Zeros de Funções

META

Resolver o problema: dada a função f(x), contínua em um intervalo I=[a,b], encontrar um x* tal que f(x*)=0.

OBJETIVOS

Estudar diferentes algoritmos, encontrar soluções e verificar qual é o mais eficiente e em que condições.

lino@ufs.br

3.1 Zeros de Funções

Um problema comum em engenharia, ou em geral nas diversas áreas das ciências exatas, é determinar soluções em equações não lineares. Equações estas que envolvem funções transcendentes.

No problema seguinte:

Um cabo telef¹nico suspenso entre dois postes tem um peso de ű quilogramasï força por metro. A tensão T no meio do cabo é obtida pela resolução da equa-«o (2T/ű) senh(űL/2T) = S, onde S é o cumprimento do fio, L é a distância entre os postes e ű o peso espec²fico do fio por metro linear.

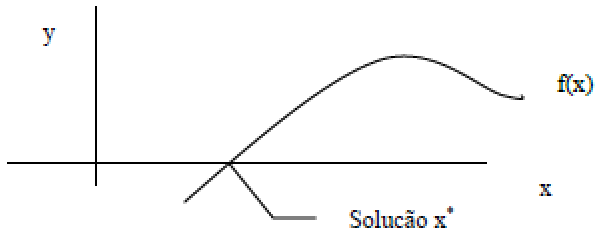
Os métodos numéricos, expostos nesta aula, são utilizados para encontrar soluções aproximadas para equações deste tipo de problema.

Seja a função f(x) = 0.

Um zero da função é um x* ⌊ $\mathcal{R}$ tal que f(x*) = 0.

Para um intervalo I = [a,b], se f(a).f(b) < 0 c / f(c) = 0.

f deve ser contínua em I = [a,b].



3.2 Método da Bisseção

O método é baseado no teorema do valor intermediário que diz:

ñSe uma fun-«o ® cont²nua no intervalo I=[a,b] e satisfaz a condi-«o f(a)*f(b)<0, ent«o existe pelo menos um x*⌊ [a,b] tal que f(x*)=0.ò

O método também denomina-se de pesquisa binária, e consiste em dividir o intervalo inicial em subintervalos que contenha o zero procurado. Divide-se o intervalo inicial e se descarta o intervalo onde a função não troca de sinal, prosseguindo com o intervalo que satisfaz a condição de troca de sinal.

3.3 Algoritmo

P1. Dada a função contínua f(x) no intervalo I=[a,b], definir uma toler©ncia Ůe verificar se f(a)*f(b) < 0.

P2. c=(a+b)/2

P3. Se |f(c)| < Ůent«o pare. Solu-«o aproximada c.

P4. Se f(a)*f(c) < Ůent«o
    b=c
    se não
    a=c
P5. Volta ao P2.

Exemplo

Encontrar uma solução para a equação $f(x)=2^x-4*x$, no intervalo [0,1] usando o programa a seguir.

3.4 Programa no Scilab

```
function y=f(x)
        y=2^x-4*x
endfunction
format(15)
a=0;
b=1;
[e]=input("Digite a tolerancia Ex.0.0001: ");
c=(a+b)/2;
fc=abs(f(c));
while fc > e
        if f(a)*f(c) < 0 then
                b=c;
        else
                a=c;
        end
        c=(a+b)/2
        fc=abs(f(c));
end
c
```

3.5 Métodos Iterativos para a Solução do Problema

Um método iterativo é um método repetitivo, que gera normalmente uma seqüência de valores.

Para que a seqüência de valores seja gerada deve existir uma fórmula recursiva.

Se a seqüência gerada nos leva à solução, então é uma seqüência convergente.

O método iterativo possui uma fórmula recursiva, uma regra de parada e condições de convergência para a seqüência gerada.

A regra de parada é dada pelo valor de Ų chamado também de zero numérico. É um valor pequeno, nomeado de tolerância, que indica o grau de exatidão da solução. É definido por fora.

3.6 Método de Iteração Simples ou iteração linear

Um número p é um ponto fixo se, para uma função dada g(x), g(p)=p
Exemplo:

g(x)= x^3 ï 2x + 2

os pontos - 2 e 1 são pontos fixos porque

g(-2) = - 2 e g(1) = 1
g(-2) - (-2) = 0 e g(1) ï 1 = 0

Dado um problema f(x)=0 , pode-se definir uma função g(x) de tal forma que

g(x)=x-f(x) e f(x)=x ï g(x)

Se g(p)=p então g(p) ï p = 0 e f(p)=0 e p será um zero.

3.7 Algoritmo

P0. Transformar a função f(x) = 0, tal que g(x) ï x = f(x) =0
P1. Para j=0
Escolher um valor inicial qualquer x_j em [a,b]
P2. j Ÿ j + 1
x_j Ÿ g(x_{j-1})
P3. (Regra de Parada)
Se |x_j ï x_{j-1} | < Ůent«o x_j é solução aproximada.
Se não Voltar a P2

A seqüência gerada é $x_0,x_1,x_2,..............,x_n,x_{n+1},..........$

Onde x_1=g(x_0), x_2=g(x_1), x_3=g(x_2)é é ..x_n=g(x_{n-1})

Exemplo:

f(x) = x^3 - 2x - 1 I = [1,2]
f(1) = 1 - 2 - 1 = -2
f(2) = 8 - 4 -1 = 3
f(1).f(2) < 0 Ů= 0,01

P0: g(x) / g(x) - x = f(x)
x^3 - 2x - 1 => x = $\sqrt[3]{2x+1}$

g(x) - x = f(x)
g(x) - x = $\sqrt[3]{2x+1}$

P1: j Ŷ 0, x_0 ⌊ I = [1,2]
x_0 = 1

P2: x_1 = g(x_0) = g(1) = $\sqrt[3]{3}$
x_1 = 1,44334957

P3: |x_1 - x_0| = |1,44224957 - 1| > 0,01

P2: x_2 = g(x_1) = g(1,44224957) = $\sqrt[3]{(1{,}44224957).2+1}$
x_2 = $\sqrt[3]{3{,}8845}$ = 1,571973

P3: |x_2 - x_1| = |1,571973 - 1,442251| > 0,01

P2: x_3 = g(x_2) = g(1,571973) = $\sqrt[3]{2(1{,}571973)+1}$
x_3 = 1,0622

P3: |x_3 - x_2| = |1,60622 ï 1,571973| = 0,034 > 0,01

P2: x_4 = g(x_3) = *F*(1,60622) = $\sqrt[3]{2(1{,}60622)+1}$
x_4 = 1,6150

P3: |1,6150 ï 1,6002| = 0,0088 < 0,01

x_4 = 1,615 Solução aproximada

3.8 Condições de Convergência

I) ∀ x ꞓ I ↔ g(x) ꞓ I;
II) F(x) deve ser contínua no intervalo I;
III) O valor absoluto da derivada da função

|gǭ(x)| < 1 ∀ x ⌊ I.

A seqüência { x_n } gerada pelo algoritmo de iteração simples convergirá à solução x*, isto é, $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ ou { x_n } →x*.

Exemplo:

Verificar as condições de convergência para g(x) = $\sqrt[3]{2x+1}$.

1) ∀ x ⌊ [1,2], então g(x) ⌊ [1,2]
   Para x = 1: g(1) = 1,4422 ⌊ [1,2]
   Para x = 2: g(2) = 1,71 ⌊ [1,2]
   Porque a função é crescente no intervalo então g(x) ⌊ [1,2]

2) $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$
   Não há pontos de descontinuidade no intervalo

3) g(x) = $(2x+1)^{1/3}$

$$g'(x) = \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{-2}{3}}(2x+1)' = \frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{-2}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$$

   x = 1: $g'(1) = \frac{2}{3\sqrt[3]{9}} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2,08}\right)$ < 1

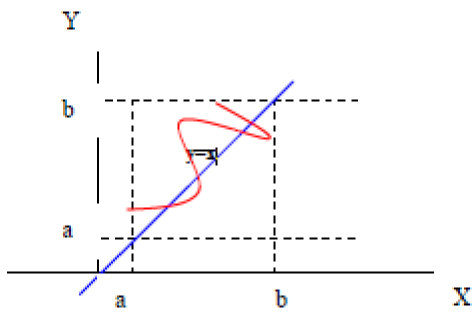
   x = 2: $g'(2) = \frac{2}{3\sqrt[3]{25}} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2,924}\right)$ < 1

Porque a fun- «o derivada gǭ(x) ®decrescente no intervalo

Observação: O intervalo poderá ser relaxado para satisfazer as condições

3.9 Considerações das condições de Convergência

I) **∀ x ⌊ I ↔ g(x) ⌊ I = [a,b]**
   f(x) = 0 → g(x) ï x = f(x)



II) g(x) é contínua
   Condição I) e II) garantem a existência de solução

1) a Òg(a)	(1a condição)
2) b Óg(b)	(1a condição)
3) 0 Òg(a) - a = f(a)	(1, def. de g(x))
4) 0 Óg(b) - b = f(b)	(2, def. de g(x))

5) f(a) Ó0 ^ f(b) Ò0 (3, 4)
6) ∃ c ∈ [a,b] / f(c) = 0 (5, def. de zero de função)

III) | g'(x) | ∀ < 1, x ∈ I

Também conhecida como condição de Lipchitz

| g'(x) | ÒL , L < 1 , ∀ x ∈ I

é equivalente a dizer que para dois pontos q.q. I vale o seguinte:

x_k, x_{k+1} ∈ I então |g(x_k) - g(x_{k+1})| ÒL |x_k - x_{k+1}|

Ÿ

1) |g'(x)| ÒL , L < 1 , ∀ x ∈ I = [a,b] (Hipótese)
2) Seja x_k e x_{k+1} pontos pertencentes ao intervalo I (def. x ∈ I)
3) Existem g(x_k) e g(x_{k+1}) ∈ I (def. g(x))
4) Pelo Teorema do Valor Intermediário:

∃ c [x_k, x_{k+1}] / g'(c) = $\frac{g(x_k) - g(x_{k+1})}{x_k - x_{x+1}}$

5) $|g'(c)| = \left|\frac{g(x_k) - g(x_{k+1})}{x_k - x_{k+1}}\right|$ (4,def. de valor absoluto)
6) Como c ∈ I , ent«o g'(c) ÒL (5, 1)
7) $\left|\frac{g(x_k) - g(x_{k+1})}{x_k - x_{k+1}}\right| \leq L$ ou $|g(x_k) - g(x_{k+1})| \leq L|x_k - x_{k+1}|$

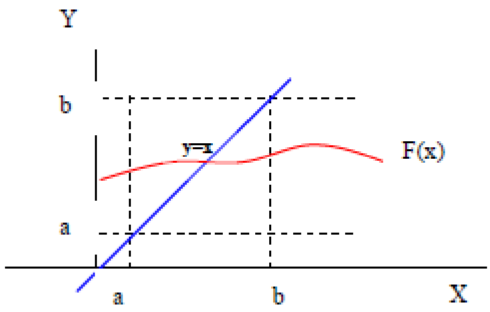
As Condições III) e II) garante a unicidade da solução.

1) g'(x) ÒL , L < 1 , ∀ x ∈ I
 ź |g'(x_k) - g'(x_{k+1})| ÒL.| x_k - x_{k+1} | para q.q. x_k, x_{k+1} ∈ I (Hipótese)

2) Suponhamos que existem duas soluções s_1, s_2, diferentes.
3) s_1 = g(s_1) ^ s_2 = g(s_2) (def. de Solução)
4) s_1, s_2 ∈ I , então |g(s_1) - g(s_2)| ÒL |s_1 - s_2|(def. eq. à cond. de Lipchitz)
5) |s_1 - s_2| ÒL |s_1 - s_2| (3, 4)
6) Como s_1 é diferente de s_2 Ÿ s_1 - s_2 Í 0 , logo 1 ÒL | contradição com a hipótese, constante de Lipchitz menor que 1
7) Ÿ s_1 = s_2

3.10 Interpretação geométrica a condição III

| g'(x) | < 1
| tg α | = g'(x) < 1
| tg 45º | = 1



<u>As três condições garantem convergência da seqüência gerada pelo algoritmo</u>

Provar que:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$$

ou

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x^*| = 0$$

1) |xn - x*|
2) |xn - x*| = $|g(x_{n-1}) - g(x^*)|$ (def. algoritmo e x* solução)
3) $|g(x_{n-1}) - g(x^*)|$ ÒL.$|x_{n-1} - x^*|$ (condição 3 equiv.)
4) $|x_{n-1} - x^*| = |g(x_{n-2}) - g(x^*)|$
5) $|x_n - x^*|$ ÒL.$|x_{n-1} - x^*|$ ÒL.L.$|x_{n-2} - x^*|$ (2, 4)
$|x_n - x^*|$ ÒL^2.$|x_{n-2}$ ï $x^*|$
6) $|x_{n-2} - x^*| = |g(x_{n-3}) - g(x^*)|$ ÒL.$|x_{n-3} - x^*|$
7) $|x_n - x^*|$ ÒL^3.$|x_{n-3} - x^*|$
8) $|x_n - x^*|$ ÒL^n.$|x_0 - x^*|$
9) lim$_{nŸ Ð}$ |xn - x* Ò|limn L^n.$|x_0 - x^*|$
10) lim $_{nŸ Ð}$ L^n.| x0 - x* | = $|x_0 - x^*|$. lim $_{nŸ Ð}$ L^n
11) lim $_{nŸ Ð}$ L^n = 0 porque L < 1
12) lim $_{nŸ Ð}$ $|x_n - x^*| = 0$

3.11 Erro de truncamento para n passos

Valor exato: x*
Valor aproximado: x_n, n qualquer.

$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$

Ů= Ve - Va = $x^* - x_n$

1) $|x^* - x_n|$ = lim$_{mŸ Ð}$ $| x_m - x_n |$, m > n
2) $|x_m - x_n| = |x_n - x_m| = |x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - x_{n+2} + x_{n+2} - \ldots - x_{m-1} - x_m|$
3) $|x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + |x_{n+2} - x_{n+3}| + \ldots + |x_{m-1} - x_m|$
4) $|xn - x_{n+1}| = |g(x_{n-1}) - g(x_n)|$ ÒL $|x_{n-1} - x_n|$
5) $|x_{n+1} - x_{n+2}| = |g(x_n) - g(x_{n+1})|$ ÒL $|x_n - x_{n+1}|$ ÒL^2 $|x_{n-1} - x_n|$
6) $|x_{n+2} - x_{n+3}| = |g(x_{n+1}) - g(x_{n+2})|$ ÒL $| x_{n+1} - x_{n+2} |$ ÒL^3 $|x_{n-1} - x_n|$
7) $|x_n - x_m|$ Ò$| x_{n-1} - x_n|$ [L+ L^2 + L^3 + L^4 +...+ L^{m-n}]

8) $\lim_{m\text{Ÿ Ð}} |x_n - x_m|$ Ò$\lim_{m\text{Ÿ Ð}} |x_{n-1} - x_m| \sum_{i=1}^{m-n} L^i$
9) $|x_n - x^*|$ Ò$|x^{n-1} - x^n| \sum_{i=1}^{\infty} L^i$
10) $|x_n - x^*|$ Ò$|x^{n-1} - x^n| L\sum_{i=1}^{\infty} L^i = |x_{n-1} - x_n| L \frac{1}{1-L}$
11) $|x_n - x^*|$ Ò$L \frac{|x_{n-1}-x_n|}{1-L}$Cota do erro

3.12 Atividades

1. Encontre uma aproximação para $25^{1/3}$ com precisão de 10^{-4} usando o algoritmo da bissecção

2. Achar uma função de iteração para encontrar um zero diferente de $x = 4$ de $2^x = 4x$

3. Dar uma cota do erro de truncamento ao usar n iterações no método de iteração simples. A cota deve estar en função dos valores $| x_o - x_1|$ e a constante de Lipchitz L

4. Demonstre que $x_{n+1} = x_n (2 - K x_n)$ converge a 1/K quando n tende ao infinito

3.13 Referências

CUNHA, Cristina. **Métodos Numéricos**. 2ª Ed. Campinas SP: Editora da UNICAMP, 2003. ISBN: 85-268-0636-X , CDD ï 620.00151

BURDEN, L. Richard, J. Douglas Faires **Análise Numérica** SP: Editora Pioneira Thomson Learning, 2003. ISBN 85-221-0297-X CDD - 515