AULA

Teorema de Divergência 10

META:

Apresentar o teorema de Gauss e algumas de suas aplicações.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Enunciar o teorema de Gauss.

Determinar o divergente de um campo vetorial e determinar o fluxo de um campo vetorial através de uma superfície fechada em $\mathbb{R}^3$.

PRÉ-REQUISITOS

Os conhecimentos de integrais de funções de valores reais com domínio em $\mathbb{R}$, da disciplina Cálculo I e aula 08.

10.1 Introdução

Caros alunos terminamos aqui nosso curso de Cálculo III com o tema “Teorema da Divergência", atribuído ao Matemático alemão Johann Carl Friedrich Gauss e mais tarde atribuido também ao Matemático russo Mikhail Vasilievich Ostrogradsky. O teorema de Gauss, ou teorema da divergência, relaciona uma integral tripla num sólido de $D \subset \mathbb{R}^3$ com a integral sobre a superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ que é fronteira deste sólido.

BIOGRAFIA

Johann Carl Friedrich Gauss nasceu em Braunschweig, 30 de Abril de 1777 e morreu em Göttingen, 23 de Fevereiro de 1855, foi um matemático, astrônomo e físico alemão. Conhecido como o príncipe dos matemáticos. Muitos consideram Gauss o maior gênio da história da matemática. Seu QI foi estimado em cerca de 240. Wikipedia

10.2 Preliminares

Como preliminares pecisaremos apenas extender a definição de divergente de um campo vetorial bi-dimensional, visto na aula anterior, para o divergente de um campo vetorial tridimensional. Vamos logo à tarefa.

Definição 10.1. Seja $\vec{\boldsymbol{F}} : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ um campo vetorial tridimensional dado por $\vec{\boldsymbol{F}}(x,y,z) = f_1(x,y,z)\vec{\boldsymbol{i}} + f_2(x,y,z)\vec{\boldsymbol{j}} + f_3(x,y,z)\vec{\boldsymbol{k}}$ tal que suas componentes $f_1, f_2, f_3 : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ sejam contínuas e tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas em D. Definimos o divergente de $\vec{\boldsymbol{F}}$, denotado $Div\vec{\boldsymbol{F}}$ ou $\nabla \bullet \vec{\boldsymbol{F}}$, por:

$$Div\vec{\boldsymbol{F}} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

Exemplo 10.1. Seja $\vec{\boldsymbol{F}} : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ o campo vetorial tridimensional dado por $\vec{\boldsymbol{F}}(x,y,z) = x^2yz\vec{\boldsymbol{i}} + xy^2z\vec{\boldsymbol{j}} + xyz^2\vec{\boldsymbol{k}}$. O seu divergente será:

$$
\begin{aligned}
\nabla \bullet \vec{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2yz) + \frac{\partial}{\partial y}(xy^2z) + \frac{\partial}{\partial z}(xyz^2) \\
&= 2xyz + 2xyz + 2xyz \\
&= 6xyz
\end{aligned}
$$

10.3 Teorema da Divergência

Caros alunos, nesta seção vamos estudar a transformação de certas integrais de volume em integrais de superfícies que é o análogo no espaço do teorema de Green(em sua forma divergente) estudado na aula anterior. Como condições impostas primeiramente ao campo vetorial $\vec{F}$ é que ele tenha componentes contínuas e com derivadas parciais de primeira ordem contínuas o que já basta para o nosso propósito. Quanto a região $D \subset \mathbb{R}^3$, que chamaremos de simples, desejamos que ela tenha fronteira $S \subset \mathbb{R}^3$ seja regular e suave, que suas projeções S_{xy} no plano xy, S_{yz} no plano yz e S_{xz} no plano xz sejam regiões fechadas de $\mathbb{R}^2$ com fronteira suave e que retas paralelas aos eixos coordenados que atravessem suas projeções cortem S em no máximo dois pontos Uma tal região será aqui chamada de região simples. Um exemplo de tal região é a limitada pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Vamos ao enunciado e a demonstração do teorema da divergência.

Teorema 10.1. *Seja* $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ *um campo vetorial tridimensional dado por* $\vec{F}(x, y, z) = f_1(x, y, z)\vec{i} + f_2(x, y, z)\vec{j} + f_3(x, y, z)\vec{k}$ *tal que suas componentes* $f_1, f_2, f_3 : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ *sejam contínuas e tenham derivadas parciais de primeira ordem* *contínuas em D e $D \subset \mathbb{R}^3$ uma região do espaço regular e suave tal que sua fronteira fronteira $S \subset \mathbb{R}^3$ seja regular e suave, que suas projeções S_{xy} no plano xy, S_{yz} no plano yz e S_{xz} no plano xz sejam regiões fechadas de $\mathbb{R}^2$ com fronteira suave e que retas paralelas aos eixos coordenados que atravessem suas projeções cortem S em no máximo dois pontos (ver* **Fig. 10.1***) então:*

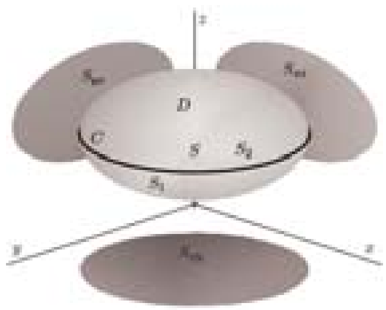

Figura 10.1: Teorema da divergência

$$\int\int\int_D \nabla \bullet \vec{\boldsymbol{F}} dxdydz = \int\int_S \vec{\boldsymbol{F}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}} d\sigma$$

PROVA: Quando projetamos uma região regular e simples D no plano xy, sua fronteira S consiste de duas partes S_1 e S_2 dadas pelas funções: $z_1(x,y)$ e $z_2(x,y)$ respectivamente (ver **Fig. 10.1**). Seja $f_3(x,y,z)$ uma função con tínua com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em D. Então:

$$\int\int\int_D \frac{\partial f_3}{\partial z} dVol = \int\int_{S_{xy}} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial f_3}{\partial z} dz$$

Integrando e substituindo os limites temos:

$$\begin{aligned}\int\int\int_D \frac{\partial f_3}{\partial z} dVol &= \int\int_{S_{xy}} f_3(x,y,z_2(x,y))dxdy - \\ &- \int\int_{S_{xy}} f_3(x,y,z_1(x,y))dxdy\end{aligned}$$

Seja $\vec{\boldsymbol{n}} = n_x\vec{\boldsymbol{i}} + n_y\vec{\boldsymbol{j}} + n_z\vec{\boldsymbol{k}}$ a normal a S em cada ponto $(x,y,z) \in S$ apontando para fora de D e seja γ o ângulo entre $\vec{\boldsymbol{n}}$ e $\vec{\boldsymbol{k}}$ desta forma temos: $\vec{\boldsymbol{n}} \bullet \vec{\boldsymbol{k}} = n_z = \cos(\gamma).|\vec{\boldsymbol{n}}|.|\vec{\boldsymbol{k}}|$ i.e. $\cos(\gamma) = n_z$ em S_2 e $\cos(\gamma) = -n_z$ em S_1. Daí, e do fato de que $dxdy = \cos(\gamma)d\sigma$ onde $d\sigma$ é o elemento de área em S, temos:

$$\int\int_{S_{xy}} f_3(x,y,z_2(x,y))dxdy = \int\int_{S_2} f_3 n_z d\sigma$$

e também:

$$\int\int_{S_{xy}} f_3(x,y,z_1(x,y))dxdy = -\int\int_{S_1} f_3 n_z d\sigma$$

Daí, e da expressão anterior temos:

$$\begin{aligned}\int\int\int_D \frac{\partial f_3}{\partial z} dVol &= \int\int_{S_2} f_3 n_z d\sigma + \int\int_{S_1} f_3 n_z d\sigma \\ &= \int\int_{S_2 \cup S_1} f_3 n_z d\sigma\end{aligned}$$

Como $S = S_2 \cup S_1$ temos:

$$\int\int\int_D \frac{\partial f_3}{\partial z} dVol = \int\int_S f_3 n_z d\sigma$$

De forma análoga, usando as projeções de D sobre os planos coordenados yz e xz podemos deduzir que:

$$\int\int\int_D \frac{\partial f_1}{\partial x} dVol = \int\int_S f_3 n_x d\sigma$$

e também:

$$\int\int\int_D \frac{\partial f_2}{\partial y} dVol = \int\int_S f_2 n_y d\sigma$$

Somando as três equações acima temos:

$$\int\int\int_D \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right) dVol = \int\int_S (f_1 n_x + f_2 n_y + f_3 n_z) d\sigma$$

Como $\vec{\boldsymbol{F}} = f_1 \vec{\boldsymbol{i}} + f_2 \vec{\boldsymbol{j}} + f_3 \vec{\boldsymbol{k}}$ temos:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{F}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}} &= f_1 n_x + f_2 n_y + f_3 n_z \\ \nabla \bullet \vec{\boldsymbol{F}} &= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{aligned}$$

E temos então:

$$\int\int\int_D \nabla \bullet \vec{\boldsymbol{F}} dVol = \int\int_S \vec{\boldsymbol{F}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}} d\sigma \ \square$$

10.4 Estendendo o Teorema da Divergência para outras Regiões

Caros alunos, muito embora a demonstração acima do teorema da divergência comportem um grande número de regiões D, muitas outras não se enquadram na categoria que goza da propriedade de ser uma região do espaço regular e suave tal que sua fronteira fronteira $S \subset \mathbb{R}^3$ seja regular e suave, que suas projeções S_{xy} no plano xy, S_{yz} no plano yz e S_{xz} no plano xz sejam regiões fechadas de $\mathbb{R}^2$

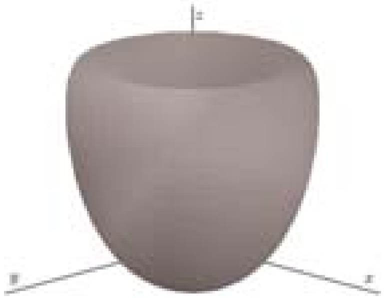

Figura 10.2: Teorema da divergência

com fronteira suave e que retas paralelas aos eixos coordenados que atravessem suas projeções cortem S em no máximo dois pontos. È o caso da região dada pela **Fig. 10.2**. Observando porém, que se a região D puder ser decomposta em um número finito de regiões simples, podemos escrever o teorema da divergência em cada uma das sub-regiões e somar o resultado, de forma que para a região D o teorema continue válido. Desta forma podemos enunciar uma forma mais ampla do teorema da divergência. A saber:

Teorema 10.2. *Seja* $\vec{\boldsymbol{F}} : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ *um campo vetorial tridimensional dado por* $\vec{\boldsymbol{F}}(x,y,z) = f_1(x,y,z)\vec{\boldsymbol{\imath}} + f_2(x,y,z)\vec{\boldsymbol{\jmath}} + f_3(x,y,z)\vec{\boldsymbol{k}}$ *tal que suas componentes* $f_1, f_2, f_3 : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ *sejam contínuas e tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas em* D *e* $D \subset \mathbb{R}^3$ *uma região do espaço regular e suave tal que possa ser subdividida em um número finito de regiões simples e sua fronteira fronteira* $S \subset \mathbb{R}^3$ *seja regular e suave, então:*

$$\int\int\int_D \nabla \bullet \vec{\boldsymbol{F}} dxdydz = \int\int_S \vec{\boldsymbol{F}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}} d\sigma$$

10.5 Algumas Aplicações do Teorema da Divergência

Caros alunos, nesta seção faremos algumas aplicações do teorema da divergência. A primeira é no calculo do fluxo exterior de um campo vetorial tridimensional, a segunda no cálculo do fluxo exterior do campo elétrico gerado por uma carga pontual através da superfície de uma esfera em cujo centro encontra-se a carga elétrica e a terceira na redução da forma integral de leis de balanço à sua forma diferencial pontual.

Exemplo 10.2. Sejam $\vec{\boldsymbol{F}} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ o campo vetorial tridimensional dado por: $\vec{\boldsymbol{F}}(x, y) = x\vec{\boldsymbol{i}} + y\vec{\boldsymbol{j}} + z\vec{\boldsymbol{k}}$ e D a região delimitada pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$. Determine o fluxo exterior de $\vec{\boldsymbol{F}}$ dado por $\int\int_S \vec{\boldsymbol{F}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}} d\sigma$ através da superfície da esfera.
Vamos ao calculo do fluxo exterior de um campo vetorial tridimensional.
SOLUÇÃO: Do teorema da divergência temos:

$$\int\int_S \vec{\boldsymbol{F}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}} d\sigma = \int\int \in \_D \nabla \bullet \vec{\boldsymbol{F}} dVol$$

Portanto basta calcular a integral tripla sobre a região da esfera do divergente de $\vec{\boldsymbol{F}}$.
Como $\vec{\boldsymbol{F}}(x, y) = x\vec{\boldsymbol{i}} + y\vec{\boldsymbol{j}} + z\vec{\boldsymbol{k}}$ seu divergente será:

$$\begin{aligned} \nabla \bullet \vec{\boldsymbol{F}} &= \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) \\ &= 3 \end{aligned}$$

Daí, temos:

$$\begin{aligned}\int\int_S \vec{F}\bullet\vec{n}d\sigma &= \int\int \in \_D3dVol \\ &= 3\int\int \in \_DdVol \\ &= 4\pi a^3 \; \square\end{aligned}$$

Vamos ao cálculo do fluxo exterior do campo elétrico gerado por uma carga pontual através de uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ em cujo interior encontra-se a carga elétrica.

Exemplo 10.3. O campo elétrico gerado por uma carga elétrica pontual q localizada na origem é dado por:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}|^3}\vec{r}$$

Como $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, colocando $\phi = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ temos:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\vec{F}$$

onde $\vec{F} = \dfrac{1}{\phi^3}\vec{r}$.

Podemos escrever o vetor $\vec{F}$ em suas componentes como:

$$\vec{F} = \frac{x}{\phi^3}\vec{i} + \frac{y}{\phi^3}\vec{j} + \frac{z}{\phi^3}\vec{k}$$

Calculando as derivadas parciais das componentes de $\vec{F}$ temos:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\phi^3}\right) = \frac{\phi^3 - 3x\phi^2\dfrac{\partial\phi}{\partial x}}{\phi^6}$$

Como $\phi = |\vec{\boldsymbol{r}}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ temos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{\phi}$$

Logo:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\phi^3}\right) = \frac{\phi^3 - 3x^2\phi}{\phi^6}$$

De modo análogo temos:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\phi^3}\right) = \frac{\phi^3 - 3y^2\phi}{\phi^6}$$

e também:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\phi^3}\right) = \frac{\phi^3 - 3z^2\phi}{\phi^6}$$

Somando as três equações temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\phi^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\phi^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\phi^3}\right) &= \frac{3\phi^3 - 3(x^2 + y^2 + z^2)\phi}{\phi^6} \\
&= \frac{3\phi^3 - 3\phi^2\phi}{\phi^6} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Logo como:

$$\nabla \bullet \vec{\boldsymbol{F}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\phi^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\phi^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\phi^3}\right) = 0$$

E também como $\nabla \bullet \vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\nabla \bullet \vec{\boldsymbol{F}}$ temos:

$$\nabla \bullet \vec{\boldsymbol{E}} = 0$$

Tomando $D*$ como a região entre S e uma esfera centrada na origem e cujo raio a seja suficiente para que S permaneça no interior da esfera eaplicando o teorema da divergência temos:

$$\int\int_{S\cup S_a} \vec{\boldsymbol{E}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}} d\sigma = \int\int\int_{D^*} \nabla \bullet \vec{\boldsymbol{E}} dVol = 0$$

Logo o fluxo de $\vec{\boldsymbol{E}}$ através de S no sentido que se afasta da origem é o mesmo que o fluxo de $\vec{\boldsymbol{E}}$ através de S_a no sentido que se afasta da origem.

Como fluxo de $\vec{\boldsymbol{E}}$ através de S_a no sentido que se afasta da origem é $\dfrac{q}{\epsilon_0}$ temos:

$$\int\int_{S} \vec{\boldsymbol{E}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}} d\sigma = \frac{q}{\epsilon_0} \ \square$$

Como última aplicação veremos como reduzir da forma integral para a forma diferencial pontual a equação de balanço de massa conhecida como Lei de Lavoisier.

Sejam $D \subset \mathbb{R}^3$ uma região regular e suave do espaço e $\vec{\boldsymbol{v}} : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ um campo de velocidade de um fluido cuja densidade de massa é dada por $\varrho : D \subset \mathbb{R}^r \mapsto \mathbb{R}^+$ e que preenche D. Em sua forma integral o balanço de massa estabelece que $\forall d^* \subset D \subset \mathbb{R}^3$ regular e suave com fronteira S^* regular e suave vale:

$$\frac{d}{dt}\int\int\int_{D^*} \varrho dVol + \int\int_{S^*} \varrho\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}} d\sigma = 0$$

onde a primeira integral representa a variação total da massa dentro da região D^* e a segunda representa a variação de massa que penetra em D^* pela superfície S^*.

Usando o teorema da divergência temos:

$$\int\int_{S^*} \varrho\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}} d\sigma = \int\int\int_{D^*} \nabla \bullet (\varrho\vec{\boldsymbol{v}}) dVol$$

Daí, tomando regiões D^* que não variem com o tempo

$$\frac{d}{dt}\int\int\int_{D^*} \varrho dVol = \int\int\int_{D^*} \frac{\partial \varrho}{\partial t} dVol$$

E podemos reformular a equação de balanço de massa para a forma:

$$\int\int\int_{D^*} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \bullet (\varrho \vec{\boldsymbol{v}})\right) dVol = 0$$

Como a integral acima vale $\forall D^* \subset D \subset \mathbb{R}^3$ podemos dividi-la por $Vol(D^*)$ fazer $Vol(D^*)$ tender a zero e usando o teorema do valor médio para integrais concluir que:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \bullet (\varrho \vec{\boldsymbol{v}}) = 0$$

Que a forma diferencial pontual da equação de balanço de massa.

10.6 Conclusão

Na aula de hoje, vimos um importante teorema do Cálculo denominado “Teorema da Divergência” atribuído aos Matemáticos Gauss e Ostrogradsky. Tem forte conotação física e utilizado para reduzir as leis de conservação de sua forma integral para forma diferencial pontual.

RESUMO

No nosso resumo de hoje constam as seguintes definições e teoremas:

Divergente de um Campo Vetorial Tridimensional

tridimensional dado por $\vec{\boldsymbol{F}}(x,y,z) = f_1(x,y,z)\vec{\boldsymbol{\imath}} + f_2(x,y,z)\vec{\boldsymbol{\jmath}} + f_3(x,y,z)\vec{\boldsymbol{k}}$ tal que suas componentes $f_1, f_2, f_3 : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ sejam contínuas e tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas em D. Definimos o divergente de $\vec{\boldsymbol{F}}$, denotado $Div\vec{\boldsymbol{F}}$ ou $\nabla \bullet \vec{\boldsymbol{F}}$, por:

$$Div\vec{\boldsymbol{F}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

Teorema da Divergência: Forma Restritiva

Seja $\vec{\boldsymbol{F}} : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ um campo vetorial tridimensional dado por $\vec{\boldsymbol{F}}(x,y,z) = f_1(x,y,z)\vec{\boldsymbol{\imath}} + f_2(x,y,z)\vec{\boldsymbol{\jmath}} + f_3(x,y,z)\vec{\boldsymbol{k}}$ tal que suas componentes $f_1, f_2, f_3 : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ sejam contínuas e tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas em D e $D \subset \mathbb{R}^3$ uma região do espaço regular e suave tal que sua fronteira fronteira $S \subset \mathbb{R}^3$ seja regular e suave, que suas projeções S_{xy} no plano xy, S_{yz} no plano yz e S_{xz} no plano xz sejam regiões fechadas de $\mathbb{R}^2$ com fronteira suave e que retas paralelas aos eixos coordenados que atravessem suas projeções cortem S em no máximo dois pontos então:

$$\int\int\int_D \nabla \bullet \vec{\boldsymbol{F}} dxdydz = \int\int_S \vec{\boldsymbol{F}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}} d\sigma$$

Teorema da Divergência: Forma mais Ampla

Seja $\vec{\boldsymbol{F}} : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ um campo vetorial tridimensional dado por $\vec{\boldsymbol{F}}(x,y,z) = f_1(x,y,z)\vec{\boldsymbol{\imath}} + f_2(x,y,z)\vec{\boldsymbol{\jmath}} + f_3(x,y,z)\vec{\boldsymbol{k}}$ tal que suas componentes $f_1, f_2, f_3 : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ sejam contínuas e tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas em D e $D \subset \mathbb{R}^3$ uma região do espaço regular e suave tal que possa ser subdividida em um número finito de regiões simples e sua fronteira fronteira $S \subset \mathbb{R}^3$ seja regular e suave, então:

$$\int\int\int_D \nabla \bullet \vec{\boldsymbol{F}} dxdydz = \int\int_S \vec{\boldsymbol{F}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}} d\sigma$$

ATIVIDADES

Deixamos como atividades as seguintes questões:

ATIV. 10.1. Sejam $\vec{\boldsymbol{F}} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ o campo vetorial tridimensional dado por: $\vec{\boldsymbol{F}}(x,y) = x^2\vec{\boldsymbol{\imath}} - 2xy\vec{\boldsymbol{\jmath}} + 3xz\vec{\boldsymbol{k}}$ e $D \subset \mathbb{R}^3$ a região limitada pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ e $z \geq 0$ (acima do plano $z = 0$). Use o teorema da divergência e determine o fluxo exterior através da fronteira da região D.

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção o texto e as aplicações acima, elas lhe servirão de guia.

ATIV. 10.2. Sejam $\vec{\boldsymbol{F}} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ o campo vetorial tridimensional dado por: $\vec{\boldsymbol{F}}(x,y) = x\vec{\boldsymbol{\imath}} + y\vec{\boldsymbol{\jmath}} + z\vec{\boldsymbol{k}}$ e suponha que a região $D \subset \mathbb{R}^3$ e sua fronteira $S \subset \mathbb{R}^3$ satisfaçam as hipóteses do teorema da divergência. Mostre que o volume $Vol(D)$ da região D é dado pela fórmula:

$$Vol(D) = \frac{1}{3}\int\int_S \vec{\boldsymbol{F}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}} d\sigma$$

.

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção o texto e as aplicações acima, elas lhe servirão de guia.

LEITURA COMPLEMENTAR

ÁVILA, Geraldo, Cálculo 3: Funções de Várias Variáveis, Livros Técnicos e Científicos Editora, São Paulo, 3ª edição, 1982.

LEITHOLD, Louis, O Cálculo com Geometria Analítica. Volume 2, Editora Harbra, 1994.

STEWART, James,Cálculo. Volume 3, 5ª edição, Editora CENGAGE Learning, 2009.

SWOKOWSKI, Earl E., Cálculo com Geometria Analítica, Volume 2, 2ª edição, Makron Books do Brásil SP, 1994.

THOMAS, George B., Cálculo, Volume 2, 10ª, Addilson Wesley, 2003.

KAPLAN, Wilfred, Cálculo Avançado Vol.1 e vol.2 Editora Edgard Blücher 1991.// SPIEGEL, Murray R. Cálculo Avançado, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1971.

BOUCHARA, Jacques, Cálculo Integral Avançado, EDUSP, 2006.