

# **Cálculo Numérico**

**Manuel Bernardino Lino Salvador**



**São Cristóvão/SE**  
**2009**

# Cálculo Numérico

**Elaboração de Conteúdo**  
Manuel Bernardino Lino Salvador

---

**Capa**  
Hermeson Alves de Menezes

---

Copyright © 2009, Universidade Federal de Sergipe / CESAD.  
Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização por escrito da UFS.

**FICHA CATALOGRÁFICA PRODUZIDA PELA BIBLIOTECA CENTRAL  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

S182c	Salvador, Manuel Bernardino Lino. Cálculo Numérico / Manuel Bernardino Lino Salvador -- São Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2009.
-------	---

1. Matemática 2. Cálculo. I. Título

CDU 517.2/.3

**Presidente da República**

Luiz Inácio Lula da Silva

**Chefe de Gabinete**

Ednalva Freire Caetano

**Ministro da Educação**

Fernando Haddad

**Coordenador Geral da UAB/UFS****Diretor do CESAD**

Antônio Ponciano Bezerra

**Secretário de Educação a Distância**

Carlos Eduardo Bielschowsky

**Vice-coordenador da UAB/UFS****Vice-diretor do CESAD**

Fábio Alves dos Santos

**Reitor**

Josué Modesto dos Passos Subrinho

**Vice-Reitor**

Angelo Roberto Antonioli

---

**Diretoria Pedagógica**

Clotildes Farias (Diretora)

Hérica dos Santos Mota

Iara Macedo Reis

Daniela Souza Santos

Janaina de Oliveira Freitas

**Núcleo de Avaliação**

Guilhermina Ramos (Coordenadora)

Carlos Alberto Vasconcelos

Elizabeth Santos

Marialves Silva de Souza

**Diretoria Administrativa e Financeira**

Edélzio Alves Costa Júnior (Diretor)

Sylvia Helena de Almeida Soares

Valter Siqueira Alves

**Núcleo de Serviços Gráficos e Audiovisuais**

Giselda Barros

**Núcleo de Tecnologia da Informação**

João Eduardo Batista de Deus Anselmo

Marcel da Conceição Souza

**Coordenação de Cursos**

Djalma Andrade (Coordenadora)

**Assessoria de Comunicação**

Guilherme Borba Gouy

**Núcleo de Formação Continuada**

Rosemeire Marcedo Costa (Coordenadora)

---

**Coordenadores de Curso**

Denis Menezes (Letras Portugues)

Eduardo Farias (Administração)

Haroldo Dorea (Química)

Hassan Sherafat (Matemática)

Hélio Mario Araújo (Geografia)

Lourival Santana (História)

Marcelo Macedo (Física)

Silmara Pantaleão (Ciências Biológicas)

**Coordenadores de Tutoria**

Edvan dos Santos Sousa (Física)

Geraldo Ferreira Souza Júnior (Matemática)

Janaina Couvo T. M. de Aguiar (Administração)

Priscilla da Silva Góes (História)

Rafael de Jesus Santana (Química)

Ronilse Pereira de Aquino Torres (Geografia)

Trícia C. P. de Santana (Ciências Biológicas)

Vanessa Santos Góes (Letras Portugues)

---

**NÚCLEO DE MATERIAL DIDÁTICO**

Hermeson Menezes (Coordenador)

Edvar Freire Caetano

Isabela Pinheiro Ewerton

Lucas Barros Oliveira

Neverton Correia da Silva

Nycolas Menezes Melo

Tadeu Santana Tartum

---

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

Cidade Universitária Prof. "José Aloísio de Campos"

Av. Marechal Rondon, s/n - Jardim Rosa Elze

CEP 49100-000 - São Cristóvão - SE

Fone(79) 2105 - 6600 - Fax(79) 2105- 6474



# Sumário

---

AULA 1	
Os números e o computador .....	01
AULA 2	
Erros.....	09
AULA 3	
Zeros de funções.....	25
AULA 4	
Zeros de funções (Continuação) .....	29
AULA 5	
Interpolação polinomial.....	36
AULA 6	
Interpolação polinomial.....	46
AULA 7	
Aproximação por Mínimos Quadrados .....	51
AULA 8	
Integração Numérica .....	55
AULA 9	
Solução de Sistemas Lineares .....	66
AULA 10	
Solução de Sistemas Lineares (continuação) .....	75

**Presidente da República**  
Luiz Inácio Lula da Silva

**Ministro da Educação**  
Fernando Haddad

**Secretário de Educação a Distância**  
Carlos Eduardo Bielschowsky

**Reitor**  
Josué Modesto dos Passos Subrinho

**Vice-Reitor**  
Angelo Roberto Antonioli

**Chefe de Gabinete**  
Ednalva Freire Caetano

**Coordenador Geral da UAB/UFS**  
**Diretor do CESAD**  
Antônio Ponciano Bezerra

**Vice-coordenador da UAB/UFS**  
**Vice-diretor do CESAD**  
Fábio Alves dos Santos

**Coordenador do Curso de Licenciatura  
em Matemática**  
Hassan Sherafat

---

**Diretoria Pedagógica**

Clotildes Farias (Diretora)  
Rosemeire Marcedo Costa  
Amanda Maíra Steinbach  
Ana Patrícia Melo de Almeida Souza  
Daniela Sousa Santos  
Hérica dos Santos Mota  
Janaina de Oliveira Freitas

**Diretoria Administrativa e Financeira**

Edélzio Alves Costa Júnior (Diretor)  
Sylvia Helena de Almeida Soares  
Valter Siqueira Alves

**Núcleo de Tutoria**

Geraldo Ferreira Souza Jr. (Coordenadora  
de Tutores do curso de Matemática)

**Núcleo de Avaliação**

Guilhermina Ramos  
Elizabeth Santos

**Núcleo de Serviços Gráficos e Audiovisuais**

Giselda Barros

**Núcleo de Tecnologia da Informação**

Fábio Alves (Coordenador)  
João Eduardo Batista de Deus Anselmo  
Marcel da Conceição Souza

**Assessoria de Comunicação**

Guilherme Borba Gouy  
Pedro Ivo Pinto Nabuco Faro

---

**NÚCLEO DE MATERIAL DIDÁTICO**

Hermeson Menezes (Coordenador)  
Jean Fábio B. Cerqueira (Coordenador)  
Christianne de Menezes Gally  
Edvar Freire Caetano  
Gerri Sherlock Araújo  
Isabela Pinheiro Ewerton

Jéssica Gonçalves de Andrade  
Lucílio do Nascimento Freitas  
Neverton Correia da Silva  
Nycolas Menezes Melo  
Péricles Moraes de Andrade Júnior

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

Cidade Universitária Prof. "José Aloísio de Campos"  
Av. Marechal Rondon, s/n - Jardim Rosa Elze  
CEP 49100-000 - São Cristóvão - SE  
Fone(79) 2105 - 6600 - Fax(79) 2105- 6474



# Sumário

---

AULA 1	
Os números e o computador .....	01
AULA 2	
Erros.....	09
AULA 3	
Zeros de funções.....	25
AULA 4	
Zeros de funções (Continuação) .....	29
AULA 5	
Interpolação polinomial.....	36
AULA 6	
Interpolação polinomial.....	46
AULA 7	
Aproximação por Mínimos Quadrados .....	51
AULA 8	
Integração Numérica .....	55
AULA 9	
Solução de Sistemas Lineares .....	66
AULA 10	
Solução de Sistemas Lineares (continuação) .....	75



# Os números e o computador

## META

**Associar os conceitos de algoritmo, representação dos números no computador e implementar cálculos usando algoritmos.**

## OBJETIVOS

**Identificar os tipos de algoritmos, as propriedades e a forma de armazenamento na memória do computador.**

## 1.1 Introdução

Com o aparecimento dos computadores na década de 40, muitos problemas foram resolvidos através da aplicação de métodos numéricos, o que antes sem a utilização das máquinas eram inviáveis pelo grande esforço de cálculo manual.

Os homens, através do tempo, preocupam-se com formas de facilitar os cálculos, exemplos: o ábaco, inventado pelos babilônios, e os kipus inventado pelos incas.



Ábaco



Kipus

A tecnologia dos computadores foi avançando cada vez mais, em termos de exatidão e tempo de execução das instruções, porém as propriedades da aritmética Real não são válidas quando são executadas no computador, pois a memória do computador é finita.

A matemática aborda estes problemas no ramo da Análise Numérica e Cálculo Numérico.

A UFS como outras universidades federais, tiveram computadores desde os anos de sua fundação, do tipo IBM, 1130, 360, 3090, e computadores pessoais Cobra, Itautec e outros. Só para ter uma idéia o IBM 1130 tinha 8 Kb de memória Ram, mas nessa configuração, rodava-se o sistema acadêmico, folha de pagamento e vestibular, claro o número de usuários era bem menor. Épocas do cartão perfurado, a linguagem utilizada era o FORTRAN Comercial.



IBM 1130



IBM 360



IBM 3090

O estudo da matemática pode ser visto sob dois grandes aspectos:

Matemática **Pura** e  
Matemática **Aplicada**.

Dentro da matemática Aplicada encontra-se a Matemática Computacional. Esta usa como ferramenta o computador e utiliza-se da Teoria da Computação, da Teoria da Informação e da Teoria dos Algoritmos.

A matemática computacional pode ser dividida em três áreas:

Matemática **Simbólica**  
Matemática **Gráfica**  
Matemática **Numérica**

A matemática **Simbólica** trata dos dados em forma literal, obtendo uma solução exata não numérica. É também chamada de matemática não-numérica. Por exemplo, provar teoremas utilizando o computador para construir ou verificar seqüência de inferência lógica que conduzam à demonstração.

A matemática **Gráfica** trabalha com dados de forma gráfica e o resultado também é um gráfico. As aplicações podem ser divididas em três áreas: Processamento de imagens, Reconhecimento de Padrões e computação Gráfica Gerativa.

A matemática **Numérica** trata da solução de problemas matemáticos através do computador e dar como resultado aproximações numéricas. Ela engloba várias disciplinas, tais como: Cálculo Numérico, Análise Numérica, Aritmética Computacional, Álgebra Numérica, Estatística Numérica, etc.

O **Cálculo Numérico** usa métodos construtivos para a solução dos problemas, e utiliza só operações aritméticas elementares  $\{ +, -, *, / \}$  e através delas são implementadas as demais operações mais complexas. A forma como é implementada no computador, o processo de cálculo para a solução do problema denomina-se **Algoritmo**.

**Algoritmo**, em geral, é uma seqüência finita de passos e operações ordenadas que levam à solução de um problema.

Os algoritmos podem ser **numéricos** e **não numéricos**. Os algoritmos numéricos são aqueles que utilizam operações aritméticas.

Exemplos de algoritmo não numérico:

- Uma receita de bolo
- Trocar um pneu de um carro
- Construir uma casa

Exemplos de algoritmo numérico

- Multiplicar duas matrizes  $A_{n \times p} * B_{p \times m}$
- Calcular o  $\sin(x)$  por uma soma de Taylor
- Calcular as raízes de um polinômio de grau 2

Um algoritmo de boa qualidade deve ter as seguintes características:

1. Inexistência de erro lógico
2. Inexistência de erro operacional
3. Quantidade finita de cálculos
4. Critério de exatidão
5. Independência da máquina
6. Os limites do erro devem convergir a zero
7. Eficiência

## 1.2 Tipos de Algoritmos

### Algoritmo por computação discreta

É obtido por uma seqüência de computações elementares.

Exemplo: Algoritmo de Báskara

### Algoritmo por enumeração

É o tipo de algoritmo que experimenta todas as possíveis respostas em uma certa ordem para encontrar a melhor solução do problema.

Exemplo: Busca do melhor caminho em grafos.

### Algoritmo iterativo

O algoritmo iterativo ou repetitivo encontra uma série de respostas aproximadas que gradualmente vão se aproximando da resposta cor reta até que um critério de parada seja atingido por exatidão ou número de repetições.

Exemplo: Gera em forma repetitiva uma seqüência de valores, que deverá se aproximar à solução. Terá essa seqüência uma propriedade de convergência. Algoritmo de Newton para zeros de funções.

### Algoritmo por divisão e conquista

O problema é dividido em vários subproblemas do mesmo tipo, mas menores, que podem ser resolvidos diretamente ou subdivididos novamente, usa-se esta técnica, até que todos os subproblemas possam ser resolvidos.

Exemplo: Dado um intervalo  $[a,b]$  onde uma função continua troca de sinal,  $f(a)*f(b) < 0$ . Encontrar o  $f(c)=0$ . O algoritmo da bisseção divide o intervalo na metade e verifica nas partes onde continua trocando de sinal, descartando a outra parte.

### Algoritmo por tentativa e erro

Este algoritmo procura uma possível solução(tentativa). Caso esta não seja (erro), volta à busca segundo novos critérios. E assim por diante.

Exemplo: Encontrar o menor  $n$  tal que  $(n^2 + 1)/n! < 10^{-5}$ , para  $n \in \mathbb{Z}$ ,

### Algoritmo guloso

Este algoritmo é usado em problemas de combinatória, onde se busca uma solução rápida. Em um processo de escolha sempre é eleito o mais barato.

Exemplo: Na busca de caminhos em grafos por camadas, em cada expansão de um nó escolhe-se o menor se é custo, ou o maior se é lucro. A solução não é a melhor, mas ela é sub-ótima.

## 1.3 Solução de um Problema usando o Computador

Para resolver um problema utilizando o computador devemos seguir pelo menos as seguintes etapas:

1. **Selecionar a área** onde se encontra o problema no mundo real.
2. **Formalizar o problema**, levantando informações relevantes ao sistema, com a finalidade de estabelecer um modelo que se aproxime ou simule tal problema.
3. **Modelação do problema**, neste nível deve ser feita a abstração dos dados, identificando-se objetos, operações, e variáveis.
4. Escolha do **algoritmo eficiente**, definindo a estrutura lógica do algoritmo.
5. **Implementação do algoritmo**, neste nível escolhe-se a máquina e a linguagem a ser utilizada para a definição física e programação do algoritmo.
6. **Validação dos resultados**.

## 1.4 Representação dos números no computador

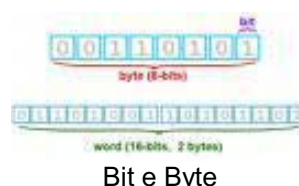
O computador é construído ao redor de uma Unidade Central que compreende:

**Memória Central**  
**Unidade de Cálculo (aritmética e lógica)**  
**Unidade de Controle**  
**Unidades de entrada e saída**

A **memória central** está composta de um conjunto de células elementares idênticas (BIT), agrupadas em número de capacidade fixa; cada grupo representa um BYTE de oito pontos magnéticos; estes grupos estão numerados de zero a n, e o número de cada um deles é denominado endereço.

O armazenamento dos números é feito nestes grupos de células. Numa máquina digital, cada célula tem dois possíveis estados, que podem ser representados como positivo e negativo, ligado ou desligado e 0 ou 1.

Na memória do computador cada número é armazenado em um conjunto fixo de bits, sendo o primeiro o bit de sinal.



Existem dois modelos de representação dos números: Ponto fixo e Ponto flutuante.

O sistema de ponto fixo é representado em duas partes; uma parte inteira e outra fracionária em uma certa base numérica. A notação é  $P(b,n,f)$  onde  $b$  é a base utilizada,  $n$  o número de dígitos da parte fracionária  $f$ .

Este sistema não funciona para números muito grandes ou muito pequenos. Por exemplo, o número de Avogadro  $0.60225 \times 10^{23}$  moléculas por mol não poderia representar-se neste sistema. A implementação desta representação como produto de uma fração e potência de 10 está no sistema de ponto flutuante.

**Definição 1.** - Um número  $X$  que é representado em ponto flutuante tem a forma:

$$X = m b^e ; m \in (-1,-0.1] \cup [0.1,1) ; e \in \mathbb{Z}$$

onde:

$m$  é a parte fracionária chamada mantissa  
 $b$  é a base numérica utilizada  
 $e$  é o expoente ou característica

Exemplo:

Se  $N=234,789$ ,  $X=0,234789 \times 10^3$  ou  $X=0,00234789 \times 10^5$

**Definição 2.** - Um número ponto flutuante está na forma normal (normalizado) se o valor da mantissa  $m$  pertence ao intervalo  $(-1,-0.1] \cup [0.1,1)$ .

Exemplo:

Se  $X = 0.0154 \times 10^{-2}$ , a forma normalizada é igual a  $0.154 \times 10^{-3}$

**Definição 3.** - Diz-se que um número representado em ponto flutuante está na forma normalizada com  $t$  dígitos na mantissa se a mantissa tiver exatamente  $t$  dígitos. Se a mantissa tiver mais de  $t$  dígitos então arredondar o dígito  $t+1$  assim:

Se o  $(t+1)$ -ésimo dígito for igual ou maior que 5 então o  $t$ -ésimo dígito é incrementado em 1.

Em outro caso, os  $t$  primeiros dígitos são considerados como mantissa.

O sistema de ponto flutuante é representado por  $F(b,t,e1,e2)$  onde:

$b$  é a base  
 $t$  o número de dígitos na mantissa  
 $e1$  é o menor expoente  
 $e2$  é o maior expoente

Exemplos:

1. Seja  $t=8$ ,  $N=0,8934572834$  o número está normalizado com  $t$  dígitos na mantissa como  $X=0,89345728 \times 10^0$
2. Seja  $t=5$ ,  $N=3,14159$  então  $X=0,31416 \times 10^1$

Como se pôde observar nestes dois casos os números originais não puderam estar representados completamente para esses computadores hipotéticos, por tanto os valores armazenados são aproximados.

## 1.5 Resumo

Nesta aula, você verificou que o armazenamento dos números nem sempre é exata quando eles são transformados para uma base diferente da decimal. Isto acarreta uma aproximação, por tanto há existência de erro, assunto que veremos na próxima aula.

## 1.6 Atividades

1. Seja o número  $N = 56783945783245$  e um computador com  $t=8$ , qual é a representação em ponto flutuante, precisão simples, e em precisão dupla?
2. Verifique se as duas expressões a seguir podem ser usadas para calcular a abscissa da interseção da reta, que passa pelos pontos  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$ , com o eixo  $x$ .  $x = (x_0 y_1 - x_1 y_0) / (y_1 - y_0)$  e  $x = x_0 - [(x_1 - x_0) y_0] / (y_1 - y_0)$
3. Usar os pontos  $(1.31, 3.24)$  e  $(1.93, 4.76)$  e  $t=3$  dígitos, calcule o  $x$  usando as fórmulas do exercício 2. Comente.
4. Calcule este número (resultado em  $j$ )
  - P1.  $e=1$
  - P2.  $j=1$
  - P3. Enquanto  $1+e > 1$ 
    - $j=j+1$
    - $e=e/2$
  - Fim enquanto
  - P4. Mostrar  $j$

A implementação na linguagem do Scilab

```
e=1;
j=1;
while 1+e > 1
    j=j+1;
    e=e/2;
end
j
```

## 1.7 Comentário das atividades

Os exercícios 1 a 3 é para fixar as definições de ponto flutuante.

O exercício 4 é interessante para descobrir o número  $t$  e também um ótimo exercício para iniciar na programação no software SciLab.

## 1.8 Referências

CUNHA, Cristina. **Métodos Numéricos**. 2ª Ed. Campinas SP: Editora da UNICAMP, 2003. ISBN: 85-268-0636-X , CDD . 620.00151