Aproximação por Mínimos Quadrados

META

Resolver o problema de aproximação usando métodos de otimização.

OBJETIVOS

Estudar os algoritmos de Mínimos quadrados para diferentes tipos de funções.

lino@ufs.br

7.1 Introdução

A aproximação por mínimos quadrados é um método de otimização. Dados um conjunto de pontos (x_i,y_i) i=0,1,2,3,4,.........,n, a priori é definida uma função que tende a aproximar os pontos dados. Pode ser um polinômio, uma função logarítmica, exponencial ou trigonométrica. Escolhe-se uma métrica que meça os pontos dados à função, e escolhemos os parâmetros da melhor função que se ajusta aos pontos.

7.2 Método de Mínimos Quadrados

Seja o conjunto de pontos (x_0, y_0) (x_1, y_1) (x_2, y_2) … (x_n, y_n).
Seja uma função f(x) que ajustará os pontos dados, através de uma métrica d_i.

<u>Exemplos de métricas:</u>

$$d_i = f(x_i) - y_i$$
$$|d_i| = |f(x_i) - y_i|$$
$$(d_i)^2 = (f(x_i) - y_i)^2$$
$$\min \sum \mathrm{d_i}$$
$$\min \sum_{i=0}^{n} d_i^2$$

<u>Mínimos Quadrados</u>

Seja $f(x) = P_1(x)$:

$$P_1(x) = a_0 + a_1.x$$
$$d_i = P_1(x_i) - y_i$$
$$d_i = a_0 + a_1.x_i - y_i$$
$$\min \sum_{i=0}^{n} d_i^2 = \min \sum_{i=0}^{n} (a_0 + a_1.x_i - y_i)^2$$
$$G(a_0, a_1) = \sum_{i=0}^{n} (a_0 + a_1.x_i - y_i)^2$$

$$\frac{\partial G(a_0, a_1)}{\partial a_0} = 0$$
$$\frac{\partial G(a_0, a_1)}{\partial a_1} = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} 2(a_0 + a_1.x_i - y_i)(1) = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} 2(a_0 + a_1.x_i - y_i)(x_i) = 0$$

$$\sum a_0 + a_1 \sum x_i - \sum y_i = 0$$

$$a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 - \sum x_i.y_i = 0$$

$$(n+1)a_0 + a_1 \sum x_i = \sum y_i$$

$$a_0 \sum x_i + a_i \sum x_i^2 = \sum x_i.y_i$$

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} \sum y_i & \sum x_i \\ \sum x_i.y_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (n+1) & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix}} \qquad a_1 = \frac{\begin{vmatrix} n+1 & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i.y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (n+1) & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix}}$$

Se o polinômio for de grau 2:

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$d_i = P_2(x_i) - y_i$$

$$\min \sum_{i=0}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i)^2$$

$$G(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=0}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i)^2$$

$$\frac{\partial G}{\partial a_0} = 0; \quad \frac{\partial G}{\partial a_1} = 0 \text{ e } \frac{\partial G}{\partial a_2} = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} 2(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i)(1) = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} 2(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i)(x_i) = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} 2(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i)(x_i)^2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} n+1 & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i.y_i \\ \sum x_i^2.y_i \end{bmatrix}$$

Matriz Simétrica

Em geral:

$$\begin{bmatrix} n+1 & \sum x_i & \sum x_i^{2} & 3 & \sum x_i^{n} \\ \sum x_i & \sum x_i^{2} & \sum x_i^{3} & 3 & \sum x_i^{n+1} \\ 4 & 4 & 4 & 3 & 4 \\ \sum x_i^{n} & \sum x_i^{n+1} & \sum x_i^{n+2} & 3 & \sum x_i^{n+n} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ 4 \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i . y_i \\ 4 \\ \sum x_i^{n} . y_i \end{bmatrix}$$

7.3 Atividades

1. O volume de álcool anídrico em função da temperatura esta dado pela tabela abaixo:

Temp (Graus C)	13.9	43.0	67.8	89.0	99.2
Volume(cm^3)	1.04	1.12	1.19	1.24	1.27

Fazer um ajuste para $v(t) = 1 + bt + ct^2$
Construir a tabela v = v(t) para t = 20(5)40

2. Dada a tabela

x	1.0	1.05	1.1	1.15	1.2	1.25	1.3	1.35
y	1.0	1.01	1.02	1.04	1.05	1.06	1.065	1.08

Estimar f(1.22) por regresão linear.

7.3 Referências

CUNHA, Cristina. **Métodos Numéricos**. 2ª Ed. Campinas SP: Editora da UNICAMP, 2003. ISBN: 85-268-0636-X , CDD ï 620.00151

BURDEN, L. Richard, J. Douglas Faires **Análise Numérica** SP: Editora Pioneira Thomson Learning, 2003. ISBN 85-221-0297-X CDD - 515