Interpolação Polinomial

META

Resolver o problema de interpolação para pontos igualmente espaçados, gerando um polinômio de grau n.

OBJETIVOS

Estudar os algoritmos de Newton para a construção destes polinômios.

lino@ufs.br

6.1 Introdução

Os métodos seguintes usam as diferenças finitas na sua estrutura. Portanto, os pontos devem estar igualmente espaçados.

6.2 O método de Newton para interpolação

Seja o conjunto de pontos (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2),..., (x_n, y_n) igualmente espaçados:

$$x_1 = x_0 + i.h, \quad i = 0,1,2, ...,n$$

O polinômio de interpolação de Newton de grau n que passa pelos pontos dados é:

$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x \text{ ï } x_0)(x \text{ ï } x_1) + a_3(x \text{ ï } x_0)(x \text{ ï } x_1)(x \text{ ï } x_2) +... +$
$a_n(x \text{ ï } x_0)(x \text{ ï } x_1)(x \text{ ï } x_2)... (x \text{ ï } x_{n-1})$

$P_n(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, 2, ..., n$
$P_n(x_0) = y_0 = a_0$
$P_n(x_1) = y_1 = a_0 + a_1(x - x_0)$
$P_n(x_2) = y_2 = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x \text{ ï } x_0)(x \text{ ï } x_1)$
.
:
$P_n(x_n) = y_n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x \text{ ï } x_0)(x \text{ ï } x_1) +... + a_n(x \text{ ï } x_0)(x \text{ ï } x_1)(x \text{ ï } x_2)...$
$(x \text{ ï } x_{n-1})$

$y_1 = y_0 + a_1.h$ Ÿ $a_1 = \frac{(y_1 - y_0)}{h} = \frac{\Delta y_0}{h}$
$y_2 = y_0 + a_1.2h + a_2.2h.h$
$y_2 = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{h}.2h + a_2.2h^2$ Ÿ $a_2 = \frac{-2y_1 + y_0 + y_2}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}$

$$a_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{6h^3}$$
.
:
$$a_i = \frac{\Delta^i y_0}{i!\,h^i}$$

$$P_n = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!\,h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})$$

6.3 Notação fatorial decrescente

$$(x \text{ ï } x_0)(x \text{ ï } x_1) = (x \text{ ï } x_0)^{(2)}$$

Significa que tem-se dois fatores de base $(x - x_0)$ decrementando o outro fator em h.

$$(x \text{ ï } x_0)(x \text{ ï } x_0 - h) = (x \text{ ï } x_0)(x \text{ ï } x_1)$$

Em geral:

$$x^{(n)} = x(x-h)(x-2h)(x-3h)..(x-(n-1)h)$$

6.4 Primeira Fórmula de Newton

A primeira fórmula de Newton pode ser escrita em forma compacta usando a notação fatorial geral decrescente.

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\Delta^i y_0}{i!h^i}(x-x_0)^{(i)}$$

Primeira Fórmula de Newton ou Newton Progressiva

Exemplo:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	1	1	6	6
1	2	7	12	
2	9	19		
3	28			

h = 1

$$P(x) = 1 + \frac{1}{1!1}(x-x_0) + \frac{6}{2!1^2}(x-x_0)(x-x_1) + \frac{6}{3!1^3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$P(x) = 1 + x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2) = 1 + x + 3x^2 - 3x + x^3 - 3x^2 + 2x =$$

$$= x^3 + 1$$

6.5 Segunda fórmula de Newton

Seja o conjunto de pontos igualmente espaçados:

$$(x_0, y_0)\ (x_1, y_1)\ (x_2, y_2)\ \ldots\ (x_n, y_n)$$

tais que:

$$x_i = x_0 + i.h \quad , \quad i = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n$$

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + a_3(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + \\ + \ldots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})\ldots(x - x_1)$$

$$P(x_i) = y_i \quad \forall i$$

$$\begin{cases} P(x_n) = y_n = a_0 \\ P(x_{n-1}) = y_{n-1} = a_0 + a_1(x_{n-1} - x_n) \\ \quad \vdots \\ \quad \vdots \\ P(x_0) = y_0 = a_0 + a_1(x_0 - x_n) + a_2(x_0 - x_n)(x_0 - x_{n-1}) + \ldots + \\ \quad + a_n(x_0 - x_n)(x_0 - x_{n-1})\ldots(x_0 - x_1) \end{cases}$$

$$a_0 = y_n$$

$$y_{n-1} = a_0 + a_1(-h) \quad \rightarrow \quad a_1 = -\frac{y_{n-1} - a_0}{h} = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \frac{\Delta y_{n-1}}{h}$$

$$y_{n-2} = a_0 + a_1(-h) + a_2(-2h)(-h)$$

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2h^2}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$a_i = \frac{\Delta^i y_{n-i}}{i!h^i}$$

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots + \\ + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1)$$

6.6 Notação fatorial crescente

$$(x - x_n)(x - x_{n-1}) = (x - x_n)^{|2|} = (x - x_n)(x - x_n + h)$$

Em geral:

$$x^{|n|} = x(x+h)(x+2h)(x+3h)\ldots(x+(n-1)h)$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\Delta^i y_{n-i}}{i!h^i}(x - x_n)^{|i|}$$

6.7 Método de Aitken

Este é um outro método para encontrar um polinômio que passe pelos pontos dados. E estes podem estar desigualmente espaçados.

Seja o conjunto de pontos (x_0, y_0) (x_1, y_1) (x_2, y_2) ... (x_n, y_n), não necessariamente igualmente espaçados.

O polinômio linear interpolante para o par de pontos (x_0, y_0) , (x_1, y_1) é:

$$P_1(x) = y_0 \cdot \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \cdot \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \qquad \text{(Fórmula de Lagrange)}$$

$$P_1(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0 (x - x_0)}{h} \qquad \text{(Fórmula de Newton)}$$

$$P_1(x) = \frac{1}{x_1 - x_0} \cdot \begin{vmatrix} x - x_0 & y_0 \\ x - x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

<u>Tabela de Aitken</u>

x	y	x - x_i	P		
x_0	y_0	x - x_0			
			$P_{01}(x)$		
x_1	y_1	x - x_1		$P_{012}(x)$	
			$P_{12}(x)$		$P_{0123...n}(x)$
x_2	y_2	x - x_2		$P_{123}(x)$	
:	:	:			
:	:	:		$P_{n-2\,n}(x)$	
			$P_{n-1\,n}(x)$		
x_n	y_n	x - x_n			

$P_{01}(x)$ é um polinômio de grau 1 que passa pelos pontos (x_0, y_0) , (x_1, y_1).

$P_{12}(x)$ é um polinômio de grau 1 que passa pelos pontos (x_1, y_1) , (x_2, y_2).

$$P_{01}(x)=\frac{1}{x_1-x_0}\cdot\begin{vmatrix} x-x_0 & y_0 \\ x-x_1 & y_1 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} P_{01}(x_0)=y_0 \\ P_{01}(x_1)=y_1 \end{matrix}$$

$$P_{12}(x)=\frac{1}{x_2-x_1}\cdot\begin{vmatrix} x-x_1 & y_1 \\ x-x_2 & y_2 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} P_{12}(x_1)=y_1 \\ P_{12}(x_2)=y_2 \end{matrix}$$

O polinômio $P_{012}(x)$ definido como:

$$P_{012}(x)=\frac{1}{x_2-x_0}\begin{vmatrix} x-x_0 & P_{01}(x) \\ x-x_2 & P_{12}(x) \end{vmatrix}$$

é um polinômio de grau 2 e que passa pelos pontos (x_0, y_0) (x_1, y_1) (x_2, y_2).

$$P_{012}(x_0)=\frac{1}{x_2-x_0}[(x_0-x_0).P_{12}(x_0)-(x_0-x_2).P_{01}(x_0)]=P_{01}(x_0)=y_0$$

$$P_{012}(x_1)=\frac{1}{x_2-x_0}[(x_1-x_0).P_{12}(x_1)-(x_1-x_2).P_{01}(x_1)]=$$

$$=\frac{1}{x_2-x_0}[h.y_1-(-h)y_1]=\frac{2.h.y_1}{2.h}=y_1$$

$$P_{012}(x_2)=\frac{1}{x_2-x_0}[(x_2-x_0).P_{12}(x_2)-(x_2-x_2).P_{01}(x_2)]=$$

$$=\frac{1}{x_2-x_0}(x_2-x_0).y_2=y_2$$

$$P_{0123\ldots n}(x)=\frac{1}{x_n-x_0}\begin{vmatrix} x-x_0 & P_{012\ldots n-1}(x) \\ x-x_n & P_{123\ldots n-1}(x) \end{vmatrix}$$

6.8 Interpolação Inversa

Seja o conjunto de pontos (x_0,y_0) (x_1,y_1) (x_2,y_2) ... (x_n,y_n).
Dado um $\overline{y}$ determinar o $\overline{x}$.
O polinômio deve passar pelos pontos (y_1,x_1) (y_2,x_2) ... (y_n,x_n) , isto é, $P_n(y_i)=x_i$.

<u>Solução por Lagrange:</u>

$$P_n(y)=\sum_{i=0}^{n} x_i.L_i(y)$$

$$L_i(y)=\prod_{\substack{j=0 \\ i\neq j}}^{n}\frac{y-y_i}{y_i-y_j}$$

6.9 Atividades

1. Determine :

a) $\underset{1}{\Delta}^{k} x$ b) $\underset{h}{\Delta} x^{(n)}$

c) $\underset{1}{\Delta} \operatorname{sen} x$ d) $\underset{1}{\Delta} f(x+h)$

e) $\Delta x!$ f) $\Delta (x + n)^{|n|}$

2. Encontre a formula geral para um elemento da tabela de diferenças finitas.

3. Determine log 4.5 da tabela a seguir pelo método de Aitken

x	4.0	4.2	4.4	4.6	4.8
log x	0.60206	0.62325	0.64345	0.66276	0.68124

6.10 Referências

CUNHA, Cristina. **Métodos Numéricos**. 2ª Ed. Campinas SP: Editora da UNICAMP, 2003. ISBN: 85-268-0636-X , CDD ï 620.00151

BURDEN, L. Richard, J. Douglas Faires **Análise Numérica** SP: Editora Pioneira Thomson Learning, 2003. ISBN 85-221-0297-X CDD - 515