

---

## Teorema de Green e Teorema de Stokes

### **META:**

Apresentar o teorema de Green e o teorema de Stokes e algumas de suas aplicações.

### **OBJETIVOS:**

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Enunciar o teorema de Green e o teorema de Stokes e determinar o fluxo rotacional de um dado campo vetorial.

### **PRÉ-REQUISITOS**

Os conhecimentos de integrais de funções de valores reais com domínio em  $\mathbb{R}$ , da disciplina Cálculo I, aula 07 e aula 08.



## 9.1 Introdução

Caros alunos, nosso tema de hoje: “Teorema de Green e Teorema de Stokes”, visa apresentar dois dos mais importantes teoremas do Cálculo, envolvendo integrais de linha. O teorema de Green, converte integrais de linha de curvas fechadas no plano em integrais duplas e o teorema de Stokes, que é uma generalização do teorema de Green, converte integrais de linha de campos vetoriais sobre curvas fechadas no espaço em integrais de superfície.

## 9.2 Preliminares

Antes de partirmos para a demonstração do teorema de Green é necessária a introdução de alguns conceitos, que estabeleceram a definição de dois novos operadores diferenciais vetoriais. O primeiro deles é o conceito de “densidade de fluxo em um ponto”.

Seja  $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  um campo vetorial (velocidade de escoamento de um fluido) onde:  $\vec{F}(x, y) = f_1(x, y)\vec{i} + f_2(x, y)\vec{j}$ ,

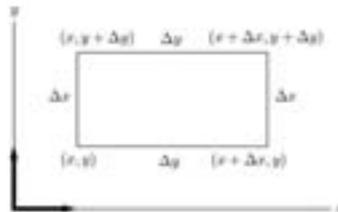


Figura 9.1: Fluxo de  $\vec{F}$  através do Retângulo

$f_1, f_2 : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  são contínuas e deriváveis em  $D$ . Consideremos um pequeno retângulo contido em  $D$  com vértices em:

### BIOGRAFIA

George Green nasceu em Sneinton, condado de Nottinghamshire 14 de Julho de 1793 e morreu em Nottingham, 31 de Maio de 1841, foi um matemático e físico inglês. Na sua obra *Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of Electricity and Magnetism* (1828) introduziu a noção de função potencial no estudo dos campos magnéticos. O teorema de Green, que demonstrou em 1828 facilitou bastante o estudo das funções. Wikipedia

$(x, y)$ ,  $(x + \Delta x, y)$ ,  $(x, y + \Delta y)$  e  $(x + \Delta x, y + \Delta y)$  (ver **Fig. 9.1**). A taxa com que  $\vec{F}$  atravessa as arestas do retângulo são:

$$\text{em cima} : \vec{F}(x, y + \Delta y) \bullet \Delta x \vec{j} = f_2(x, y + \Delta y) \Delta x$$

$$\text{em baixo} : \vec{F}(x, y) \bullet (-\Delta x) \vec{j} = -f_2(x, y) \Delta x$$

$$\text{à direita} : \vec{F}(x + \Delta x, y) \bullet \Delta y \vec{i} = f_1(x + \Delta x, y) \Delta y$$

$$\text{à esquerda} : \vec{F}(x, y) \bullet (-\Delta y) \vec{i} = -f_1(x, y) \Delta y$$

O fluxo total através das arestas do retângulo é:

$$(f_1(x + \Delta x, y) - f_1(x, y)) \Delta y + (f_2(x, y + \Delta y) - f_2(x, y)) \Delta x$$

Como podemos escrever as seguintes aproximações:  $f_1(x + \Delta x, y) - f_1(x, y) \approx \frac{\partial f_1}{\partial x} \Delta x$  e  $f_2(x, y + \Delta y) - f_2(x, y) \approx \frac{\partial f_2}{\partial y} \Delta y$  temos a seguinte aproximação para o fluxo de  $\vec{F}$  através das arestas do retângulo:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} \Delta x \Delta y + \frac{\partial f_2}{\partial y} \Delta y \Delta x$$

Dividindo pela área do retângulo, que é dada por:  $\Delta x \Delta y$  teremos uma aproximação para a densidade de fluxo de  $\vec{F}$  no retângulo.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

Agora vamos à argumentação heurística em que fazemos  $\Delta x$  e  $\Delta y$  tenderem a zero e podemos definir a densidade de fluxo do campo vetorial  $\vec{F}$  no ponto  $(x, y)$ .

**Definição 9.1.** Seja  $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  um campo vetorial onde:  $\vec{F}(x, y) = f_1(x, y) \vec{i} + f_2(x, y) \vec{j}$ ,  $f_1, f_2 : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  são contínuas e deriváveis em  $D$ . Definimos a densidade de fluxo do campo vetorial

$\vec{F}$  no ponto  $(x, y)$ , denominado divergente de  $\vec{F}$ , denotado  $Div\vec{F}$  ou  $\nabla \bullet \vec{F}$  por:

$$\nabla \bullet \vec{F} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

Completaremos com “densidade de circulação em um ponto” os dois novos conceitos necessários ao estabelecimento do teorema de Green. Seja  $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  um campo vetorial (velocidade de escoamento de um fluido) onde:  $\vec{F}(x, y) = f_1(x, y)\vec{i} + f_2(x, y)\vec{j}$ ,

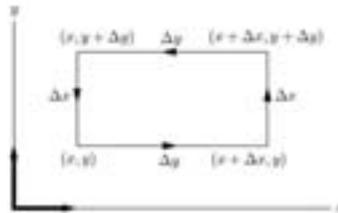


Figura 9.2: Circulação de  $\vec{F}$  ao longo do Retângulo

$f_1, f_2 : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  são contínuas e deriváveis em  $D$ . Consideremos um pequeno retângulo contido em  $D$  com vértices em:  $(x, y)$ ,  $(x + \Delta x, y)$ ,  $(x, y + \Delta y)$  e  $(x + \Delta x, y + \Delta y)$  (ver **Fig. 9.2**). A soma das taxas de escoamento dos quatro lados do retângulo mede a circulação de  $\vec{F}$  no sentido anti-horário. As taxas de escoamento ao longo de cada lado do retângulo são dadas por:

- em cima :  $\vec{F}(x, y + \Delta y) \bullet (-\Delta x\vec{i}) = -f_1(x, y + \Delta y)\Delta x$
- em baixo :  $\vec{F}(x, y) \bullet \Delta x\vec{i} = f_1(x, y)\Delta x$
- à direita :  $\vec{F}(x + \Delta x, y) \bullet \Delta y\vec{j} = f_2(x + \Delta x, y)\Delta y$
- à esquerda :  $\vec{F}(x, y) \bullet (-\Delta y)\vec{j} = -f_2(x, y)\Delta y$

O escoamento total ao longo das arestas do retângulo é:

$$(f_2(x + \Delta x, y) - f_2(x, y))\Delta y + (-f_2(x, y + \Delta y) + f_2(x, y))\Delta x$$

Como podemos escrever as seguintes aproximações:  $f_1(x + \Delta x, y) - f_1(x, y) \approx \frac{\partial f_1}{\partial x} \Delta x$  e  $f_2(x, y + \Delta y) - f_2(x, y) \approx \frac{\partial f_2}{\partial y} \Delta y$  temos a seguinte aproximação para o escoamento de  $\vec{F}$  ao longo das arestas do retângulo:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} \Delta x \Delta y - \frac{\partial f_1}{\partial y} \Delta y \Delta x$$

Dividindo pela área do retângulo, que é dada por:  $\Delta x \Delta y$  teremos uma aproximação para a densidade da circulação de  $\vec{F}$  no retângulo.

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}$$

Fazendo  $\Delta x$  e  $\delta y$  tenderem independentemente a zero podemos definir a densidade de circulação no ponto  $(x, y)$  por:

**Definição 9.2.** Seja  $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  um campo vetorial onde:  $\vec{F}(x, y) = f_1(x, y)\vec{i} + f_2(x, y)\vec{j}$ ,  $f_1, f_2 : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  são contínuas e deriváveis em  $D$ . Definimos a componente  $\vec{k}$  da densidade de circulação do campo vetorial  $\vec{F}$  no ponto  $(x, y)$ , denominado rotacional de  $\vec{F}$ , denotado  $Rot\vec{F}$  ou  $\nabla \times \vec{F}$  por:

$$\nabla \times \vec{F} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}$$

### 9.3 Teorema de Green

O teorema de Green pode ser exposto de duas formas na primeira diz que o fluxo exterior de um campo vetorial através de

## Teorema de Green e Teorema de Stokes

---

uma curva fechada simples no plano é igual a integral dupla do divergente do campo vetorial sobre a região  $D$  limitada pela curva, i.e.

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \int \int_D \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) dx dy$$

Na outra forma diz que a circulação no sentido anti-horário de um campo de força ao longo de uma curva simples e fechada no plano é igual a integral dupla da componente  $\vec{k}$  do rotacional do campo vetorial sobre a região  $D$  limitada pela curva.

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{t} ds = \int \int_D \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy$$

Vamos agora e sem muita demora à demonstração do teorema de Green.

**Teorema 9.1.** *Sejam  $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  um campo vetorial dado por:  $\vec{F}(x, y) = f_1(x, y)\vec{i} + f_2(x, y)\vec{j}$ ,  $f_1, f_2 : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  são contínuas e deriváveis em  $D$  e  $C \subset D \subset \mathbb{R}^2$  uma curva simple, fechada tal que retas paralelas aos eixos coordenados não a cortem*

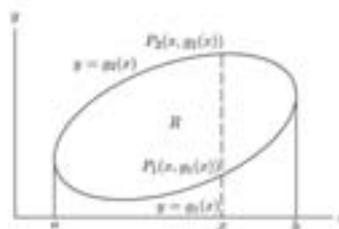


Figura 9.3: Teorema de Green

em mais que dois pontos e Seja  $R$  a região limitada por  $C$  então:

$$\oint_C f_1 dx + f_2 dy = \int \int_R \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy$$

**PROVA:** Observando a **Fig. 9.3** vemos  $C$  formada por duas partes orientadas dadas por:

$$\begin{cases} C_1 : y = g_1(x) & a \leq x \leq b \\ C_2 : y = g_2(x) & b \geq x \geq a \end{cases}$$

Tomando um ponto arbitrário  $x \in (a, b)$  podemos integrar  $\frac{\partial f_1}{\partial y}$  em relação a  $y$  nos limites  $y = g_1(x)$  até  $y = g_2(x)$ . A saber:

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial f_1}{\partial y} dy = f_1(x, y) \Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} = f_1(x, g_2(x)) - f_1(x, g_1(x))$$

Podemos então integrar este resultado na variável  $x$  nos limites  $x = a$  até  $x = b$  e temos:

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial f_1}{\partial y} dy dx &= \int_a^b (f_1(x, g_2(x)) - f_1(x, g_1(x))) dx \\ &= - \int_b^a (f_1(x, g_2(x)) dx - \int_a^b f_1(x, g_1(x)) dx \\ &= - \int_{C_2} f_1 dx - \int_{C_1} f_1 dx \\ &= - \oint_C f_1 dx \end{aligned}$$

Que podemos reescrever como:

$$\oint_C f_1 dx = \int \int_R - \frac{\partial f_1}{\partial y} dx dy$$

Por outro lado, observando a **Fig. 9.4** a curva  $C$  pode ser dada por:

$$\begin{cases} C_1 : x = h_1(y) & c \leq y \leq d \\ C_2 : x = h_2(y) & d \geq y \geq c \end{cases}$$

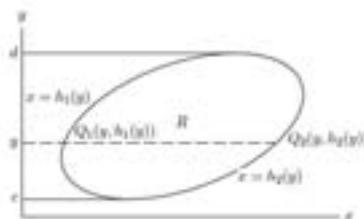


Figura 9.4: Teorema de Green

Tomando um ponto arbitrário  $y \in (c, d)$  podemos integrar  $\frac{\partial f_2}{\partial x}$  em relação a  $x$  nos limites  $x = h_1(y)$  até  $x = h_2(y)$ . A saber:

$$\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial f_2}{\partial x} dx = f_2(x, y) \Big|_{h_1(y)}^{h_2(y)} = f_2(h_2(y), y) - f_2(h_1(y), y)$$

Podemos então integrar este resultado na variável  $y$  nos limites  $y = c$  até  $y = d$  e temos:

$$\begin{aligned} \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial f_2}{\partial x} dx dy &= \int_c^d (f_2(h_2(y), y) - f_2(h_1(y), y)) dy \\ &= \int_c^d f_2(h_2(y), y) dy + \int_d^c f_2(h_1(y), y) dy \\ &= - \int_{C_2} f_2 dy - \int_{C_1} f_2 dy \\ &= \oint_C f_2 dy \end{aligned}$$

Que podemos reescrever como:

$$\oint_C f_2 dy = \int \int_R \frac{\partial f_2}{\partial x} dx dy$$

Adicionando os dois resultados temos:

$$\oint_C f_1 dx + f_2 dy = \int \int_R \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy \quad \square$$

### 9.4 Estendendo o Teorema de Green para Outras Regiões

Caros alunos, muito embora a demonstração acima do teorema de Green comportem um grande número de curvas, muitas outras não se enquadram na categoria que goza da propriedade de que toda reta

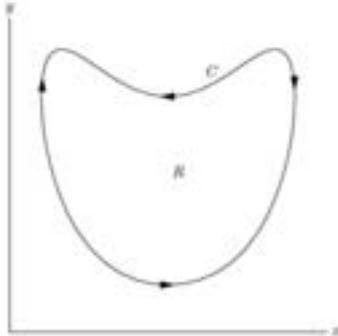


Figura 9.5: Curva

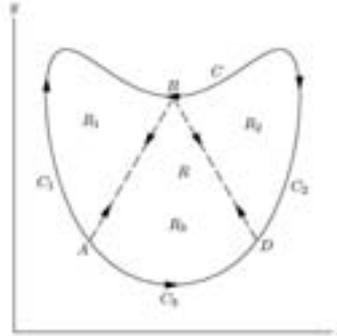


Figura 9.6: Partição

paralela aos eixos coordenados a cortem em no máximo dois pontos. É o caso da curva dada na **Fig. 9.5** visto que retas paralelas ao eixo  $x$  podem corta-la em até 4 pontos na parte de cima da curva. Nestes casos podemos estender o teorema de Green com o seguinte procedimento: Traçamos retas unindo pontos específicos da curva  $C$  como na **Fig. 9.6** os pontos  $A$ ,  $B$  e  $D$  de modo que

as curvas formadas pela união de  $C_1$  com a reta  $\overline{AB}$  bem como a união da curva  $C_2$  com a reta  $\overline{BD}$  e a curva  $C_3$  com as retas  $\overline{DB}$  e  $\overline{BA}$  orientadas todas no sentido anti-horário contornando as regiões  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$ , respectivamente. As curvas acima descritas todas satisfazem a condição da demonstração do teorema de Green acima i.e. toda reta paralela aos eixos coordenados as cortam em apenas dois pontos. Desta forma aplicando o teorema de Green a cada uma das curvas temos:

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} f_1 dx + f_2 dy + \int_{\overline{AB}} f_1 dx + f_2 dy &= \iint_{R_1} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy \\ \oint_{C_2} f_1 dx + f_2 dy + \int_{\overline{BD}} f_1 dx + f_2 dy &= \iint_{R_2} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy \\ \oint_{C_3} f_1 dx + f_2 dy + \int_{\overline{BA}} f_1 dx + f_2 dy + \int_{\overline{DB}} f_1 dx + f_2 dy &= \\ \int \int_{R_3} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

Adicionando todas as equações e levando em conta que:

$$\begin{aligned} \int_{\overline{AB}} f_1 dx + f_2 dy &= - \int_{\overline{BA}} f_1 dx + f_2 dy \\ \int_{\overline{BD}} f_1 dx + f_2 dy &= - \int_{\overline{DB}} f_1 dx + f_2 dy, \end{aligned}$$

temos:

$$\int_{C_1 \cup C_2 \cup C_3} f_1 dx + f_2 dy = \iint_{R_1 \cup R_2 \cup R_3} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy$$

E como  $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$  e  $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$  podemos finalmente escrever que para a curva  $C$  da **Fig. 9.6** vale o teorema de Green:

$$\int_C f_1 dx + f_2 dy = \iint_R \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

Uma outra categoria de regiões que não satisfaz a exigência da demonstração do teorema de Green são regiões  $R$  com buracos

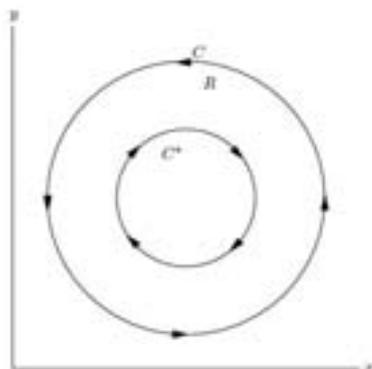


Figura 9.7: Curva

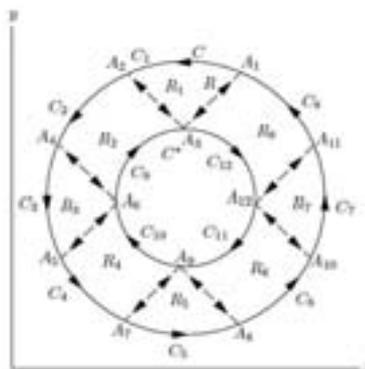


Figura 9.8: Partição

como a da **Fig. 9.7** onde a curva  $C^*$  que define a região do buraco está orientada no sentido horário. Uma solução está na partição dada na **Fig. 9.8** onde repartimos  $R$  em oito sub-regiões  $R_1$  a  $R_8$  da seguinte forma:  $R_1$  limitada pelas curvas  $C_1$ ,  $\overline{A_2A_3}$  e  $\overline{A_3A_1}$ ,  $R_2$  limitada pelas curvas  $C_2$ ,  $\overline{A_4A_6}$ ,  $C_9$  e  $\overline{A_3A_2}$ ,  $R_3$  limitada pelas curvas  $C_3$ ,  $\overline{A_5A_6}$  e  $\overline{A_6A_4}$ ,  $R_4$  limitada pelas curvas  $C_4$ ,  $\overline{A_7A_9}$ ,  $C_{10}$  e  $\overline{A_6A_5}$ ,  $R_5$  limitada pelas curvas  $C_5$ ,  $\overline{A_8A_9}$  e  $\overline{A_9A_7}$ ,  $R_6$  limitada pelas curvas  $C_6$ ,  $\overline{A_{10}A_{12}}$ ,  $C_{11}$  e  $\overline{A_9A_8}$ ,  $R_7$  limitada pelas curvas  $C_7$ ,  $\overline{A_{11}A_{12}}$  e  $\overline{A_{12}A_{10}}$ ,  $R_8$  limitada pelas curvas  $C_8$ ,  $\overline{A_1A_3}$ ,  $C_{12}$  e  $\overline{A_{12}A_{11}}$ . Em cada uma das oito regiões o teorema de Green pode ser aplicado individualmente e levando em conta que as integrais ao longo dos segmentos de reta se anulam mutuamente podemos escrever para a região  $R$  que:

$$\int_C f_1 dx + f_2 dy + \int_{C^*} f_1 dx + f_2 dy = \int \int_R \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy$$

Podemos então relaxar um pouco as exigências do teorema de

Green e reformula-lo como:

**Teorema 9.2.** *Sejam  $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  um campo vetorial dado por:  $\vec{F}(x, y) = f_1(x, y)\vec{i} + f_2(x, y)\vec{j}$ ,  $f_1, f_2 : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  são contínuas e deriváveis em  $D$  e  $C \subset D \subset \mathbb{R}^2$  uma curva simple, fechada e Seja  $R$  a região limitada por  $C$  então:*

$$\oint_C f_1 dx + f_2 dy = \int \int_R \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy$$

### 9.5 Verificação do Teorema de Green

Caros alunos, nesta seção faremos uma verificação do teorema de Green. A saber:

**Exemplo 9.1.** Considere a campo vetorial  $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  dado por  $\vec{F}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\vec{j}$  e a região com buraco limitadas pelos círculos (ver **Fig. 9.9**):

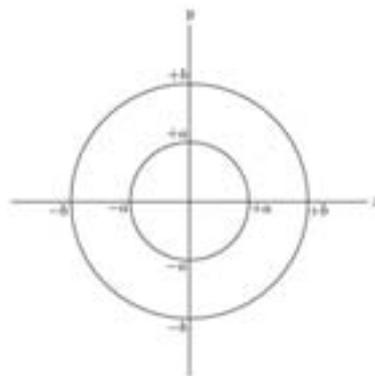


Figura 9.9: Verificação do teorema de Green

$$C_1 : x = b \cos(t) \quad y = b \sin(t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$C_2 : x = a \cos(t) \quad y = -a \sin(t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

onde  $a < b$ ,  $C_1$  é percorrida no sentido anti-horário e  $C_2$  no sentido horário. Verificar o teorema de Green para os dados campo vetorial e região.

**SOLUÇÃO:** Como o campo vetorial  $\vec{F}(x, y) = -x^2y\vec{i} + xy^2\vec{j}$  temos suas componentes dadas por  $f_1(x, y) = -x^2y$  e  $f_2(x, y) = xy^2$  e temos as derivadas  $\frac{\partial f_1}{\partial y}$  e  $\frac{\partial f_2}{\partial x}$  dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial y} &= \frac{(x^2 + y^2)(-1) - (-y)(2y)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial x} &= \frac{(x^2 + y^2)(+1) - (-x)(2x)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Portanto  $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$  e temos:

$$\int \int_R \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

Calculando a integral de linha em  $C_1$  temos:

$$\begin{aligned}
 \oint_{C_1} f_1 dx + f_2 dy &= \oint_{C_1} \frac{1}{x^2 + y^2} (x dx - y dy) \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{b^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)}{b^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)} dt + \\
 &= \int_0^{2\pi} dt \\
 &= t \Big|_0^{2\pi} \\
 &= 2\pi
 \end{aligned}$$

E calculando a integral de linha em  $C_2$  temos:

$$\begin{aligned}
 \oint_{C_2} f_1 dx + f_2 dy &= \oint_{C_1} \frac{1}{x^2 + y^2} (x dx - y dy) \\
 &= - \int_0^{2\pi} \frac{a^2 \cos^2(t) + a^2 \sin^2(t)}{a^2 \cos^2(t) + a^2 \sin^2(t)} dt + \\
 &= - \int_0^{2\pi} dt \\
 &= -t \Big|_0^{2\pi} \\
 &= -2\pi
 \end{aligned}$$

Temos então que:

$$\oint_{C_1} f_1 dx + f_2 dy + \oint_{C_2} f_1 dx + f_2 dy = 0$$

E o teorema de Green é verificado:

$$\oint_{C_1} f_1 dx + f_2 dy + \oint_{C_2} f_1 dx + f_2 dy = \int \int_R \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy \quad \square$$

## BIOGRAFIA

Sir George Gabriel Stokes nasceu em Skreen, Condado de Sligo, 13 de Agosto de 1819 e morreu em Cambridge, 1 de Fevereiro de 1903, foi um matemático e físico irlandês que se distinguiu pelas suas contribuições na dinâmica de fluidos (por exemplo, as leis de Navier-Stokes), na óptica e física matemática (Teorema de Stokes). Wikipedia

## 9.6 Teorema de Stokes

Caros alunos, nesta seção trataremos do Teorema de Stokes, que é uma generalização do Teorema de Green. Porém, devido a dificuldade das técnicas usada em sua demonstração e que escapam ao escopo deste curso, nos limitaremos a apresentá-lo e fazer uma verificação do mesmo.

Começamos por estender a o conceito de densidade de circulação (rotacional). Como vimos anteriormente a componente  $\vec{k}$  da densidade de circulação de um campo vetorial bi-dimensional  $\vec{F}(x, y) = f_1(x, y)\vec{i} + f_2(x, y)\vec{j}$  é dada por:  $\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}$ . Em dimensão três, a densidade de circulação (rotacional) é um vetor normal ao plano de circulação cuja direção satisfaz a regra da mão direita. A taxa de rotação do fluido é medida pelo módulo do vetor rotacional. Vamos à definição:

**Definição 9.3.** Seja  $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$  uma campo vetorial tridimensional dado por:  $\vec{F}(x, y, z) = f_1(x, y, z)\vec{i} + f_2(x, y, z)\vec{j} + f_3(x, y, z)\vec{k}$  onde  $f_1, f_2, f_3 : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$  são funções contínuas e com derivadas parciais de primeira ordem contínuas. O rotacional de  $\vec{F}$ , denotado  $Rot\vec{F}$  ou  $\nabla \times \vec{F}$ , é definido por:

$$\nabla \times \vec{F} \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Vamos agora enunciar o Teorema de Stokes que nos diz que sob certas condições a circulação de um campo vetorial ao longo da borda de uma superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$  no sentido anti-horário com relação ao campo de vetores normais a  $S$  é igual a integral de superfície do componente normal do rotacional.

**Teorema 9.3.** *Sejam  $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$  um campo vetorial tridimensional cujas componentes são contínuas e tem derivadas parciais de primeira ordem contínuas e  $S \subset D \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície lisa com borda  $C \subset D \subset \mathbb{R}^3$  lisa então, a circulação do campo vetorial  $\vec{F}$  ao longo da borda  $C$  de  $S$ , no sentido anti-horário em relação aos vetores normais unitários de  $S$  é igual a integral de superfície de da componente normal do rotacional i.e.:*

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{n} d\sigma$$

**OBS 9.1.** Se duas superfícies orientadas diferentes  $S_1$  e  $S_2$  tem a mesmas bordas  $C$  as integrais de superfície da componente normal do rotacional de um campo vetorial que atravessa ambas são iguais:

$$\int_{S_1} (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{S_2} (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{n} d\sigma$$

**OBS 9.2.** Se  $C$  é uma curva lisa do plano  $xy$ , orientada no sentido anti-horário e  $R$  a região de  $xy$  delimitada por  $C$  o vetor normal a  $R$  é  $\vec{n} = \vec{k}$ . Daí, temos:

$$\nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n} = \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{k} = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}$$

E o teorema de Stokes pode ser escrito como:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \int_R \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy$$

Que é o teorema de Green. Daí, se diz que o teorema de Green é um caso particular do teorema de Stokes.

## 9.7 Verificação do Teorema de Stokes

Caros alunos, nesta seção faremos uma verificação do teorema de Stokes. A saber:

$x$   $y$   $z$

**Exemplo 9.2.** Considere a campo vetorial  $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$  dado por  $\vec{F}(x, y, z) = (yz + xz)\vec{i} + (xz + xy)\vec{j} + (xy - y^2/2)\vec{k}$  e a Curva  $C$  na qual o plano  $z = a > 0$  corta o cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  (ver Fig. 9.10) e determine a circulação de  $\vec{F}$  ao longo de  $C$ .

**SOLUÇÃO:** Para determinação da circulação de  $\vec{F}$  ao longo

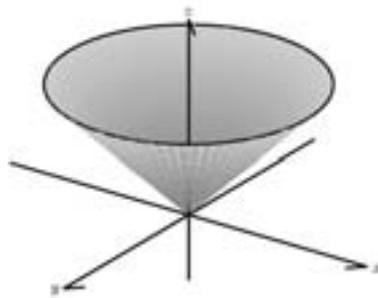


Figura 9.10: Verificação do teorema de Stokes

de  $C$  usaremos o teorema de Stokes. Percorrer  $C$  no sentido anti-horário visto de cima corresponde a tomar a normal  $\vec{n}$  ao cone apontando para dentro.

O cone pode ser parametrizado por:

$$\vec{r}(r, \vartheta) = ar \cos(\vartheta)\vec{i} + ar \sin(\vartheta)\vec{j} + ar\vec{k}, \forall r \in [0, 1], \forall \vartheta \in [0, 2\pi]$$

As derivadas parciais  $\vec{r}_r$  e  $\vec{r}_\vartheta$  são dadas por:

$$\vec{r}_r = a \cos(\vartheta)\vec{i} + a \sin(\vartheta)\vec{j} + a\vec{k}$$

$$\vec{r}_\vartheta = -ar \sin(\vartheta)\vec{i} + ar \cos(\vartheta)\vec{j} + 0\vec{k}$$

Daí, o produto vetorial  $\vec{r}_r \times \vec{r}_\vartheta$  pode ser calculado como:

$$\vec{r}_r \times \vec{r}_\vartheta = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a \cos(\vartheta) & a \sin(\vartheta) & a \\ -ar \sin(\vartheta) & ar \cos(\vartheta) & 0 \end{vmatrix}$$

Daí, temos:

$$\vec{r}_r \times \vec{r}_\vartheta = -ar \cos(\vartheta)\vec{i} - ar \sin(\vartheta)\vec{j} + ar\vec{k}$$

Como, para uma superfície parametrizada temos:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_a^b \int_c^d \vec{F} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) dudv$$

Calculando o rotacional de  $\vec{F}$  temos:

$$\nabla \times \vec{F} = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz + xz & xz + x & xy - y^2/2 \end{vmatrix}$$

Daí, temos:

$$\nabla \times \vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}$$

E como  $\nabla \times \vec{F}(x, y, z) = -y\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}$  temos:

$$\begin{aligned}\vec{F} \bullet (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) &= +a^2 r^2 \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) - a^2 r^2 \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) + ar \\ &= a^2 r^2\end{aligned}$$

E podemos calcular a integral de superfície como:

$$\int \int_S \vec{F} \bullet \vec{n} d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^1 ar dr d\vartheta = a\pi$$

Usando o teorema de Stokes para calcular a circulação temos:

$$\oint_C \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int \int_S (\nabla \times \vec{F}) \bullet \vec{n} d\sigma = a\pi \quad \square$$

## 9.8 Conclusão

Na aula de hoje, vimos dois grandes teoremas do Cálculo. O teorema de Green que relaciona o fluxo exterior através de uma curva lisa do plano de um campo vetorial com a integral dupla do divergente do campo vetorial sobre a região delimitada pela curva. O teorema de Stokes, que relaciona a circulação de um campo de vetores tridimensional ao longo da borda de uma superfície no espaço com a integral de superfície da componente normal do rotacional do campo vetorial.

### RESUMO

No nosso resumo de hoje constam as seguintes definições e teoremas:



### Densidade de Fluxo de um Campo Vetorial Bi-dimensional

Seja  $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  um campo vetorial onde:  $\vec{F}(x, y) = f_1(x, y)\vec{i} + f_2(x, y)\vec{j}$ ,  $f_1, f_2 : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  são contínuas e deriváveis em  $D$ . Definimos a densidade de fluxo do campo vetorial  $\vec{F}$  no ponto  $(x, y)$ , denominado divergente de  $\vec{F}$ , denotado  $Div\vec{F}$  ou  $\nabla \bullet \vec{F}$  por:

$$\nabla \bullet \vec{F} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

### Densidade de Circulação de um Campo Vetoreial Bi-dimensional

Seja  $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  um campo vetorial onde:  $\vec{F}(x, y) = f_1(x, y)\vec{i} + f_2(x, y)\vec{j}$ ,  $f_1, f_2 : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  são contínuas e deriváveis em  $D$ . Definimos a componente  $\vec{k}$  da densidade de circulação do campo vetorial  $\vec{F}$  no ponto  $(x, y)$ , denominado rotacional de  $\vec{F}$ , denotado  $Rot\vec{F}$  ou  $\nabla \times \vec{F}$  por:

$$\nabla \times \vec{F} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}$$

### Teorema de Green

Sejam  $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  um campo vetorial dado por:  $\vec{F}(x, y) = f_1(x, y)\vec{i} + f_2(x, y)\vec{j}$ ,  $f_1, f_2 : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  são contínuas e deriváveis em  $D$  e  $C \subset D \subset \mathbb{R}^2$  uma curva simple, fechada e Seja  $R$  a região limitada por  $C$  então:

$$\oint_C f_1 dx + f_2 dy = \int \int_R \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy$$

### Rotacional

Seja  $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$  uma campo vetorial tridimensional dado por:  $\vec{F}(x, y, z) = f_1(x, y, z)\vec{i} + f_2(x, y, z)\vec{j} + f_3(x, y, z)\vec{k}$  onde  $f_1, f_2, f_3 : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$  são funções contínuas e com derivadas parciais de

primeira ordem contínuas. O rotacional de  $\vec{F}$ , denotado  $Rot\vec{F}$  ou  $\nabla \times \vec{F}$ , é definido por:

$$\nabla \times \vec{F} \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \vec{k}$$

### Teorema de Stokes

Sejam  $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$  um campo vetorial tridimensional cujas componentes são contínuas e tem derivadas parciais de primeira ordem contínuas e  $S \subset D \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície lisa com borda  $C \subset D \subset \mathbb{R}^3$  lisa então, a circulação do campo vetorial  $\vec{F}$  ao longo da borda  $C$  de  $S$ , no sentido anti-horário em relação aos vetores normais unitários de  $S$  é igual a integral de superfície de da componente normal do rotacional i.e.:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{n} d\sigma$$

### PRÓXIMA AULA

Na próxima aula estudaremos outro importante teorema do Cálculo atribuído ao Matemático alemão Johann Carl Friedrich Gauss resumidamente denominado de “Teorema da Divergência”

### ATIVIDADES

Deixamos como atividades as seguintes questões:

**ATIV. 9.1.** Sejam  $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  o campo vetorial bi-dimensional dado por:  $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} + 0\vec{j}$  e  $R \subset \mathbb{R}^2$  a região limitada pelo círculo



$C \subset \mathbb{R}^2$  dado por:  $x^2 + y^2 = a^2$ . Verifique o teorema de Green para este campo vetorial e esta região.

**Comentário:** Volte ao texto e reveja com calma e atenção o texto e as verificações acima, elas lhe servirão de guia.

**ATIV. 9.2.** Sejam  $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  o campo vetorial tridimensional dado por:  $\vec{F}(x, y) = x^2\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$  e  $R \subset \mathbb{R}^2$  a região limitada pela elipse  $C \subset \mathbb{R}^2$  dado por:  $a^2x^2 + y^2 = a^2$ . Use o teorema de Stokes e determine a circulação do campo  $\vec{F}$  ao longo da curva  $C$  no sentido anti-horário quando vista de cima.

**Comentário:** Volte ao texto e reveja com calma e atenção o texto e as verificações acima, elas lhe servirão de guia.



### LEITURA COMPLEMENTAR

ÁVILA, Geraldo, Cálculo 3: Funções de Várias Variáveis, Livros Técnicos e Científicos Editora, São Paulo, 3<sup>a</sup> edição, 1982.

LEITHOLD, Louis, O Cálculo com Geometria Analítica. Volume 2, Editora Harbra, 1994.

STEWART, James, Cálculo. Volume 3, 5<sup>a</sup> edição, Editora CENGAGE Learning, 2009.

SWOKOWSKI, Earl E., Cálculo com Geometria Analítica, Volume 2, 2<sup>a</sup> edição, Makron Books do Brasil SP, 1994.

THOMAS, George B., Cálculo, Volume 2, 10<sup>a</sup>, Addison Wesley, 2003.

KAPLAN, Wilfred, Cálculo Avançado Vol.1 e vol.2 Editora Edgard Blücher 1991.// SPIEGEL, Murray R. Cálculo Avançado, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1971.

BOUCHARA, Jacques, Cálculo Integral Avançado, EDUSP, 2006.