Zeros de Funções
(continuação)

META

Resolver o problema: dada a função f(x), contínua em um intervalo I=[a,b], encontrar um x* tal que f(x*)=0. Usando o Método de Newton.

OBJETIVOS

Estudar diferentes casos do especiais do Método de Newton.

4.1 O Método de Newton

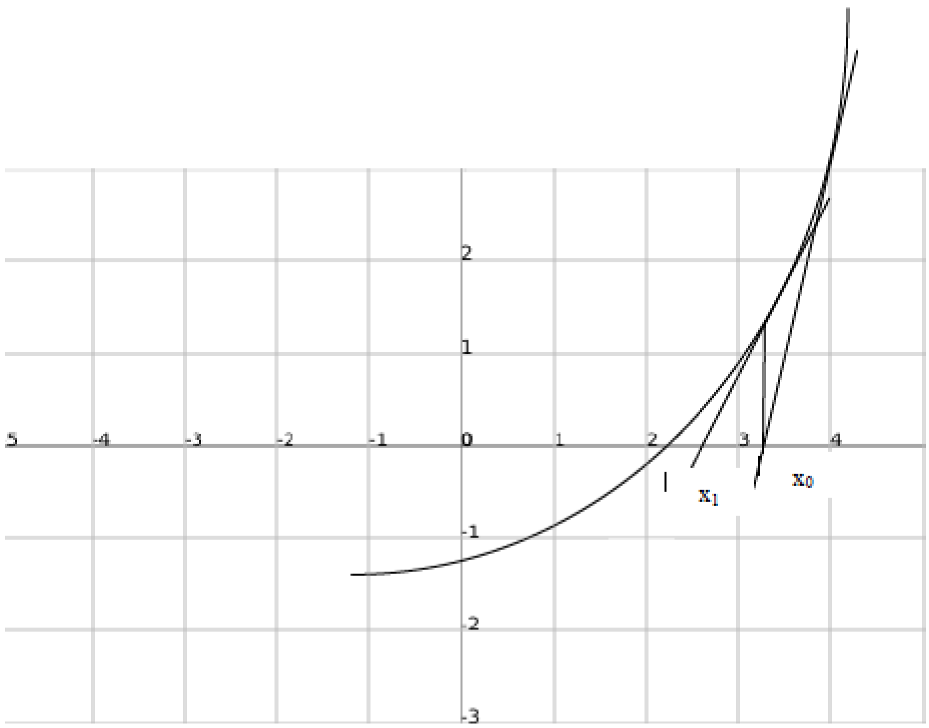
O método de Newton pode ser visto com um caso particular do método de iteração linear, onde a função g(x) é construída para ser uma função de iteração. Isto é, que satisfaça as três condições de convergência.

Seja a fun-«o f(x) uma fun-«o cont²nua em I = [a,b], e f(a).f(b) < 0, com fǿx) Í 0 no intervalo I.

Construção da função g(x) de tal forma que x ï g(x) = f(x)

1) f(x) = 0
2) $\frac{f(x)}{f'(x)} = 0$ por ser fǿx) Í 0
4) x ï x + $\frac{f(x)}{f'(x)}$ = 0
5) x = x - $\frac{f(x)}{f'(x)}$ = g(x) , onde g(x) é igual ao segundo termo
6) g(x) satisfaz as condições de convergência do método de iteração linear.

4.2 Interpretação geométrica



$$\text{tg}\,\theta = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0)$$

$$\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - x_1$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Exemplos:
1º) Raiz quadrada de um N>0

Seja f(x) = x² - N

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - N}{2x_n} = \frac{1}{2}\left[\frac{x_n^2 + N}{x_n}\right]$$

Exemplo:

$\sqrt{2} = ?$

$x_0 = 1$

$$x_1 = F(x_0) = \frac{1}{2}\left[x_0 + \frac{N}{x_0}\right] = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{2}{1}\right] = \frac{3}{2}$$
$$x_1 = F(x_1) = \frac{1}{2}\left[x_1 + \frac{N}{x_1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{17}{6}\right] = 1{,}416666$$
$$x_1 = F(x_2) = \cdots$$

2º) Raiz K-ésima de um N>0

f(x) = x_k ï N

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - N}{k.x^{k-1}} = \frac{1}{k}\left[(k-1)x_n + \frac{N}{x_n^{k-1}}\right]$$

4.3 Algoritmo

P0. Dada a fun- «o f(x) cont²nua em I=[a,b], f(x) Í 0 em [a,b], f(a).f(b) < 0, Ů(toler©ncia)
P1. Escolher um x_0 inicial em [a,b], j Ŷ 0
P2. j Ŷ j+1 , $x_j = x_{j-1}$ ï $f(x_{j-1})/f(x_{j-1})$
P3. (Regra de parada) Se $|x_j-x_{j-1}|$ < Ůou $|f(x_j)|$ < Ů ent«o pare. Solu- «o aproximada x_j
Se não volta ao passo P2.

1.4 Programa no SciLab

```
deff('[y]=g(x)','y=2^x-4*x')
deff('[z]=dg(x)','z=log(2)*2^x-4')
x0=0;
x1=0.5
format(20)
eps=0.00001
```

```
while abs(x0-x1) > eps
x0=x1;
x1=x0-(g(x0)/dg(x0))
end
x1
```

1.5 Casos Especiais

Caso 1.

N«o se pode garantir que a fun-«o fő(x) seja diferente de zero em todo o intervalo i=[a,b].

Seja fő(x_0) Í 0 , x_0 ⌊ [a,b]

Considerar fő(x_0) = M constante para todo o cálculo da seqüência.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

fő(x0) Í 0 ∀ n

f(x_0) = M Í 0

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{M}$$

Caso 2.

A derivada da função é complexa.

Aproximamos a derivada pelo quociente do limite.

$$f'(x_n) = \lim_{(x_n - x_{n+1}) \to 0} \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$

Fórmula também conhecida como método da secante.

Caso 3

Método de Newton aplicado a polinômios

Seja o polinômio $P_n(x) = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + ... + a_n.x^n$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{P_n(x_k)}{P_n'(x_k)}$$

Para cada iteração, é necessário calcular o valor numérico do $P_n(x_k)$ e $P_n'(x_k)$.

Exemplo:
$P_5(x) = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + a_3.x^3 + a_4.x^4 + a_5.x^5$
$P_5(r) = a_0 + a_1.r + a_2.r^2 + a_3.r^3 + a_4.r^4 + a_5.r^5$
Nº de somas = 5
Nº de produtos = 15
Para $P_n(r)$:
Nº de somas = n
Nº de produtos = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n = $n\frac{(n-1)}{2}$
$P_5(r) = a_0 + r(a_1 + r(a_2 + r(a_3 + r(a_4 + a_5))))$
Nº de produtos = 5

<u>Esquema de Ruffini-Horner ou Divisão Sintética</u>

	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
r		$b_5.r$ +	$b_4.r$ +	$b_3.r$ +	$b_2.r$ +	$b_1.r$ +
	b_5	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0

$$\begin{array}{r|l} P_n(x) & x - r \\ \cline{2-2} R & Q_{n-1}(x) \end{array}$$

1. $P_n(x) = Q_{n-1}(x)(x-r)+R$
   para x = r:
2. $P_n(r) = Q_{n-1}(r)(r-r)+R$
3. $P_n(r) = R$
4. $P_n'(x) = Q_{n-1}'(x)(x-r)+ Q_{n-1}(x)$
5. $P_n'(r) = Q_{n-1}'(r)(r-r)+ Q_{n-1}(r)$
6. $P_n'(r) = Q_{n-1}(r)$

	b_5	b_4	b_3	b_2	b_1
r		$c_5.r$	$c_4.r$	$c_3.r$	$c_2.r$
	c_5	c_4	c_3	c_2	c_1

7. $c_1 = P_n'(r)$

Exemplo:
$P_5(x) = 8 - 2x + 4x^2 - 7x^3 + 5x^4 + x^5$

	1	5	-7	4	-2	8
2		2	14	14	36	68
	1	7	7	18	34	76
2		2	18	50	136	
	1	9	25	68	170	

$P_5(2) = 76$
P_5ǭ$(2) = 170$

<u>Fórmula Recursiva:</u>

$b_n = a_n$
$b_j = b_{j+1}\, r + a_j$, $j = n-1, n-2, n-3, ..., 4, 3, 2, 1, 0$
$P(r) = b_0$
$cn= b_n$
$c_j = c_{j+1}\, r + b_j$, $j = n-1, n-2, n-3, ..., 4, 3, 2,1$
Pǭ$(r) = c_1$

<u>Localização de zeros</u>

Seja a função f(x) e seja um x suficientemente pequeno.

-Ð 0 +Ð

O problema de localização é encontrar um intervalo I = [a,b], tal que f(a).f(b) < 0.

Raízes positivas:
f(0), f(æx), f(2æx), ..., f(kæx), ...
Testar se f(iæx).f((i+1) æx) < 0 Ÿ i = [iæx, (i+1) æx].

Pode-se saber o número de raízes reais de um polinômio:
Regra de Descartes

Exemplos:
$P_4(x) = 1+ 3x$ ï $5x^2 +4x^3 + 8x^4$
Nº de raízes reais positivas: 1 + 1 = 2
$P_4(x) = 1- 3x$ ï $5x^2 -4x^3 + 8x^4$
Nº de raízes reais negativas: 1 + 1 = 2

4.6 Atividades

1. Verificar que o método de Ruffini Horner tem complexidade linear para encontrar o valor numérico de um Polinômio de grau n

2. A equação $x^2 -10\cos x = 0$ tem duas soluções: ±1,3793646. Utilize o método de Newton para encontrar as soluções aproximadas, com precisão de 10^{-5}, usando valores iniciais x_0 iguais a -100, -50, -25, 25, 50, 100

4.6 Referências

CUNHA, Cristina. **Métodos Numéricos**. 2ª Ed. Campinas SP: Editora da UNICAMP, 2003. ISBN: 85-268-0636-X , CDD ï 620.00151

BURDEN, L. Richard, J. Douglas Faires **Análise Numérica** SP: Editora Pioneira Thomson Learning, 2003. ISBN 85-221-0297-X CDD - 515