S \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$  uma função de valores reais definida sobre  $S$  então, a integral de  $f$  sobre  $S$  será:

$$\int \int_S f(x, y, z) d\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \int_c^d f(\hat{x}(u, v), \hat{y}(u, v), \hat{z}(u, v)) |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv.$$

### Fluxo de um Campo Vetorial Através de uma Superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ Parametrizada

Se  $S \subset \mathbb{R}^3$  é lisa e definida parametricamente por  $\vec{r}(u, v) = \hat{x}(u, v)\vec{i} + \hat{y}(u, v)\vec{j} + \hat{z}(u, v)\vec{k}$ ,  $\forall (u, v) \in [a, b] \times [c, d]$  e  $\vec{F} : S \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$  uma função de valores vetoriais. O fluxo de  $\vec{F}$  através de  $S$ , é dado por:

$$\phi(\vec{F}) = \int_a^b \int_c^d \vec{F}(\hat{x}(u, v), \hat{y}(u, v), \hat{z}(u, v)) \bullet \vec{n} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv.$$

Como podemos calcular o vetor normal por  $\vec{n} = \frac{1}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)$  a integral para o fluxo do campo vetorial  $\vec{F}$  através da superfície  $S$  pode ser reescrita como:



$$\phi(\vec{F}) = \int_a^b \int_c^d \vec{F}(\hat{x}(u, v), \hat{y}(u, v), \hat{z}(u, v)) \bullet (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) dudv.$$

## PRÓXIMA AULA

Em nossa próxima aula veremos dois importantíssimos teoremas do Cálculo. São eles o “Teorema de Green” e “Teorema de Stokes”. Dizem respeito a integração de campos vetoriais ao longo de curvas fechadas no plano (caso do teorema de Green) e de curvas fechadas no espaço (caso do teorema de Stokes).



## ATIVIDADES

Deixamos como atividades as seguintes questões:

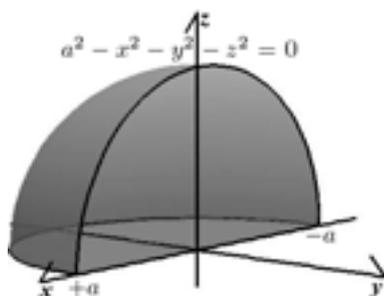
**ATIV. 8.1.** Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície dada por  $z = f(x, y)$  cuja projeção no plano  $xy$  é  $D \subset xy$ . Mostre que sua área pode ser dada por:

$$\int \int_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy$$

**Comentário:** Volte ao texto e reveja com calma e atenção as demonstrações acima, elas lhe servirão de guia.

**ATIV. 8.2.** Seja uma casca fina dada pela superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$  descrita por  $f(x, y, z) = a^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$ ,  $y < 0$  e  $z > 0$  (ver Fig. 8.8) e determine seu centro de gravidade.

**Comentário:** Observe que a superfície tem simetria e como a densidade é constante temos:  $\bar{x} = 0$  e  $\bar{y} = -\bar{z}$ .

Figura 8.8: Cone  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ **LEITURA COMPLEMENTAR**

ÁVILA, Geraldo, Cálculo 3: Funções de Várias Variáveis, Livros Técnicos e Científicos Editora, São Paulo, 3ª edição, 1982.

LEITHOLD, Louis, O Cálculo com Geometria Analítica. Volume 2, Editora Harbra, 1994.

STEWART, James, Cálculo. Volume 3, 5ª edição, Editora CENGAGE Learning, 2009.

SWOKOWSKI, Earl E., Cálculo com Geometria Analítica, Volume 2, 2ª edição, Makron Books do Brasil SP, 1994.

THOMAS, George B., Cálculo, Volume 2, 10ª, Addison Wesley, 2003.

KAPLAN, Wilfred, Cálculo Avançado Vol.1 e vol.2 Editora Edgard Blücher 1991.// SPIEGEL, Murray R. Cálculo Avançado, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1971.

BOUCHARA, Jacques, Cálculo Integral Avançado, EDUSP, 2006.