Solução de Sistemas Lineares

META

Resolver o problema de equações lineares de qualquer tamanho.

OBJETIVOS

Estudar os diversos algoritmos, analíticos e aproximativos e sua implementação no computador.

9.1 Introdução

Muitos problemas de engenharia e pesquisa operacional são resolvidos usando a álgebra linear. Isto é, matematicamente são reduzidos estes problemas a um sistema de equações lineares. Por exemplo: Cálculo da tensão em estruturas da construção civil, solução de equações diferenciais parciais, determinar o potencial em redes elétricas, problemas de otimização, etc.

Quando o sistema é de grande porte, devemos ter cuidado de preservar ao máximo a melhor exatidão e precisão.

9.2 Solução de Sistemas Lineares

Seja o sistema:

$$\mathrm{Ax} = \mathrm{b}$$

onde:

$$A = (a_{i\,j})_{nxn}\,,\ \mathrm{x} = (\mathrm{x}_{\mathrm{i}})\,,\ \mathrm{b} = (\mathrm{b}_{\mathrm{i}})$$

$$\mathrm{i} = 0, 1, 2, ..., \mathrm{n}$$
$$\mathrm{j} = 0, 1, 2, ..., \mathrm{n}$$

ou

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 2 & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 2 & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 2 & a_{3n} \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 4 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & 2 & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 4 \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ 4 \\ b_n \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + a_{13}x_3 + 2 + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + a_{23}x_3 + 2 + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_1 + a_{33}x_3 + 2 + a_{3n}x_n = b_3 \\ 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + 2 + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

ou

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\ ,\ \mathrm{i} = 1,\ 2,\ 3, ...,\ \mathrm{n}$$

Um sistema linear nxn que admite uma única solução é chamado de **determinado**, se admite várias soluções é dito de **indeterminado**, e se não admite solução ele é **impossível.**

9.3 Solução algébrica:

$$Ax = b$$

1) Se o determinante de $|A| \neq 0$, então <u>existe</u> inversa da matriz A, A^{-1}.

2) Multiplicando a esquerda por A^{-1}:

$$A^{-1}.Ax = A^{-1}.b$$
$$Ix = A^{-1}.b$$

3) $x = A^{-1}.b$ (Solução teórica)

Na prática, se o sistema for de ordem $n \geq 5$, há dificuldade de resolver em forma manual.

9.4 Método de Eliminação Gaussiana

Seja o sistema:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= a_{15} \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= a_{25} \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_1 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= a_{35} \\
a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= a_{45}
\end{aligned}$$

O método consiste em transformar o sistema $Ax = b$ em outro sistema equivalente Dx = f, tal que, D é uma matriz triangular superior.
Para isto, utilizam-se as propriedades das equações:

P1: Se multiplicamos por uma constante uma equação a equação não varia.
P2: A soma de duas equações é linearmente dependente as equações somadas

A transformação ocorre usando estas duas propriedades

$$Ax = b \quad \rightarrow \quad Dx = f$$

A matriz D resultante é triangular superior.

Exemplo de matriz triangular superior:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

9.5 Algoritmo de triangularização

<u>Passo 1:</u> Se $a_{11} = 0$ ent«o ñTroca linha 1 por linha i, i = 2, 3, 4ò

$$\text{linha } 1 \leftarrow \text{linha } 1$$

$$\text{linha } 2 \leftarrow \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) \cdot linha\,1 + linha\,2$$

$$\text{linha } 3 \leftarrow \left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right) \cdot linha\,1 + linha\,3$$

$$\text{linha } 4 \leftarrow \left(-\frac{a_{41}}{a_{11}}\right) \cdot linha\,1 + linha\,4$$

<u>Passo 2:</u> Se $a_{22} = 0$ ent«o ñTroca linha 2 por linha i, i = 3, 4ò

$$\text{linha } 1 \leftarrow \text{linha } 1$$

$$\text{linha } 2 \leftarrow \text{linha } 2$$

$$\text{linha } 3 \leftarrow \left(-\frac{a_{32}}{a_{22}}\right) \cdot \text{linha } 2 + \text{linha } 3$$

$$\text{linha } 4 \leftarrow \left(-\frac{a_{42}}{a_{22}}\right) \cdot \text{linha } 2 + \text{linha } 4$$

<u>Passo 3:</u> Se $a_{33} = 0$ ent«o ñTroca linha 2 por linha i, i = 4ò

$$\text{linha } 1 \leftarrow \text{linha } 1$$

$$\text{linha } 2 \leftarrow \text{linha } 2$$

$$\text{linha } 3 \leftarrow \text{linha } 3$$

$$\text{linha } 4 \leftarrow \left(-\frac{a_{43}}{a_{33}}\right) \cdot \text{linha } 3 + \text{linha } 4$$

Para encontrar o termo geral definimos três índices.
Índice para o Passo: k = 1, 2, 3;
Índice para a linha: i = k+1,....,4;
Índice para a coluna: j = k,.........,5.

Algoritmo:

Para k = 1, 2, 3
    Se $a_{kk} = 0$ então Rotina Troca
    Para i = k+1 até 4
        Para j = k até 5

$$a_{ij} = \left(-\frac{a_{ik}}{a_{kk}}\right) \cdot a_{kj} + a_{ij}$$

        Fim
    Fim
Fim

Para qualquer N:

k = 1 até N-1
i = k+1 até N
j = k até N+1

$$x_4 = a_{45} / a_{44}$$
$$x_3 = (a_{35} - a_{34}x_4) / a_{33}$$
$$x_2 = (a_{25} - a_{23}x_3 - a_{24}x_4) / a_{22}$$
$$x_1 = (a_{15} - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - a_{14}x_4) / a_{11}$$

Termo geral:

$$x_n = a_{n\,n+1} / a_{n\,n}$$

$$x_j = (a_{j\,N+1} - \sum_{r=j+1}^{N} a_{ir}x_r) / a_{jj}$$

j = n-1,n-2,..................3,2,1

Exemplo:

$$\begin{cases} -3x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Solução:

Passo 1: k = 1

$$\begin{matrix} 0 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{matrix} \xrightarrow{\text{Linha 2} \leftrightarrow \text{Linha 1}} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{matrix} \xrightarrow{\text{Linha 3} \leftarrow \text{(Linha 1)(-1)+Linha 3}} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{matrix}$$

Passo 2: k = 2

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{matrix} \xrightarrow{\text{Linha 3} \leftarrow \text{(Linha 2)(-1)+Linha 3}} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -3x_2 + x_3 = -2 \\ -x_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_3 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_1 = 1 \end{matrix}$$

9.6 Método de Gauss-Jordan

Seja $Ax = b$.

O método para a solução do sistema consiste em transformá-lo em outro sistema identidade Ix = b, usando as mesmas propriedades das equações aplicadas no método de triangularização.

Para uma matriz 3x3:

Passo 1: Se $a_{11} = 0$ $\Rightarrow$ Rotina de Troca i = 1, 2, 3

linha 1 $\leftarrow$ linha 1 / a_{11}
linha 2 $\leftarrow$ (- a_{21}).linha 1 + linha 2
linha 3 $\leftarrow$ (- a_{31}).linha 1 + linha 3

Passo 2: Se $a_{22} = 0$ $\Rightarrow$ Rotina de Troca i = 2, 3

linha 2 $\leftarrow$ linha 2 / a_{22}
linha 1 $\leftarrow$ (- a_{12}).linha 2 + linha 1
linha 3 $\leftarrow$ (- a_{32}).linha 2 + linha 3

<u>Passo 3:</u> Se $a_{33} = 0 \Rightarrow$ Rotina de Troca i = 3

linha 3 $\leftarrow$ linha 3 / a_{33}

linha 1 $\leftarrow$ $(- a_{13})$.linha 3 + linha 1

linha 2 $\leftarrow$ $(- a_{23})$.linha 3 + linha 2

Passo $\rightarrow$ k = 1, 2, 3
Linha $\rightarrow$ i = 1, 2, 3
Coluna $\rightarrow$ j = 1, 2, 3, 4

Algoritmo:

```
Para k = 1 até N
        Se a_kk = 0 então  Rotina Troca
        Para i = 1 até N
                Se i = k então
                        Para j = k até 5
                           a_ij = a_ij / a_kk
                        Fim
                Senão
                        Para j = 1 até N+1
                           a_ij = (a_ik).a_kj + a_ij
                        Fim
                Fim
        Fim
Fim
```

Solução do sistema:

$$x_i = a_{i\,N+1}\ ,\ i = 1, 2, 3, \ldots, N$$

Exemplo:

$$\begin{cases} 0x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Solução:

$$\begin{matrix} 0 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{matrix} \xrightarrow{\text{Linha 1} \leftrightarrow \text{Linha 2}} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{matrix} \xrightarrow{\text{Linha 3} \leftarrow \text{(Linha 1)(-1)+Linha3}} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{matrix} \xrightarrow{\text{Linha 2} \leftarrow \text{Linha 2/(-3)}} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{matrix} \xrightarrow[\text{Linha 3} \leftarrow \text{Linha 2(3)+Linha 3}]{\text{Linha 1} \leftarrow \text{Linha 2(-1)+Linha 1}} \begin{matrix} 1 & 0 & 4/3 & 7/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 4/3 & 7/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{matrix} \xrightarrow{\substack{\text{Linha 3} \leftarrow \text{Linha 3(-1)} \\ \text{Linha 1} \leftarrow \text{Linha 3(-4/3)+Linha 1} \\ \text{Linha 2} \leftarrow \text{Linha 3(1/3)+Linha 3}}} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$x_3 = 1$, $x_2 = 1$, $x_1 = 1$

9.7 Atividades

1. Resolva o seguinte sistema de equações pelo método de eliminação gaussiana usando as funções do SciLab.

$$\begin{aligned} x - y - z &= -4 \\ 5x - 4y + 3z &= -12 \\ 2x + y + z &= 11 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} w + x + y + z &= 10 \\ 2w + 3x + y + 5z &= 31 \\ -w + x - 5y + 3z &= -2 \\ 3w + x + 7y - 2z &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + 6y - z &= 2 \\ 5x - y + 2z &= 29 \\ -3x - 4y + z &= 18 \end{aligned}$$

2.- Resolver pelo método de eliminação gaussiana , método Gauss-Jordanl, o seguinte sistema tridiagonal ou matriz banda, usando as funções do Scilab.

$$\begin{aligned} 2x1 - x2 &= 1 \\ -x1 + 2x2 - x3 &= 1 \\ -x2 + 2x3 - x4 &= 1 \\ -x3 + 2x4 - x5 &= 1 \\ -x4 + 2x5 - x6 &= 1 \\ -x5 + 2x6 &= 1 \end{aligned}$$

9.8 Referências

CUNHA, Cristina. **Métodos Numéricos**. 2ª Ed. Campinas SP: Editora da UNICAMP, 2003. ISBN: 85-268-0636-X , CDD ï 620.00151

BURDEN, L. Richard, J. Douglas Faires **Análise Numérica** SP: Editora Pioneira Thomson Learning, 2003. ISBN 85-221-0297-X CDD - 515