# Interpolação Polinomial

## META

**Resolver o problema: dada a função f(x), contínua ou um conjunto de pontos, aproximá-la por um polinômio de grau n.**

## OBJETIVOS

**Estudar os principais algoritmos de construção destes polinômios.**

## 5.1 Introdução

Seja uma função f(x), contínua, uma das idéias mais antigas em cálculo numérico é aproximar esta função por um polinômio.

Um Polinômio é fácil de manipular, encontrar suas derivadas, integrais e suas raízes com relativa facilidade.

O teorema de Weierstrass afirma que *ñToda fun-«o cont²nua pode ser arbitrariamente aproximada por um polin¹ mio.ò*

Os métodos a serem estudados como uma aproximação para uma função f(x) poderão ser aplicados quando, não conhecemos a função, apenas sabemos os pontos $x_0$, $x_1$,$x_2$,$x_3$,..............,$x_n$. Situação muito comum na prática quando se trabalha com dados experimentais.

Se os pontos do parágrafo anterior forem distintos, determina-se um polinômio $P_n(x)$ de grau no máximo n, tal que

Seja o conjunto de pontos ($x_1$, $y_1$), ($x_2$, $y_2$), ($x_3$, $y_3$),..., ($x_n$, $y_n$)

O problema de interpolação é encontrar um $\bar{x}$ para um $\bar{y}$ צ [ $x_0$, $x_n$ ].

## 5.1 Interpolação Linear

Seja o par de pontos ($x_0$, $y_0$)($x_1$, $y_1$), a equação da reta que passa pelos pontos é:

y = $a_0$ + $a_1$x, tal que $\begin{cases} y_0 = a_0 + a_1x_0 \\ y_1 = a_0 + a_1x_1 \end{cases}$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & y_0 \\ 1 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix}} \qquad a_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_0 \\ y_1 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix}}$$

## 5.2 Interpolação Quadrática

Para 3 pontos ($x_0$, $y_0$), ($x_1$, $y_1$), ($x_2$, $y_2$) não-colineares.

Seja $P_2(x)$ polinômio de grau 2:

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$
$$y_0 = P_2(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2$$
$$y_1 = P_2(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2$$
$$y_2 = P_2(x_2) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 \\ 1 & x_1 & {x_1}^2 \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

## 5.3 Interpolação para um polinômio de grau n

Para n+1 pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2),... ,(x_n, y_n)$ não-colineares.
Seja $P_n(x)$ polinômio de grau n:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

$$y_0 = P_n(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + ... + a_nx_0^n$$
$$y_1 = P_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + ... + a_nx_1^n$$
$$\vdots$$
$$Y_n = P_n(x_n) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + ... + a_nx_n^n$$

$$\begin{bmatrix} 1 & {x_0}^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & {x_1}^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & {x_n}^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_n \end{bmatrix}$$

O problema de encontrar o polinômio que passe pelos pontos dados equivale a resolver o sistema de n+1 equações com n+1 incógnitas. Estudaremos métodos que resolvem esta situação em forma implícita.

## 5.4 Método de Lagrange

Este método é construtivo que engenhosamente pensó Lagrange, e que tentaremos reproduzir supondo quatro pontos dados ...
Sejam os pontos . $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$.

**Etapa 1**
Seja o polinômio de grau 3 construído da forma seguinte:

$$P_3(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x) + y_3L_3(x)$$

Este polinômio será de grau 3 só se $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$ e $L_3(x)$ forem polinômios de grau 3, estes polinômios chamaremos de Polinômios de Lagrange.

**Etapa 2**
O polinômio deve passar pelos pontos dados, ou seja, $P_3(x_0) = y_0$, $P_3(x_1) = y_1$, $P3(x_2) = y_2$ e $P_3(x_3) = y_3$.
Para isto acontecer:

$P_3(x_0) = y_0$, $L_0(x_0) = 1$, $L_1(x_0) = 0$, $L_2(x_0) = 0$ e $L_3(x_0) = 0$
$P_3(x_1) = y_1$, $L_0(x_1) = 0$, $L_1(x_1) = 1$, $L_2(x_1) = 0$ e $L_3(x_1) = 0$
$P_3(x_2) = y_2$, $L_0(x_2) = 0$, $L_1(x_2) = 0$, $L_2(x_2) = 1$ e $L_3(x_2) = 0$
$P_3(x_3) = y_3$, $L_0(x_3) = 0$, $L_1(x_3) = 0$, $L_2(x_3) = 0$ e $L_3(x_3) = 1$

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i \neq j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \Delta_{ij}$$

**Etapa 3**
Os $L_i(x)$ são polinômios de grau 3.

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

Podemos verificar que depois destas três etapas o polinômio pode ser encontrado sem ter que resolver o sistema 4x4.

## 5.5 Fórmula Geral

Em geral para $(x_i,y_i)$ i=0,1,2,3,4,5, ...,n
Teríamos que resolver um sistema de $n+1_x n+1$
A fórmula geral é dada pelas equações seguintes:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i . L_i(x)$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_0 - x_j)}$$

Exemplo:
Determinar o polinômio que passe por: (0,3) (1,5) (3,7) (4,9) e estimar o valor de y quando x=2

Solução:
$P_3(x) = 3L_0(x) + 5L_1(x) + 7L_2(x) + 9L_3(x)$

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(0-1)(0-3)(0-4)} = -\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{12}$$

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-3)(x-4)}{(1-0)(1-3)(1-4)} = -\frac{(x-0)(x-3)(x-4)}{6}$$

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(3-0)(3-1)(0-4)} = -\frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{6}$$

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(4-0)(4-1)(4-3)} = -\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{12}$$

$$P_3(x) = \frac{3(x-1)(x-3)(x-4)}{12} + \frac{5(x-0)(x-3)(x-4)}{6} - \frac{7(x-0)(x-1)(x-4)}{6} + \frac{9(x-0)(x-1)(x-3)}{12}$$

$$P_3(2) = \frac{3(1)(-1)(-2)}{12} + \frac{5(2)(-1)(-2)}{6} - \frac{7(2)(1)(-2)}{6} + \frac{9(2)(1)(-1)}{12} = -\frac{1}{2} + \frac{10}{3} + \frac{14}{3} - \frac{3}{2} = \frac{24}{3} - \frac{4}{2} = 8 - 2 = 6$$

## 5.6 Algoritmo de Lagrange

O algoritmo é a implementação lógica das duas fórmulas dadas em 5.5

```
P1. Fornecer os valores de (xi,yi) i=0,1,2,3,4,5............,n, e o valor a interpolar x*,
    verificar se xi Í xj
P2. soma Ŷ 0
P3. Para i = 0 até n
        prod Ŷ 1
        para j=0 até n
            Se i Í j
.               prod Ŷ prod*(x*-xj)/(xi-xj)
            fim se
        fim para
        soma Ŷ prod*yi
    fim para
P4. Mostrar soma // é o valor interpolado
```

## 5.7 Programa de Lagrange no SciLab

O programa foi feito para mostrar o polinômio e calcular após o valor interpolado:

```
// Lagrange
n=input('numero de pontos :');
[x]=input('Digite os valores de x(i),i=1 n entre colchetes:');
[y]=input('Digite os valores de y(i),i=1 n entre clochetes:');
for i=1:n
        for j=1:n
                if i <> j
                        if x(i)==x(j)
                                abort
                        end
                end
```

```
        end
end

xb=poly(0,"x");
yb=0;
for i= 1:n
        p=1;
        for j=1:n
                if i <> j then
                        p=p*(xb-x(j))/(x(i)-x(j));
                end
        end
        yb=yb+p*y(i);
end
yb
xp=input('valor a interpolar :');
horner(yb,xp)
```

Outros métodos que veremos a seguir baseiam-se no fato dos pontos estarem igualmente espaçados, isto é $x_1$-$x_0$=$x_2$-$x_1$=$x_3$-$x_2$= ......... =$x_n$-$x_{n-1}$=h , e necessitamos definir um operador que facilite a notação das fórmulas que encontrarão os polinômios.

## 5.8 Diferencias Finitas

Seja o conjunto de pontos ($x_0$, $y_0$), ($x_1$, $y_1$), ($x_2$, $y_2$),..., ($x_n$, $y_n$), tal que $x_i$=$x_0$+i.h, para i = 0, 1, 2, ..., n.

Definimos o operador diferença φincremento h, como:

$$\begin{aligned}\underset{h}{\Delta}f(x) = \underset{h}{\Delta}(x^3 - 2x + 1) &= [(x+h)^3 - 2(x+h) + 1)] - [x^3 - 2x + 1] \\ &= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2x - 2h + 1 - x^3 + 2x - 1 \\ &= 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2h\end{aligned}$$

## 5.9 Propiedades do operador

P1: $\underset{h}{\Delta}\big(f(x) + g(x)\big) = \underset{h}{\Delta}f(x) + \underset{h}{\Delta}g(x)$

P2: $\underset{h}{\Delta}c = 0,$ c constante

P3: $\underset{h}{\Delta}c.f(x) = c.\underset{h}{\Delta}f(x)$

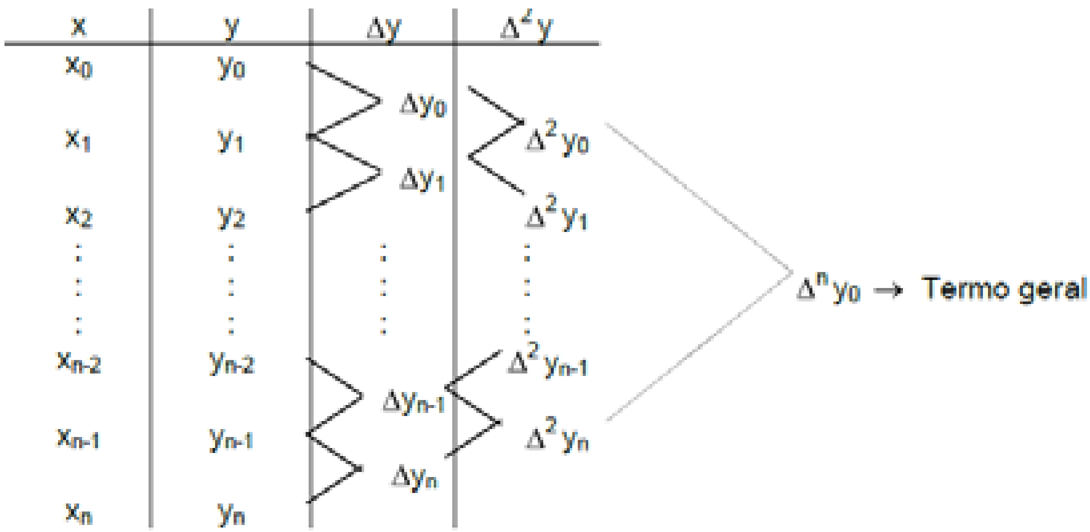
P4: $\underset{h}{\Delta}\underset{h}{\Delta}f(x) = \underset{h}{\Delta^2}f(x)$

P5: $\underset{h}{\Delta^m}\underset{h}{\Delta^n}f(x) = \underset{h}{\Delta^{m+n}}f(x),$ m e n $\in Z^+$

P6: $\underset{h}{\Delta^n} P_n(x) = c,$ c constante

P7: $\underset{h}{\Delta^{n+1}} P_n(x) = 0$

## 5.10 Tabela de diferencias




Exemplo:
(0, 1) (1,2) (2,9) (3, 28)

Solução:

| x | y | $\Delta y$ | $\Delta^2 y$ | $\Delta^3 y$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | |
| | | 1 | | |
| 1 | 2 | | 6 | |
| | | 7 | | 6 $\rightarrow \Delta^3 y$ |
| 2 | 9 | | 12 | |
| | | 19 | | |
| 3 | 28 | | | |

**Termo Geral da Tabela**

$$\underset{h}{\Delta^n} y_0, \qquad \underset{h}{\Delta^n} y_j$$

$$\Delta y_1 = y_1 - y_0$$
$$\Delta^2 y_0 = \Delta(\Delta y_0) = \Delta(y_1 - y_0) = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0)$$
$$= y_2 - 2y_1 + y_0$$
$$\Delta^3 y_0 = \Delta(\Delta^2 y_0) = \Delta(y_2 - 2y_1 + y_0) = \Delta y_2 - 2\Delta y_1 - \Delta y_0$$
$$= (y_3 - y_2) - 2(y_2 - y_1) + (y_1 - y_0) = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$
$$\Delta^4 y_0 = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0$$

$$\Delta^n y_1 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} y_{n-i} \cdot (-1)^i$$

## 5.11 Atividades

1. Determine o tamanho do $h = x_{i+1} - x_i$ para a construção da tabela de $f(x) = e^x$ em [0,1] para que o erro de truncamento na interpolação linear seja menor que 0.005

2. Dado f(x) = sen x , f(0.1) = 0.09983 ; f(0.2) = 0.19867 Determine o valor f(0.16) e calcule o erro de truncamento

$$E_t = \left| \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2} \right| |f''(r)| \ , \ f''(r) = \max_x \{| f''(x)| \}$$

3. Para $f(x) = 5^x$ obtenha f(0.3) e o erro de truncamento se f(0.5) = 2.23608

## 5.11 Referências

CUNHA, Cristina. **Métodos Numéricos**. 2ª Ed. Campinas SP: Editora da UNICAMP, 2003. ISBN: 85-268-0636-X , CDD ï 620.00151

BURDEN, L. Richard, J. Douglas Faires **Análise Numérica** SP: Editora Pioneira Thomson Learning, 2003. ISBN 85-221-0297-X CDD - 515