Integração Numérica

META

Resolver uma integral usando aproximação polinomial.

OBJETIVOS

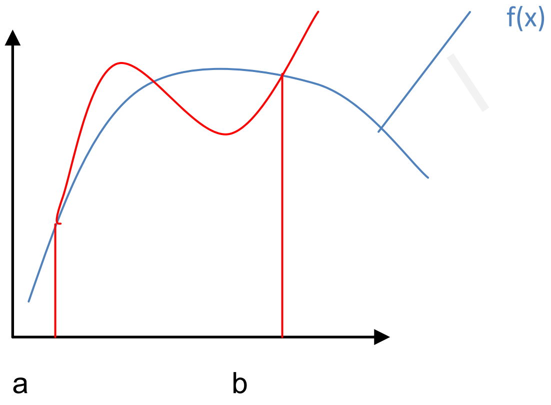
Estudar os algoritmos que resolvem em forma aproximativa a integral de uma função e estimar o seu erro.

lino@ufs.br

8.1 Introdução

Os métodos de aproximação polinomial são usados para integrar numericamente uma função y=f(x) num intervalo dado [a,b] ou mesmo um conjunto de pontos (x_i,f(y_i)) i=0,1,2,3,4,.........,n.

Casos em que a função é difícil integral ou não tem solução analítica, um polinômio sempre é de integração imediata.



A área fechada em vermelho representa a integral definida do polinômio, e a línha em azul é a função.

8.2 Integração Numérica

Seja a integral definida da função f(x):

$$\int_a^b f(x)dx$$

A integração numérica é utilizada quando não conhecemos a função, e sim pontos dela, ou a função não é uma função integrável analiticamente.

<u>Solução:</u>

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_1(x)dx$$

<u>Aproximação Linear:</u>

$$\int_a^b (a_0 + a_1.x)dx = [a_0 + a_1 x/2]_a^b = a_0.b + (a_1.b^2/2) - a_0.a - (a_1.a^2/2)$$

Dados dois pontos de f(x): (x_0, y_0) e (x_1, y_1).

$$P_1(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) \qquad \text{(Newton Progressivo)}$$

onde :

$$h = (x_1 - x_0)$$
$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$
$$a = x_0$$
$$b = y_0$$

$$\int_{x_0}^{x_1} P_1(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1}[y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0)]\,dx = y_0.x + \frac{\Delta y_0}{h}(x^2/2 - x.x_0)\Big|_{x_0}^{x_1} =$$
$$= y_0.x + \frac{\Delta y_0}{h}(x_1{}^2/2 - x_1.x_0) - y_0x_0 - \frac{\Delta y_0}{h}(\frac{x_0{}^2}{2} - x_0{}^2) =$$
$$= y_0.(x_1 - x_0) + \frac{\Delta y_0}{h}(x_1{}^2/2 - x_1.x_0 + x_0{}^2/2) =$$
$$= y_0.h + \frac{\Delta y_0}{h}\cdot\frac{1}{2}(x_1 - x_0)^2 = y_0.h + \frac{\Delta y_0.h^2}{2h} =$$
$$= \frac{\Delta y_0.h}{2} + y_0.h = h\left(y_0 + \frac{y_1 - y_0}{2}\right) = \left(\frac{2y_0 + y_1 - y_0}{2}\right)\cdot h =$$
$$= h\left(\frac{y_0 + y_1}{2}\right) = \frac{h}{2}[y_0 + y_1]$$

$$\int_{x_0}^{x} P_1(x)dx = \frac{h}{2}[y_0 + y_1]$$

$$A = [y_0 + y_1]\frac{h}{2} \qquad , \qquad \text{A = Área do Trapézio}$$

Para (x_0, y_0) (x_1, y_1) (x_2, y_2) :

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx$$
$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2}[y_2 + \frac{\Delta y_1}{h}\cdot(x - x_2) + \frac{\Delta^2 y_1}{2.h^2}(x - x_2)^{|2|}]\,dx$$

Seja $t = \frac{x - x_2}{h}$.

$$\text{Para } x = x_0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{x_0 - x_2}{h} = \frac{-2.h}{h} = -2$$

$$\text{Para } x = x_2 \quad \rightarrow \quad t = \frac{x_2 - x_2}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

$$\begin{aligned}(x - x_2)^{|2|} &= (x - x_2)(x - x_2 + h) = \\ &= (x - x_2)(x - (x_2 - h)) = \\ &= (x - x_2)(x - x_1)\end{aligned}$$

$$\frac{(x - x_2)^{|2|}}{h^2} = \frac{(x - x_2)}{h} \cdot \frac{(x - x_1)}{h} = t(t+1)$$

$$dt = \frac{1}{h}dx \quad \rightarrow \quad dx = h.dt$$

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{0}[y_2 + \Delta y_1 t + \frac{\Delta^2 y_0}{2} t(t+1)].h.dt &= h[y_2 t + \frac{\Delta y_1 t}{2} + \frac{\Delta^2 y_0}{2}\left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right)]_{-2}^{0} = \\ &= h[2y_2 - 2\Delta y_1 - \frac{\Delta^2 y_0}{2}\left(\frac{-8}{3} + \frac{4}{2}\right)] = \\ &= h[2y_2 - 2\Delta y_1 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} \cdot \frac{2}{3}] = \\ &= h[2y_2 - 2\Delta y_1 - \frac{\Delta^2 y_0}{3}] = \\ &= \frac{1}{3}h[6y_2 - 6\Delta y_1 - \Delta^2 y_0] = \\ &= \frac{1}{3}h[6y_2 - 6y_2 + 6y_1 - \Delta^2 y_0] = \\ &= \frac{1}{3}h[6y_1 + y_2 - 2y_1 + y_0] = \frac{1}{3}h[6y_1 + y_2 - 2y_1 + y_0]\end{aligned}$$

8.3 Fórmula Geral (Newton - Cotes)

Seja o conjunto de pontos (x_0, y_0) (x_1, y_1) (x_2, y_2) … (x_n, y_n).

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_1(x)dx$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i.L_i(x) \quad \text{(Fórmula de Lagrange)}$$

Sejam os pontos igualmente espaçados:

$$\mathrm{L_i}(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)....(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)(x_i-x_2)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}$$

Se $x_i = x_0 + i.h$:

$$L_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{i.h.(i-1).h.(i-2).h.....h.(-h).(-2h)....-(n-i).h}$$

Seja $S=\dfrac{x-x_0}{h}$, então:

$$\frac{x-x_1}{h}=\frac{x-(x_0+h)}{h}=\frac{x-x_0-h}{h}=S-1$$

$$\frac{x-x_2}{h}=\frac{x-x_0-2h}{h}=S-2$$

$$L_i(S)=\frac{S(S-1)(S-2)(S-3)\ldots(S-(i-1))(S-(i+1))\ldots(S-n)}{i.(i-1).(i-2)\ldots1.(-1).(-2)\ldots.(n-1)}$$

$$L_i(S)=\frac{S^{(n+1)}(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!(S-i)}$$

$$\textit{Para}\ \ \mathrm{x}=\mathrm{x}_0 \ \rightarrow\ \mathrm{S}=\frac{\mathrm{x}_0-x_0}{\mathrm{h}}=0$$

$$x=x_n \ \rightarrow\ \mathrm{S}=\frac{\mathrm{x}_n-x_0}{\mathrm{h}}=n$$

$$dS=\frac{1}{h}dx \rightarrow \mathrm{dx}=\mathrm{h.dS}$$

$$\mathrm{h}\int_0^{\mathrm{n}}\mathrm{P(S)dS}=h\int_0^n\sum_{i=0}^{n}\mathrm{y_i}.L_i(S)dS=h\sum_{i=0}^{n}\mathrm{y_i}\int_0^n\frac{S^{(n+1)}(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!(S-i)}ds$$

Se n = 1 → Trapezoidal
n = 2 → Simpson

$$h\sum_{i=0}^{n} y_i \int_0^1 \frac{S^{(2)}(-1)^{1-i}}{i!(1-i)!(S-i)}ds = h[y_0 \int_0^1 \frac{S^{(2)}(-1)^{1-0}}{0!(1-0)!(S-0)}ds + y_1 \int_0^1 \frac{S^{(2)}(-1)^{1-1}}{1!(1-1)!(S-1)}ds] =$$

$$"S^{(2)} = S(S-1)"$$

$$= h[y_0 \int_0^1 (S-1)(-1)ds + y_1 \int_0^1 Sds] =$$

$$= h[-y_0 \left.\frac{S^2}{2}\right|_0^1 + y_0 S\big|_0^1 + y_1 \left.\frac{S^2}{2}\right|_0^1] =$$

$$= h[-y_0[\frac{1}{2}-1] + y_1[\frac{1}{2}]] =$$

$$= h[\frac{1}{2}y_0 + \frac{y_1}{2}] = \frac{h}{2}[y_0 + y_1]$$

8.4 Método de Romberg para Integrações Numéricas

Seja o conjunto de pontos $(x_0, y_0)(x_1, y_1)(x_2, y_2) \ldots (x_n, y_n)$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$$

A idéia de Romberg é repetir fórmulas que implicitamente geram polinômios de interpolação de grau n.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a+h_1} f(x)dx + \int_{a+h_1}^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a+h_2} f(x)dx + \int_{a+h_2}^{a+2h_2} f(x)dx + \int_{a+2h_2}^{a+3h_2} f(x)dx + \int_{a+3h_2}^b f(x)dx$$

:

:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{2^n-1} \int_{a+ih_n}^{a+(i+1)h_n} f(x)dx$$

As integrais são aproximadas pela Trapezoidal:

$$n=0 \rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ , h = b - a} \rightarrow T_0 = \frac{h}{2}[f(a)+f(b)]$$

$$n=1 \rightarrow T_1 = \frac{h_1}{2}[f(a)+f(a+h_1)] + \frac{h_1}{2}[f(a+h_1)+f(b)] =$$

$$T_1 = \frac{h_1}{2}[f(a)+2f(a+h_1)+f(b)] \text{ , } h_1 = \frac{h}{2}$$

$$n = 2 \quad \rightarrow \quad T_2 = \frac{h_2}{2}[f(a) + f(a + h_2)] + \frac{h_2}{2}[f(a + h_2) + f(a + 2h_2)] +$$

$$+ \frac{h_2}{2}[f(a + 2h_2) + f(a + 3h_2)] + \frac{h_2}{2}[f(a + 3h_2) + f(b)], \; h_2 = \frac{h_1}{2}$$

$$n = k \quad \rightarrow \quad T_k = \frac{h_k}{2}[f(a) + 2\sum_{i=1}^{2^k - 1} f(a + ih_k) + f(b)]$$

Para entender a idéia de Romberg é necessário saber o erro na fórmula Trapezoidal.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(a) + f(b)] \text{ , } h = b - a$$

$$\int_a^b f(x)dx = V_e \quad e \quad \frac{h}{2}[f(a) + f(b)] = V_a$$

$$\varepsilon_T = V_e - V_a = \int_a^b f(x)dx - \frac{h}{2}[f(a) + f(b)]$$

$$\varepsilon_T(h) = \int_a^{a+h} f(x)dx - \frac{h}{2}[f(a) + f(a + h)]$$

$$\varepsilon'_T = f(a + h) - \frac{h}{2}[f'(a + h)] - \frac{1}{2}[f(a) + f(a + h)]$$

$$\varepsilon''_T = f'(a + h) - \frac{h}{2}[f''(a + h)] - \frac{1}{2}f'(a + h) - \frac{1}{2}f'(a + h)$$

$$\varepsilon'_T = -\frac{h}{2}f''(a + h)$$

$$f''(\xi) = \max_h \{f''(a + h)\}$$

$$|\varepsilon''_T(h)| \leq \left|\frac{h}{2}f''(\xi)\right|$$

$$\varepsilon''_T(h) \leq -\frac{h}{2}f''(\xi)$$

$$\int \varepsilon''_T(h)\, dh \leq \int -\frac{h}{2}f''(\xi)\, dh$$

$$\varepsilon'_T(h) \leq -\frac{h^2}{2.2}f''(\xi) + c$$

Se h = 0:

$$\varepsilon'(0) \leq 0 + c \quad \rightarrow \quad c = 0$$

$$\varepsilon'(0) = f(a + 0) - \frac{0}{2}[] - \frac{1}{2}[f(a) + f(a + 0)] = 0$$

$$\int \varepsilon'(h)dh \leq \int -\frac{h^2}{4} f''(\xi)dh$$
$$\varepsilon(h) \leq -\frac{h^3}{12} f''(\xi) + c$$
$$\varepsilon(h) \leq -\frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

O erro é calculado somente se conhecer a função f(x).

$$\int_a^b f(x)dx \approx \mathrm{T}_0 = \frac{h}{2}[f(a) + f(b)]$$

h = b ï a

$$\int_a^b f(x)dx \approx \mathrm{T}_1 = \frac{h_1}{2}[f(a) + 2f(a+h_1) + f(b)]$$

$$1)\ \varepsilon_{\mathrm{T}_0} = -\frac{h^3}{12} f''(\xi)$$
$$2)\ \varepsilon_{\mathrm{T}_1} = -\frac{h_1^{\ 3}}{12} f''(\xi_1) - \frac{h_1^{\ 3}}{12} f''(\xi_2)$$
$$3)\ f''(\xi) = \max\{f''(\xi_1), f''(\xi_2)\}$$
$$4)\ \varepsilon_{\mathrm{T}_1} = -\frac{2.h_1^{\ 3}}{12} f''(\xi)$$
$$5)\ \mathrm{h}_1 = \frac{h}{2} \text{ então } \varepsilon_{\mathrm{T}_0} = -\frac{(2h_1)^3}{12} f''(\xi) \qquad (1)$$
$$6)\ \varepsilon_{\mathrm{T}_0} = -\frac{8h_1^{\ 3}}{12} f''(\xi) \qquad (5)$$
$$7)\ \text{De } (4) \text{ e } (6)$$
$$\varepsilon_{\mathrm{T}_1} = -\frac{2h_1^{\ 3}}{12} f''(\xi)$$
$$\varepsilon_{\mathrm{T}_0} = -\frac{4.2h^3}{12} f''(\xi)$$
$$\Rightarrow \varepsilon_{\mathrm{T}_0} = 4\varepsilon_{\mathrm{T}_1}$$

$$\varepsilon_{T_0} = \int_a^b f(x)dx - T_0 \quad \Big\| \quad \varepsilon_{T_1} = \int_a^b f(x)dx - T_1$$

$$\int_a^b f(x)dx - T_0 = 4\left[\int_a^b f(x)dx - T_1\right]$$

$$4T_1 - T_0 = 3\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{4T_1 - T_0}{3}$$

$$4T_1 = 4\left[\frac{h_1}{2}(f(a) + 2f(a+h_1) + f(b))\right]$$

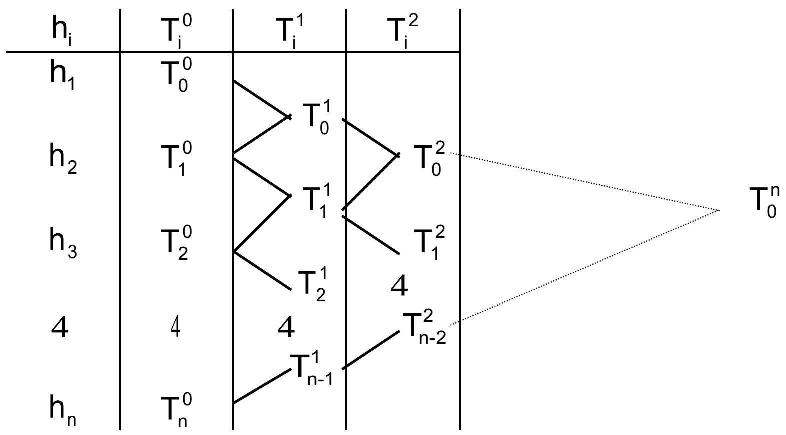
$$T_0 = \frac{h}{2}[f(a) + f(b)] = \frac{2h_1}{2}[f(a) + f(b)]$$

$$4T_1 - T_0 = 2h_1((f(a) + 2f(a+h_1) + f(b))) - h_1((f(a) + f(b))) =$$
$$= h_1((f(a) + 4f(a+h_1) + f(b)))$$

$$\frac{4T_1 - T_0}{3} = \frac{h_1}{3}[f(a) + 4f(a+h_1) + f(b)]$$

Fórmula de Simpson

8.5Tabela de Romberg



$$T_0^1 = \frac{4T_1^0 - T_0^0}{3}$$

$$T_1^1 = \frac{4T_2^0 - T_1^0}{3}$$

4

$$T_i^1 = \frac{4T_{i+1}^0 - T_i^0}{3}$$

$$T_0^2 = \frac{16T_1^1 - T_0^1}{15}$$

$$T_i^2 = \frac{16T_{i+1}^1 - T_i^1}{15}$$

$$T_0^3 = \frac{4^3 T_1^2 - T_0^2}{4^3 - 1}$$

<u>Em geral:</u>

$$T_i^j = \frac{4^j T_{i+1}^{j-1} - T_i^{j-1}}{4^j - 1}$$

8.6 Atividades

1. Determinar fórmulas para integrar

$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx$ e $\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)dx$ usando aproximações de f(x) por polinômios de interpolação Newton progressivo e regressivo.

2. Calcular a integral $\int_0^1 e^{-x}dx$ utilizando a fórmula trapezoidal para n=10 e estimar o erro.

3. Calcular as seguintes integrais pela fórmula trapezoidal e Simpsom com erro menor que 0.01. Determine o h que faz o erro menor que 0.01

a) $\int_0^1 dx/(1+x^3)$ b) $\int_1^2 x \ln x dx$

c) $\int_1^2 e^x / x dx$ d) $\int_1^2 \cos x / x dx$

4. Encontre a fórmula geral para a regra trapezoidal n intervalos igualmente espaçados

5. Seja o intervalo $h_0 = b-a$, $h_1 = h_0/2$,...... $h_n = h_{n-1}/2$ Encontre as trapezoidais T^0, T^1, T^2, ...T^n

6. Determine a fórmula de T^i em função de T^{i-1}

8.7 Referências

CUNHA, Cristina. **Métodos Numéricos**. 2ª Ed. Campinas SP: Editora da UNICAMP, 2003. ISBN: 85-268-0636-X , CDD ï 620.00151

BURDEN, L. Richard, J. Douglas Faires **Análise Numérica** SP: Editora Pioneira Thomson Learning, 2003. ISBN 85-221-0297-X CDD - 515