Erros

META

Conceituar o erro, as fontes e formas de expressar estes erros, propagação dos erros em operações aritméticas fórmula geral e problema inverso.

OBJETIVOS

Resolver problemas práticos de erros em funções de n variáveis e calcular a cota para o erro em processos infinitos.

2.1 Erros

Na aula anterior vimos que nem sempre a aritmética computacional coincide com a aritmética real.

Por exemplo, o n¼mero ´ , número irracional com infinitos dígitos, não é possível ser armazenado na memória do computador por ela ter tamanho finito e fixo. Ao armazenar este na forma standard, ocorre uma aproximação do valor exato. Logo existe um erro. Neste caso, de arredondamento.

2.2 Tipos de Erros

Pela fonte onde são produzidos estes erros podemos classificá-los como:

- Erros de modelação
- Erros inerentes aos dados de entrada
- Erros de arredondamento
- Erros de truncamento

Os erros de *modelação* são provenientes da simplificação das situações reais que se faz através do modelo, ignorando-se certos aspectos do mundo real.

Os erros *inerentes* são os erros cometidos nos valores dos dados, causados pela inexatidão das medidas tais como distância, tempo e temperatura, e que são medidos por instrumentos limitados, por enganos pessoais ou pela natureza.

Os erros de *arredondamento* são o resultado da representação de um número numa máquina.

Os erros de *truncamento* são erros cometidos pela aproximação de um cálculo infinito por outro finito.

Definição 4. - O erro absoluto é definido como a diferença do valor exato e valor aproximado.

Ů= Ve - Va

onde:

Ůé o erro absoluto
Ve é o valor exato
Va é o valor aproximado

O módulo do erro absoluto (erro absoluto máximo) é o valor absoluto de:

| Ů| = | Ve - Va |

O erro relativo é representado como o erro absoluto dividido pelo valor exato

ŭ = Ů/ Ve å Ů/ Va

Obs. Usa-se o valor aproximado Va se não se conhece o valor exato Ve

O erro percentual é representado como:

P = 100ŭ

2.3 Propagação do erro nas operações aritméticas

2.3.1 Erro na soma e diferença

P1. Seja $Va_3 = Va_1 \pm Va_2$	(Hipótese)
P2. Seja $Ve_3 = Ve_1 \pm Ve_2$	(Hipótese)
P3. $Ů_i = Ve_i - Va_i$, i = 1,2,3	(def. de erro absoluto)
P4. $Va_3 + Ů_3 = (Va_1 + Ů_1) \pm (Va_2 + Ů_2)$	(P2 e P3)
P5. $Ů_3 = Ů_1$ Ñ $Ů_2$	(P4,P1)
P6. $\|Ů_3\| = \|Ů_1$ Ñ $Ů_2\|$	(definição de módulo)
P7. $\|Ů_3\|$ Ò $\|Ů_1\| + \|Ů_2\|$	(desigualdade triangular)

2.3.2 Erro no produto

P1. Seja $Va_3 = Va_1 . Va_2$	(Hipótese)
P2. Seja $Ve_3 = Ve_1 . Ve_2$	(Hipótese)
P3. $Ů_i = Ve_i - Va_i$, i= 1,2,3	(def. de erro absoluto)
P4. $Va_3 + Ů_3 = (Va_1 + Ů_1) . (Va_2 + Ů_2)$	(P2 e P3)
P5. $Va_3 + Ů_3 = Ů1 . Ů_2 + Ů_1 . Va_2 + Va_1 . Ů_2 + Va_1 .Va_2$	(P4)
P6. $Ů_3 = Ů_1 . Ů_2 + Va_2 . Ů_1 + Va_1 . Ů_2$	(P5 e P1)
P7. $Ů_3 / Va_3 = (Va_2 . Ů_1 + Va_1 . Ů_2 + Ů_1 . Ů_2) / Va_3$	(def. de erro relativo)
P8. $ŭ_3 = ŭ_1 . ŭ_2 + ŭ_1 + ŭ_2$	(def. de erro relativo)
P9. $\|ŭ_3\| = \|ŭ_1 . ŭ_2 + ŭ_1 + ŭ_2\|$	(def de módulo)
P10. $\|ŭ_3\|$ Ò $\|ŭ_1\| . \|ŭ_2\| + \|ŭ_1\| + \|ŭ_2\|$	(desigualdade triangular)

2.3.3 Erro na divisão

P1.Seja $Va_3 = Va_1 / Va_2$	(Hipótese)
P2.Seja $Ve_3 = Ve_1 / Ve_2$	(Hipótese)
P3.$Ů_i = Ve_i - Va_i$, i = 1,2,3	(def. de erro absoluto)
P4.$Va_3 + Ů_3 = (Va_1 + Ů_1) / (Va_2 + Ů_2)$	(P2 e P3)
P5.$Va_3 + Ů_3 = (Va1 + Ů_1) . (1 / Va_2) . (1 + Ů_2 / Va_2)^{-1}$	(P4)
P6.$Va_3 + Ů_3 = (Va_1 / Va_2 + Ů_1 / Va_2) . (1 - / ...)$	(P5)
P7. $Ů3 = (Va2 . Ů1 - Va1 . Ů2) / (Va2)^2$	(P6)
P8. $Ů3 / Va3 = (1 / Va3) . (Va2 . Ů1 - Va1 . Ů2) / (Va2)^2$	(P7)
P9. ŭ3 = ŭ1 - ŭ2	(P8 def. erro relativo)
P10.|ŭ3 | = |ŭ1 - ŭ2|	(P9 Módulo)
P11.|ŭ3| Ò|ŭ1| + |ŭ2|	(P10 desig. triangular)

Exemplo 1:

Sejam os números irracionais $\pi = 3.14159265358979311599 80 \ldots$ e $\sqrt{2} = 1.4142135623730951454746 \ldots$ (valores dados pelo SciLab , %pi e sqrt(2) com format(25)), que devem ser armazenados em uma máquina de t=8 dígitos na mantissa. Qual é o erro absoluto para $\pi + \sqrt{2}$ e para $\pi * \sqrt{2}$?

Os valores de $\pi = 0.31415927 * 10^1$ e $\sqrt{2} = 0.14142136$, estão na forma standard normalizada.

Observe que as mantissas foram arredondadas. Pela definição de erro absoluto:

$$\varepsilon_\pi = 3.14159265358979311599 80 \ldots - 3.1415927 = -0.0000000464102067887495 \ldots$$
$$\varepsilon_{\sqrt{2}} = 1.4142135623730951451746 \ldots - 1.4142136 = -0.000000037626904925147 6 \ldots$$

$$\varepsilon_{(\pi+\sqrt{2})} = \varepsilon_\pi + \varepsilon_{\sqrt{2}} = -0.0000000464102067887495 \ldots - 0.0000000376269049251476 \ldots$$
$$= -0.0000000087833018636019 \ldots$$

$$\varepsilon_{(\pi*\sqrt{2})} = \pi * \varepsilon_{\sqrt{2}} + \sqrt{2} * \varepsilon_\pi + \varepsilon_\pi * \varepsilon_{\sqrt{2}}$$
$$= 3.1415927 * (-0.0000000376269049251476) + 1.4142136 * (-0.0000000464102067887495) + (-0.0000000376269049251476) * (-0.0000000464102067887495) = 0.0000927299886941268531$$

Exemplo 2:

Qual o erro máximo para um número x com t dígitos na mantissa, se ele é arredondado?

O d²gito t ® acrescentado uma unidade se o d²gito t+1 Ó5 , em outro caso não se modifica. Então os valores do dígito t e dígito t+1 poderão ser t 0,t 1,t 2,t 3 ou t 4 ou (t-1)5, (t+1)6, (t+1)7, (t+1)8 ou (t+1)9, fazendo parte do valor exato, e os respectivos erros Ů$_0$,Ů$_1$,Ů$_2$,Ů$_3$,Ů$_4$,Ů5,Ů$_6$,Ů$_7$,Ů8,Ů$_9$ serão menores que 0.5×10^{-t}.

2.4 Fórmula geral para Erros

Seja uma função diferenciável y = f(x).

Uma variação de x em um (x) faz que mediante a função f haja uma variação de y, assim:

æ(y) = f [x + (x)] - f(x),

considerando æ(x) um valor muito pequeno, ou seja, uma quantidade que represente um erro em x. Utilizando f teremos uma variação de y, chamada de æ(y), e que representará o erro em y ou da função f.

Se em æ(y) = f [x + æ(x)] - f(x) multiplicando e dividindo o segundo membro por æ(x) temos:

æ(y) = { f [x + æ(x)] - f(x) } æ(x) / æ(x)
æ(y) = { f [x + æ(x)] / æ(x) - f(x) / æ(x) } æ(x)

æ(y) å fǿ(x) æx, considerando æx muito pequeno

|Ů$_y$ | å |fǿ(x)| |Ů$_x$|

Em geral seja:

$$u = f (x_1, x_2, x_3,..., x_n)$$

seja:

Ů$_{xi}$, para i = 1, 2, 3, ..., n

os erros absolutos dos argumentos de f, então o erro absoluto de u é:

Ů$_u$ å $(\partial f / \partial x_1)$ Ů$_{x1}$ + $(\partial f / \partial x_2)$ Ů$_{x2}$ + ... + $(\partial f / \partial xn)$ Ů$_{xn}$

|Ů$_u$| = |$(\partial f / \partial x_1)$ Ů$_{x1}$ + $(\partial f / \partial x_2)$ Ů$_{x2}$ + ... + $(\partial f / \partial x_n)$ Ů$_{xn}$|

|Ů$_u$| Ò|$(\partial f / \partial x_1)$| |Ů$_{x1}$| + |$(\partial f / \partial x_2)$| |Ů$_{x2}$| + ... + |$(\partial f / \partial x_n)$| |Ů$_{xn}$|

∂_u Ò|$(\partial f / \partial x_1/u)$ Ů$_{x1}$| + |$(\partial f / \partial x_2/u)$ Ů$_{x2}$| + ... + |$(\partial f / \partial x_n/u)$ Ů$_{xn}$|

Exemplo:

Achar o máximo erro absoluto e relativo do volume de uma esfera se o diâmetro D = (3,7 Ñ0,05) cm, Ʉ = 3,14.

V = 1/6 Ʉ D^3 = V(Ʉ,D) (função em duas variáveis)

Observe que é considerada uma variável porque tem erro.

Ů$_D$ Ò0,05 Ů$_Ʉ$ Ò0,0016

∂V / ∂Ʉ = 1/6 D^3 = 1/6 (3,7)^3 = 8,4421666

∂V / ∂D = 1/2 Ʉ D^2 = (1/2) 3,14 (3,7)^2 = 21,4933

Ů$_V$ = (∂V / ∂Ʉ)Ů$_Ʉ$ + (∂V / ∂D)Ů$_D$ =

Ò8,4421666 (0,0016) + 21,4933 (0,05) =

Ò0,01350746656 + 1,074665 = 1,08817246656 cm^3

ŭ$_V$ Ò1,08817246656 / 26,508403 = <u>0,041050</u> ou

ŭ$_V$ Ò(1/6 D^3 Ů$_Ʉ$ +1/2 Ʉ D^2 Ů$_D$)/(1/6 Ʉ D^3)

ŭ$_V$ Òŭ$_Ʉ$ + 3 ŭ$_D$

ŭ$_V$ Ò(0,0016/3,14) + 3(0,05/3,7) = 0,0005095 + 0,0405405 = <u>0,04105</u>

2.5 Problema inverso do Cálculo de Erros

O problema inverso do cálculo de erros consiste em encontrar os erros dos argumentos de uma função dado o erro da função.

Seja a função:

$$u = f(x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n)$$

dado o erro em u determinar os erros para $x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n$.

Este problema não tem solução analítica exata, já que temos n incógnitas para uma única equação.

Para poder dar uma solução a este problema há que se considerar restrições a fim de reduzir o problema a uma equação e uma incógnita.

Uma alternativa para esta redu-«o ® considerar ñO princ²pio de Efeitos iguaisò hip· tese que usa-se em estatística. Este princípio supõe que as leis físicas atuam da mesma maneira para uma ação produzindo efeitos iguais.

Extrapolando esta idéia para o problema inverso do cálculo de erros surgem as seguintes hipóteses:

I . Os erros absolutos são iguais para $x_1, x_2, ..., x_n$.
II. Os erros relativos são iguais para $x_1, x_2, ..., x_n$.
III. A função u contribui no erro total.

2.5.1 Hipótese I

P1. Ů$_{x1}$ = Ů$_{x2}$ = Ů$_{x3}$ =...= $_{xn}$ = k_1	(Hipótese)
P2. Ů$_u$ é conhecido	(Hipótese)
P3. Ů$_u$ = $\sum(\partial f / \partial xi)$ Ů$_{xi}$, i = 1, 2, ..., n	(def. de Ů)
P4. Ů$_u$ = $k_1 \sum(\partial f / \partial xi)$	(P3, P1)
P5. k_1 = Ů$_u$ / $\sum(\partial f / \partial xi)$	(P4)

2.5.2 Hipótese II

P1. ŭ$_{x1}$ = ŭ$_{x2}$ = ... = ŭ$_{xn}$ = k_2	(Hipótese)
P2. Ů$_u$ é conhecido	(Hipótese)
P3. Ů$_u$ = $\sum(\partial f / \partial xi)$ Ů$_{xi}$, i = 1, 2, ..., n	(def. de ε)
P4. Ů$_u$ = $\sum(\partial f / \partial xi)$ Ů$_{xi}$ xi / xi , i = 1, 2, ..., n	(P3)
P5. Ů$_u$ = $\sum(\partial f / \partial xi)$ xi ŭ$_{xi}$, i = 1, 2, ..., n	(P4)
P6. Ů$_u$ = k2 $\sum(\partial f / \partial xi)$ xi , i = 1, 2, ..., n	(P5, P1)
P7. $k_2 = \varepsilon_u / \sum(\partial f / \partial xi)$ xi, i = 1, 2, ..., n	(P6)

2.5.3 Hipótese III

P1. $(\partial f / \partial x1)\, x1 = (\partial f / \partial x2)\, x2 = ... = (\partial f / \partial xn)\, xn = k3$	(Hipótese)
P2. Ů$_u$ é conhecido	(Hipótese)
P3. Ů$_u$ = $\sum(\partial f / \partial xi)$ Ů$_{xi}$, i = 1, 2, ..., n	(def. de Ů)
P4. Ů$_u$ = n k_3	(P3, P1)
P5. k_3 = Ů$_u$ / n	(P4)

2.6 Erros de Truncamento

Erro cometido ao aproximar um cálculo infinito por outro finito.

Exemplo 1:

$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots$
$x_1 = F(x_0)$
$x_2 = F(x_1)$
:
:
$x_{n+1} = F(x_n)$
$x_n \rightarrow x^*$

Seja $\bar{x}$ uma solução aproximada da seqüência { x_n } que converge a x^* no limite.

x → valor aproximado
x* → valor exato

$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$
$x_0, x_1, x_2, \ldots, \bar{x}, \ldots \rightarrow x^*$
Ů= $V_e - V_a = x^* - \bar{x}$

onde Ů®o erro de truncamento.

Exemplo 2
Seja uma função f(x), n vezes contínua e diferenciável, num intervalo [a,b].

$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^i(a)}{i!}(x-a)^i$ Série de Taylor
se a = 0, Série de Mac-Laurin

Cálculo da função sen x, isto é, expressar como uma série de potências

Solução:

f(x) = sen x	f'''(x) = -cos x
f'(x) = cos x	f''''(x) = sen x
f''(x) = -sen x	f'''''(x) = cos x

função trigonométrica cíclica

Para a = 0:

f(0) = 0	f'''(x) = -1
f'(0) = 1	f''''(x) = 0
f''(0) = 0	f'''''(x) = 1

$$sen\ x = \frac{0}{0!}(x-0)^0 + \frac{1}{1!}(x-0)^1 + \frac{0}{2!}(x-0)^2 + \frac{1}{3!}(x-0)^3 + \frac{0}{4!}(x-0)^4 + \cdots$$

$$sen\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$sen\ x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}(-1)^i, \quad x \rightarrow \text{radianos}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}(-1)^i = V_e$$

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}(-1)^i, = V_e$$

$$\varepsilon = V_e - V_a = \sum_{i=k+1}^{k} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}(-1)^i$$

Estima o erro → Encontrar uma cota superior para o erro.

Teorema: ñSeja a s®rie $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i$, tal que $|u_0| > |u_1| > |u_2| > |u_3| > \ldots > |u_n| > |u_{n+1}| > \ldots$ alternada e convergente, então $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i < |u_{k+1}|$

Para a série sem x : u = $\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$, 0 Òx ÒɄ/4

$$\left|\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}\right| > \left|\frac{x^{2i+3}}{2i+3!}\right| = \left|\frac{x^{2i+1}x^2}{(2i+1)!\,(2i+2)(2i+3)}\right|$$

$$\left|\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}\right| \cdot \left|\frac{x^2}{(2i+2)(2i+3)}\right| < \left|\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}\right|$$

Para a função sem x:

$$\varepsilon_T < \left|\frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}\right|$$

Exemplo:

Determinar o erro de truncamento para o cálculo de sen 30º pela fórmula de Taylor.

Solução:

$$sen\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \ldots$$

$$sen\ 30° = sen\ \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} - \frac{(\pi/6)^3}{6} + \frac{(\pi/6)^3(\pi/6)^2}{6.20}$$

$$\varepsilon_T < \frac{x^7}{7!} = \frac{(\pi/6)^{37}}{7!\,6}$$

$$S_0 = x$$

$$S_1 = \frac{x.x^2}{3.2} = S_0.\frac{x^2}{3.2}(-1)$$

$$S_2 = \frac{x^3}{3.2}.\frac{x^2}{4.5} = S_1.\frac{x^2}{4.5}(-1)$$

$$S_3 = \frac{x^5}{5!}.\frac{x^2}{6.7} = S_2.\frac{x^2}{6.7}(-1)$$

$$S_{j+1} = S_j\frac{x^2}{(2j)(2j+1)}(-1)$$

Cálculo do *e* :

f(x) = e^x
Fazer x = 1→ f(1) = *e*
f'(x) = e^x, f''(x) = e^x...

$$e = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{1!}$$

f(0) = e^0 = 1
f'(0) = e^0 = 1

Para x = 1 → $e = 1 + \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = 1 + 1 + 0{,}5 + 0{,}1666$

$$e = 2{,}6666$$

$$\varepsilon_T = V_e - V_a = \sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{x^i}{i!}$$

$$\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{x^i}{i!} = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} + \frac{x^{k+3}}{(k+3)!} + \cdots$$

$$= \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\left[1 + \frac{x}{k+2} + \frac{x^2}{(k+2)(k+3)} + \frac{x^3}{(k+2)(k+3)(k+4)} + \cdots\right]$$

$$\frac{1}{(k+2)(k+3)} < \frac{1}{(k+2)(k+2)}$$

$$\frac{1}{(k+2)(k+3)(k+4)} < \frac{1}{(k+2)(k+2)(k+2)}$$

$$< \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\left[1 + \frac{x}{k+2} + \frac{x^2}{(k+2)^2} + \frac{x^3}{(k+2)^3} + \cdots\right]$$

$$< \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{x}{k+2}\right)^i \Bigg\| \sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a}, se\ |a| < 1$$

Se $a = \frac{x}{k+2}$<1
$x < k$+2

Se k=0, x<2

$$\varepsilon_T < \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{k+2}}$$

Se x = 1,

$$\varepsilon_T < \frac{1}{(k+1)!} \cdot \frac{k+2}{k+2-1} = \frac{k+2}{(k+1)!\,(k+1)}$$

$$\varepsilon_T < \frac{3+2}{4!\,4} = \frac{5}{24.4} = \frac{5}{96}$$

Exemplo:

Quantos termos da série de Taylor são necessários para que o número ñeò tenha um erro menor que 0,01.

Solução:

Ůŧ < 0,01

$$\varepsilon_T < \frac{k+2}{(k+1)!\,(k+1)} < 0{,}01$$

para k = 2: $\frac{4}{3!3} = \frac{4}{18}$

para k = 3: $\frac{5}{4!4} = \frac{4}{96}$

para k = 4: $\frac{6}{5!5} = \frac{4}{100}$

O número de termos é 6.

2.7 Atividades

1. Se 1000 aproxima x com erro menor que Ů Mostre que 1/1000 aproxima 1/x com erro absoluto menor que |Ů| / |(1000 + ε)^2|

2. A altura H e raio R da base de um cilindro são medidos com aproximação de 0.5%. Qual é o máximo erro absoluto e relativo ao calcular o volume. π = 3.14

3. Um cilindro de alumínio com diâmetro da base d = 2cm ± 0.01cm altura h = 11cm ± 0.02cm e peso p = 93.4gf ± 0.001 gf. Determinar o erro relativo do peso específico pe = p/v

4. Determine a série de Taylor para a função f(x) = sen x , e a cota do erro de truncamento. Quantos termos da série são necessários para cometer um erro menor que 0.01. x = 0.8

5. Um cilindro de alumínio com diâmetro da base d = 2cm ± 0.01cm altura h = 11cm ± 0.02cm e peso p = 93.4gf ± 0.001 gf. Determinar o erro relativo do peso específico pe = p/v .

2.8 Referências

CUNHA, Cristina. **Métodos Numéricos**. 2ª Ed. Campinas SP: Editora da UNICAMP, 2003. ISBN: 85-268-0636-X , CDD ï 620.00151

BURDEN, L. Richard, J. Douglas Faires **Análise Numérica** SP: Editora Pioneira Thomson Learning, 2003. ISBN 85-221-0297-X CDD - 515